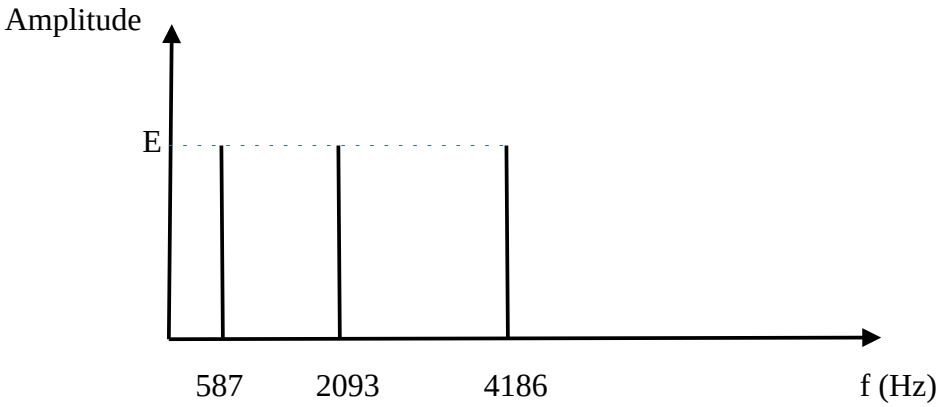
Exercice 7

Q1.

Le signal d'entrée ue(t) est la somme de trois signaux sinusoïdaux de même amplitude E mais de fréquences différentes :

- f_1 = 587 Hz (amplitude E)
- f_2 = 2093 Hz (amplitude E)
- f_3 = 4186 Hz (amplitude E)

Le **spectre en amplitude** représente l'amplitude de chaque composante fréquentielle en fonction de la fréquence f.



Q2.

pour chaque fréquence f_i (avec $i \in \{1,2,3\}$) :

- $G(f_i) = \|H(f_i)\|$ est le **gain linéaire (module de la fonction de transfert)** , de sorte que l'amplitude de sortie est $\mathbf{E_i = E \times G(f_i) = 10^{(G(dB)/20)}}$.
- $\Phi_i = \arg(H(f_i))$ est le **déphasage** induit par le filtre (exprimé en radians dans l'équation temporelle).

$$u_s(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + E_2 \cos\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4} + \phi_2\right) + E_3 \cos\left(2\pi f_3 t - \frac{\pi}{5} + \phi_3\right)$$

1. Pour $f_1 = 587\ \text{Hz}$

- Rapport de fréquence : $\frac{f_1}{f_c} = \frac{587}{3500} \approx 0,168$
- **Gain linéaire :** $G(f_1) = \frac{0,168}{\sqrt{1+0,168^2}} \approx 0,165$
- **Gain en dB :** $G_{dB}(f_1) = 20\log(0,165) \approx \mathbf{-15,6}\ \text{dB}$ *(cohérent avec le diagramme de Bode à $f = 5,9 \cdot 10^2$ Hz)*
- **Amplitude de sortie :** $E_1 \approx \mathbf{0,165} \cdot \mathbf{E}$
- **Phase :** $\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \arctan(0,168) \approx 1,40\ \text{rad}$ (soit $\approx \mathbf{80,5}°$)

2. Pour $f_2 = 2093\ \text{Hz}$

- Rapport de fréquence : $\frac{f_2}{f_c} = \frac{2093}{3500} \approx 0,598$
- **Gain linéaire :** $G(f_2) = \frac{0,598}{\sqrt{1+0,598^2}} \approx 0,513$
- **Gain en dB :** $G_{dB}(f_2) = 20\log(0,513) \approx \mathbf{-5,8}\ \text{dB}$ *(cohérent avec le graphique juste avant 10^3 Hz)*
- **Amplitude de sortie :** $E_2 \approx \mathbf{0,513} \cdot \mathbf{E}$
- **Phase :** $\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan(0,598) \approx 1,03\ \text{rad}$ (soit $\approx \mathbf{59,1}°$)

3. Pour $f_3 = 4186\ \text{Hz}$

- Rapport de fréquence : $\frac{f_3}{f_c} = \frac{4186}{3500} \approx 1,196$
- **Gain linéaire :** $G(f_3) = \frac{1,196}{\sqrt{1+1,196^2}} \approx 0,767$
- **Gain en dB :** $G_{dB}(f_3) = 20\log(0,767) \approx \mathbf{-2,3}\ \text{dB}$ *(cohérent avec le graphique à un peu plus de $4 \cdot 10^3$ Hz)*
- **Amplitude de sortie :** $E_3 \approx \mathbf{0,767} \cdot \mathbf{E}$
- **Phase :** $\phi_3 = \frac{\pi}{2} - \arctan(1,196) \approx 0,70\ \text{rad}$ (soit $\approx \mathbf{40,1}°$)

