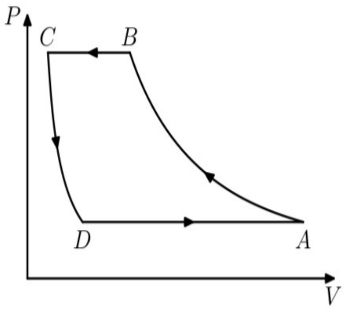
Corrigé de l'exercice sur la pompe à chaleur

1) Cycle



2) Il faut que la transformation soit adiabatique, réversible, le gaz parfait, γ constant. Il existe trois relations : les relations de Laplace (voir cours)).

3) En appliquant les lois de Laplace aux deux adiabatiques AB et CD on obtient :

Pour AB:

$\mathbf{T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma} = T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma}}$ d'où $T_A^{\gamma}P_A^{1-\gamma} / P_B^{1-\gamma} = T_B^{\gamma}$ (relation entre pression et température).

$T_A^{\gamma} (P_A/P_B)^{1-\gamma} = T_B^{\gamma}$

$T_B = T_A (P_A/P_B)^{(1-\gamma)/\gamma}$

$T_B = T_A (P_A/P_B)^{(1/\gamma - 1)}$ avec $1 - 1/\gamma = \beta$; $a = P_1/P_0$; $P_A = P_0$ et $P_B = P_1$; on obtient $T_B = T_0 (P_0/P_1)^{(1/\gamma - 1)}$

$T_B = T_0 (P_1/P_0)^{-(1/\gamma - 1)} = T_0 (P_1/P_0)^{(1-1/\gamma)}$

$T_B = T_0\, a^{\beta}$ A.N.: $T_B = 448$ K.

Pour CD:

$\mathbf{T_C^{\gamma} P_C^{1-\gamma} = T_D^{\gamma} P_D^{1-\gamma}}$

$T_D = T_C (P_C/P_D)^{(1/\gamma - 1)}$

$T_D = T_1 (P_1/P_0)^{(1/\gamma - 1)}$

$T_D = T_1\, a^{-\beta}$ A.N.: $T_D = 188$ K.

4) L'efficacité de la pompe à chaleur est $e = -Q_{BC}/W$ où W est le travail reçu sur un cycle.

D'après le premier principe et $\Delta U_{cycle} = 0$; $W = -Q_{BC} - Q_{DA}$ et

$e = -Q_{BC} / (-Q_{BC} - Q_{DA}) = Q_{BC} / (Q_{BC} + Q_{DA})$

$e = Q_{BC} / (Q_{BC} + Q_{DA}) = 1/(1 + Q_{DA}/Q_{BC})$

Remarque: Q_{AB} et Q_{CD} nulles car les transformations sont adiabatiques réversibles.

Les quantités de chaleurs Q_{BC} et Q_{DA} sont égales à $Q_{DA} = n\,C_{pm}(T_0 - T_D)$, $Q_{BC} = n\,C_{pm}(T_1 - T_B)$ car ces transformations sont isobares.

$e = Q_{BC} /(Q_{BC} + Q_{DA}) = 1/(1 + Q_{DA}/Q_{BC})$

$e = 1/(1 + \cancel{nC_{pm}}(T_0 - T_D)/\cancel{nC_{pm}}(T_1 - T_B))$

$e = 1/(1 + (T_0 - T_D)/(T_1 - T_B))$

$e = 1/[1 + (T_0 - T_1\, a^{-\beta})/(T_1 - T_0\, a^{\beta})]$

$e = 1/[1 + (T_0 - T_1/a^{\beta})/(T_1 - T_0\, a^{\beta})]$

$e = 1/[1 +1/a^{\beta}. (T_0\, a^{\beta} - T_1)/(T_1 - T_0\, a^{\beta})]$

$e = 1/[1 -1/a^{\beta}.\cancel{(T_1 - T_0\, a^{\beta})}/\cancel{(T_1 - T_0\, a^{\beta})}]$
$e = 1/(1 -1/a^{\beta})$
$e = 1/(1 - a^{-\beta})$

A.N.: $e = 2,71$

5) Un cycle de Carnot est un cycle réversible composé de deux adiabatiques réversibles et de deux isothermes T_0, T_1 sur lesquelles s'effectuent les échanges de chaleur avec les thermostats.

