PROBLÈME : DÉMONSTRATION DU CÔNE D'ACCEPTANCE D'UNE FIBRE OPTIQUE

L'objectif de ce problème est d'étudier théoriquement la propagation de la lumière au sein d'une fibre optique à saut d'indice, d'établir la condition de guidage par réflexion totale interne, et d'en déduire l'expression analytique de son cône d'acceptance ainsi que son ouverture numérique.

1. Présentation du modèle géométrique

On considère une fibre optique cylindrique d'axe de révolution (O*z*), constituée de deux milieux transparents, homogènes et isotropes :

- Un **cœur** cylindrique d'axe (O*z*), de rayon a et d'indice de réfraction n_1.
- Une **gaine** concentrique entourant le cœur, d'indice de réfraction n_2 tel que $n_1 > n_2$.

L'ensemble est immergé dans un milieu extérieur (en général l'air) d'indice de réfraction $n_0 = 1{,}00$. Un rayon lumineux contenu dans le plan méridien entre dans la fibre par la face d'entrée plane (perpendiculaire à l'axe (O*z*)) au point d'incidence I. Il fait un angle α avec l'axe optique (O*z*).

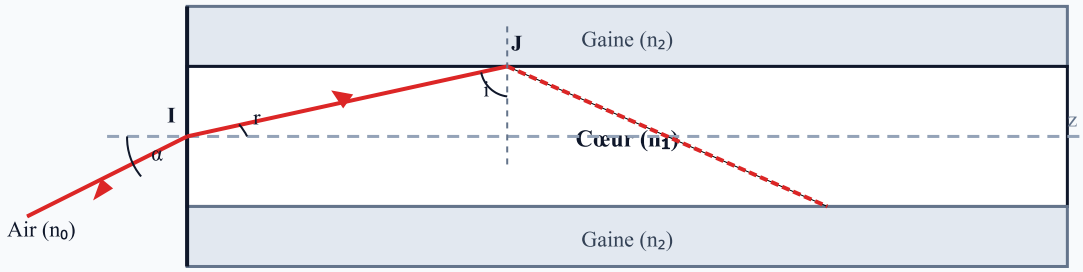


Figure 1 — Trajectoire d'un rayon lumineux guidé dans le plan méridien de la fibre optique

Partie I : Étude de la réfraction à la face d'entrée

1.1. Écrire la loi de Snell-Descartes pour la réfraction au dioptre d'entrée en I entre l'air (n_0) et le cœur (n_1). Déduire l'expression de sin α en fonction de n_0, n_1 et sin r.

1.2. Montrer que pour tout angle d'incidence $\alpha \in [0, \pi/2]$, le rayon pénètre toujours dans le cœur de la fibre (absence de réflexion totale au dioptre d'entrée). Préciser la valeur maximale $r_{\max}$ de l'angle de réfraction r.

Partie II : Condition de guidage par réflexion totale interne

Le rayon réfracté atteint l'interface cœur-gaine au point J avec un angle d'incidence noté i par rapport à la normale à cette interface.

2.1. En considérant le triangle rectangle formé par les points I, J et la projection orthogonale de J sur l'axe optique, établir la relation géométrique reliant l'angle de réfraction r et l'angle d'incidence i :

$$i = (\pi / 2) - r$$

2.2. Énoncer la condition physique sur l'angle d'incidence i pour qu'il y ait réflexion totale interne au point J. En déduire l'expression de l'angle limite i_{lim} en fonction des indices n_1 et n_2.

2.3. Montrer que la condition de guidage du rayon lumineux s'exprime par la condition suivante sur l'angle de réfraction r :

$$\cos r \geq n_2 / n_1$$

Partie III : Cône d'acceptance et ouverture numérique

3.1. En utilisant l'identité trigonométrique $\sin^2 r + \cos^2 r = 1$ et les résultats des parties précédentes, démontrer que le rayon incident est guidé si et seulement si son angle d'incidence α vérifie :

$$n_0 \sin \alpha \leq \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}$$

3.2. On définit l'**Ouverture Numérique** (ON) de la fibre par la quantité $\text{ON} = n_0 \sin \alpha_{\text{max}}$. Donner son expression exacte en fonction de n_1 et n_2.

3.3. Définir physiquement la notion de *cône d'acceptance* de la fibre optique et expliquer son importance pratique lors du couplage avec une source lumineuse.

Partie IV : Application numérique et couplage

On considère une fibre optique en silice présentant les caractéristiques suivantes :

- Indice du cœur : $n_1 = 1{,}458$
- Indice de la gaine : $n_2 = 1{,}440$
- Milieu extérieur : Air ($n_0 = 1{,}00$)

4.1. Calculer la valeur numérique de l'ouverture numérique ON de cette fibre.

4.2. En déduire l'angle d'acceptance maximal α_{max} exprimé en degrés.

4.3. On injecte dans cette fibre la lumière émise par un diode laser formant un faisceau conique d'un demi-angle d'ouverture de 15°. La totalité du flux lumineux sera-t-elle guidée ? Justifier la réponse.