$u_s(t) \approx 0,165E\cos(2\pi \cdot 587t + 1,40) + 0,513E\cos(2\pi \cdot 2093t + 1,03) +$

0,767 E cos (2π. 4186 t + 0,70)

Interprétation physique : On constate bien l'effet du filtre **passe-haut**. La note basse ($f_1 = 587\ \text{Hz}$) se retrouve fortement atténuée (son amplitude est divisée par près de 6), tandis que la note la plus aiguë ($f_3 = 4186\ \text{Hz}$), située au-dessus de la fréquence de coupure de $3500\ \text{Hz}$, traverse le filtre en conservant 90% de son amplitude initiale. Le tweeter est ainsi protégé des basses fréquences qui auraient pu l'endommager.

Circuit (a)

• **À basse fréquence ($\omega \to 0$) :** La bobine L équivaut à un fil court-circuit. On a $s \approx e$.

• **À haute fréquence ($\omega \to \infty$) :** La bobine L se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant ne peut plus circuler dans la résistance R, la tension de sortie s'annule : $s \approx 0$.

Le circuit laisse passer les basses fréquences et bloque les hautes fréquences.

Conclusion (a) : C'est un filtre **passe-bas** (du premier ordre).

Circuit (b)

Ici, la bobine L et le condensateur C sont placés en parallèle en sortie.

• **À basse fréquence ($\omega \to 0$) :** * Le condensateur est un interrupteur ouvert (on peut l'ignorer).

La bobine est un fil court-circuit qui relie directement la borne de sortie à la masse.: $s \approx 0$.

• **À haute fréquence ($\omega \to \infty$) :** La bobine est un interrupteur ouvert (on peut l'ignorer).

Le condensateur devient un fil court-circuit connecté à la masse. Il court-circuite la sortie : $s \approx 0$.

Le circuit bloque les basses et les hautes fréquences, mais laisse passer une bande de fréquences intermédiaire.

Conclusion (b) : C'est un filtre **passe-bande** (du deuxième ordre).

Circuit (c)

Ce circuit comporte un groupement parallèle (R//L) en entrée et une bobine L en parallèle avec une résistance R en sortie.

• **À basse fréquence ($\omega \to 0$) :**

Les deux bobines L se comportent comme des fils courts-circuits. La bobine d'entrée court-circuite la résistance d'entrée . La bobine de sortie court-circuite la sortie vers la masse : $s \approx 0$.

•**À haute fréquence ($\omega \to \infty$) :**

Les deux bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts. En entrée, le courant est obligé de passer par la résistance R. En sortie, la bobine étant ouverte, le signal est récupéré aux bornes de la résistance R de droite. On se retrouve avec un pont diviseur de tension constitué des deux résistances R identiques : $s = R+RRe = 21e = 0$.

Le circuit bloque le signal aux très basses fréquences et le laisse passer (avec une atténuation de moitié) aux hautes fréquences.

Conclusion (c) : C'est un filtre **passe-haut**.

Q1. Nature du filtre d'après le comportement asymptotique

Étudions le comportement de la bobine idéale d'inductance L aux fréquences extrêmes :

• **À basse fréquence ($\omega \to 0$) :** La bobine se comporte comme un **court-circuit** (un fil). Elle relie directement la sortie à la masse, donc la tension de sortie s'annule : $u_s \approx 0$.

• **À haute fréquence ($\omega \to \infty$) :** La bobine se comporte comme un **interrupteur ouvert**. Le circuit de sortie se résume à la résistance R de droite. On obtient alors un pont diviseur de tension entre les deux résistances identiques R : $u_s = R/(R+R)\, u_e = u_e/2$.

Le filtre bloque les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences.

Conclusion : C'est un filtre **passe-haut** (du premier ordre).

Q2. Établissement de la fonction de transfert H(jω)

En sortie, la bobine et la résistance de droite sont branchées en parallèle. L'impédance équivalente de ce groupement en parallèle, notée Zsp, vaut :

$$\frac{1}{Z_{sp}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + jL\omega}{jRL\omega} \implies Z_{sp} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

Par la formule du pont diviseur de tension entre la résistance d'entrée R et Z_{sp} :

Par la formule du pont diviseur de tension entre la résistance d'entrée R et Z_{sp} :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_{sp}}{R + Z_{sp}} = \frac{\frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}{R + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(R + jL\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRL\omega}{R(R + jL\omega) + jRL\omega} = \frac{jRL\omega}{R^2 + 2jRL\omega}$$

En simplifiant par R^2 :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{L\omega}{R}}{1 + 2j\frac{L\omega}{R}}$$

Q3. Identification de l'affirmation fausse

1. *C’est la pulsation de l’intersection des deux asymptotes...* → **VRAI** pour un filtre du 1er ordre.