L'efficacité du cycle de Carnot est supérieure au cycle de Joule car il s'agit d'un cycle réversible (théorème de Carnot).

$$e=\frac{-Q_C}{W} \quad < \quad e_{cPAC}=\frac{T_C}{T_C-T_F}$$

Démonstration

$W + Q_F + Q_C = 0$ (premier principe ($\Delta U_{cycle} = W + Q_{cycle}$) + cycle : $\Delta U_{cycle} = 0$)

$Q_F = -W - Q_C$ et $Q_C/ T_C + Q_F / T_F \leq 0$ (inégalité de Clausius)

$Q_C/ T_C + (-W - Q_C)/ T_F \leq 0$

$Q_C/ T_C - W/ T_F - Q_C/ T_F \leq 0$

$T_F\, Q_C - T_C\, W - T_C\, Q_C \leq 0$ (obtenue en multipliant par T_CT_F)

$T_F\, Q_C - T_C\, Q_C - T_C\, W \leq 0$

$Q_C (T_F - T_C) \leq T_C\, W$

$- Q_C (T_C - T_F) \leq T_C\, W$

$- Q_C /W \leq T_C /(T_C - T_F)$

$e = - Q_C /W$

$e \leq T_C /(T_C - T_F)$

$e_C = T_C /(T_C - T_F)$ A.N.: $e_C = 298 / (298 – 283) = 19,87$

6) L'efficacité du cycle de Carnot est supérieure au cycle de Joule car il s'agit d'un cycle réversible (théorème de Carnot). On trouve 19,87 au lieu de 2,71.

7) Au cours d'un cycle, l'entropie créée correspond à la variation d'entropie des deux sources froide et chaude. $\Delta S_{cycle} = S_{échangée} + S_{créée} = 0$ car $\Delta S_{cycle} = 0$.

$S_{créée} = - S_{échangée} = - Q_{BC}/T_1 - Q_{DA}/T_0 = - n\, C_{pm}(T_1 - T_B)/T_1 \;\; - n\, C_{pm}(T_0 - T_D)/ T_0$

$S_{créée} = - nC_{pm}(T_1 - T_0\, a^{\beta})/T_1 \;\; - nC_{pm}(T_0 - T_1\, a^{-\beta})/ T_0$ avec n = 1 et $C_{vm}=\frac{\gamma R}{(\gamma-1)}=\frac{R}{(1-1/\gamma)}=\frac{R}{\beta}$

$S_{créée} = -R/\beta\,(T_1 - T_0\, a^{\beta})/T_1 \;\; - R/\beta\,(T_0 - T_1\, a^{-\beta})/ T_0$

$S_{créée} = -R/\beta\, [\,(T_1 - T_0\, a^{\beta})/T_1 - (T_0 - T_1\, a^{-\beta})/ T_0]$

$S_{créée} = -R/\beta\, [\,(1 - T_0\, a^{\beta}/T_1) + (1 - T_1\, a^{-\beta}/ T_0)]$ avec $x = T_0\, a^{\beta}/T_1$

$S_{créée} = -R/\beta\, [\,(1 - x) + (1 - 1/x)]$

$S_{créée} = R/\beta\, (x + 1/x - 2)$

dérivée de $R/\beta\, (x + 1/x - 2)$: $R/\beta\, (1 - 1/x^2)$

Nulle si $1 - 1/x^2 = 0$ soit $x = 1$.

$1 - 1/x^2 > 0$ si $x > 1$ $S_{créée}$ croissante; décroissante si $0 < x < 1$.

A.N.: $S_{créée} = 4{,}92\ JK^{-1}mol^{-1}$.

8) En régime permanent ce qui est perdu est compensé par ce qui est fourni, la puissance mécanique cherchée sera $P = P_f /e = 7{,}4$ kW.

9)

$T_c = 20+273 = 293$ K $\;\; T_f = 4 + 273 = 277$ K

a) Le radiateur doit compenser exactement les pertes thermiques de la pièce, donc la puissance d'un radiateur électrique est de 4 kW

b) La machine doit compenser exactement les pertes thermiques donc $P_c = - 4$kW

Machine réversible : d'après 2nd ppe : $Q_f = - T_f \frac{Q_c}{T_c}$ donc $P_f = - T_f \frac{P_c}{T_c}$

1er ppe : $P_{méca} = - (P_f + P_c) = 0{,}2$ kW, soit une puissance 20 fois moins importante que celle consommée par le radiateur électrique 😊