2. *C’est la pulsation pour laquelle le gain en décibels vaut le gain maximal diminué de 3 dB...* → **VRAI** (définition standard à −3 dB).

3. *C’est la pulsation pour laquelle le gain vaut la moitié du gain maximal...* → **FAUX**.

À la pulsation de coupure, le gain linéaire est atténué d'un facteur 1/√2 ≈ 0,707 (ce qui correspond à la moitié de la *puissance* maximale, et non de la tension/gain).

Q4. Expression et application numérique de la pulsation de coupure ω_c

D'après la forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 \cdot j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$.

En identifiant avec notre résultat de la **Q2**, on peut réécrire notre fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{2} \cdot j\left(\frac{2L\omega}{R}\right)}{1 + j\left(\frac{2L\omega}{R}\right)}$$

Par identification, on en déduit :

- Le gain maximal (à haute fréquence) : $H_0 = \frac{1}{2}$ (soit $G_{dB,max} = 20\log(1/2) \approx -6$ dB).
- La pulsation de coupure : $\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2L\omega}{R} \implies \boldsymbol{\omega_c = \frac{R}{2L}}$

Application numérique :

$$\omega_c = \frac{1,0 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5} = \mathbf{1000}\ \text{rad/s} \quad (10^3\ \text{rad/s})$$

La fonction de transfert sous forme canonique est : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ avec $\omega_c = 10^3$ rad/s.

(a) À basse fréquence ($\omega \ll \omega_c$) :

- **i. Équivalent :** $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{2}j\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{j\omega}{2000}$
- **ii. Asymptote du gain :** $G_{dB}(\omega) \approx 20\log\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) = 20\log(\omega) - 20\log(2000)$. C'est une droite de **pente** $+20$ dB/décade. Elle passe par l'axe 0 dB si $\omega = 2000$ rad/s, et vaut -6 dB en $\omega = \omega_c = 10^3$ rad/s.
- **iii. Asymptote de la phase :** $\phi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{2}j\frac{\omega}{\omega_c}\right) = +\mathbf{90}^\circ$ (ou $\pi/2$ rad).

(b) À haute fréquence ($\omega \gg \omega_c$) :

- **i. Équivalent :** $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{\frac{1}{2}j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{2}$
- **ii. Asymptote du gain :** $G_{dB}(\omega) = 20\log(1/2) \approx -\mathbf{6}$ dB. C'est une **droite horizontale**.
- **iii. Asymptote de la phase :** $\phi(\omega) = \arg(1/2) = \mathbf{0}^\circ$.

(c) Descriptif du tracé asymptotique sur le papier semi-log :

- **Axe du Gain (G_{dB}) :**
  - Pour ω allant de 10^1 à 10^3 $\mathrm{rad/s}$, tracez une ligne droite montante partant de -46 dB (en $\omega = 10^1$) et s'arrêtant au point clé $(\omega = 10^3 \text{ rad/s}; G_{dB} = -6 \text{ dB})$.
  - Pour ω allant de 10^3 à 10^5 $\mathrm{rad/s}$, tracez une ligne droite horizontale constante à la valeur -6 dB.
- **Axe de la Phase (ϕ) :**
  - Pour $\omega < 10^3$ $\mathrm{rad/s}$, une droite horizontale à 90°.
  - Pour $\omega > 10^3$ $\mathrm{rad/s}$, une droite horizontale à 0°.

Q6. Tracé du diagramme de Bode réel (Points essentiels)

Pour obtenir la courbe réelle, il convient de lisser le tracé asymptotique en raccordant les segments grâce aux propriétés spécifiques de la pulsation de coupure $\omega_c = 10^3$ $\mathrm{rad/s}$:

1. **Au niveau du Gain :**
   - À la pulsation de coupure $\omega = 10^3$ $\mathrm{rad/s}$, le gain réel subit une atténuation de 3 dB par rapport à son asymptote haute. Placez précisément un point à :

$$G_{dB}(10^3) = G_{dB,max} - 3 \text{ dB} = -6 - 3 = \mathbf{-9} \text{ dB}$$

   - Tracez une courbe douce qui suit la pente à basse fréquence, s'incurve en passant par le point $(10^3 \text{ rad/s}; -9 \text{ dB})$, puis rejoint asymptotiquement la ligne des -6 dB.
2. **Au niveau de la Phase :**
   - À la pulsation de coupure $\omega = 10^3$ $\mathrm{rad/s}$, la phase réelle se situe exactement au milieu du saut asymptotique :

$$\phi(10^3) = +\mathbf{45}^\circ$$

   - Tracez une courbe lisse décroissante (en forme de "S" inversé) partant de 90° aux basses fréquences, passant par le point charnière $(10^3 \text{ rad/s}; 45^\circ)$, et se stabilisant à 0° aux hautes fréquences.