M1- Cinématique du point

La mécanique est l'étude du mouvement des systèmes matériels. Dans ce cadre, la cinématique a pour objet la description du mouvement et son paramétrage s**ans chercher à en établir les causes.**
On se limitera à l'étude d'**un point matériel** : c'est un objet ayant une masse mais pas de volume.

objectifs :

Cinématique du point Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.	Utiliser les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé. Construire le trièdre local associé au repérage d'un point.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer les vecteurs position et vitesse en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.
	Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.

I. Cadre spatio-temporel

1. Cadre général

On se place ici dans le cadre de la mécanique classique, ou newtonienne : la vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide (sinon il faut utiliser la théorie de la relativité restreinte) ; la taille des systèmes étudiés est très grande devant celle de l'atome (sinon il faut utiliser la théorie de la mécanique quantique).

2. Repère d'espace

On appelle repère d'espace R un ensemble de points dont les distances internes sont constantes. On parle aussi de solide de référence.

3. Référentiel

Un référentiel est muni d'un repère d'espace et d'une horloge. Concrètement, on associe à un référentiel un système de coordonnées avec des axes et un temps t.

En mécanique classique, le temps est universel c'est à dire qu' il s'écoule de la même façon dans tous les référentiels.

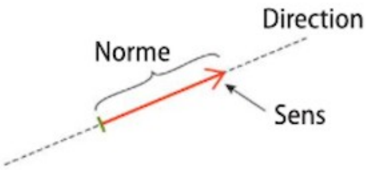
Pour définir un mouvement, **<u>il faut toujours définir le référentiel</u>** ! En effet, le mouvement est relatif ce qui signifie qu'il dépend du référentiel choisi.

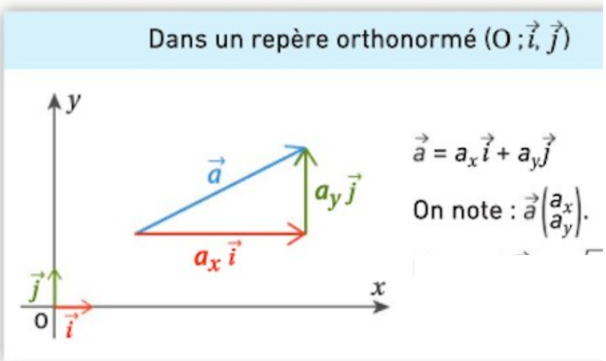
Ex : une personne assise dans une voiture qui roule, est immobile pour les autres passagers, mais en mouvement pour un piéton regardant passer la voiture.

II. Outils vectoriels (rappels)

Un vecteur noté $\vec{a}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : une droite ;
- son **sens** : celui indiqué par la flèche ;
- sa **norme** *a* (notée $||\vec{a}||$ en maths) : la longueur du vecteur.





Remarque importante : dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 3, on définit une « BOND », base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tels que :
- il sont orthogonaux entre eux,
- de norme 1,
- ils respectent la règle des trois doigts de la main droite (voir ci-contre)

alors **tout vecteur s'écrit comme une combinaison linéaire de ces 3 vecteurs :**

Ex : $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

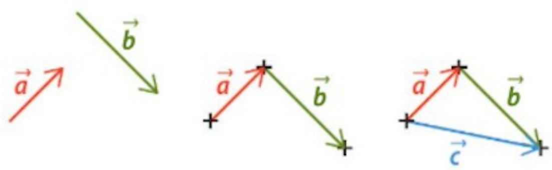
A priori, x, y et z sont algébriques (grandeurs positives ou négatives).

La norme de $\overrightarrow{AB}$ notée $||\overrightarrow{AB}||$ est positive et vaut : $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La grandeur AB, désigne la valeur algébrique de $\overrightarrow{AB}$. Selon les choix du repère, AB peut être positive ou négative : $AB = \pm||\overrightarrow{AB}||$

Somme vectorielle

Soit $\vec{c}$ un vecteur tel que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Soient $\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

Alors :

$\vec{a} + \vec{b}\begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

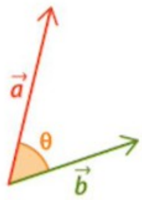
Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

C'est **le nombre** noté $\vec{a}\cdot\vec{b}$ défini par $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = **abcos θ**

(a, b désignent les normes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
θ l'angle formé entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$).

- Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires de **même sens**, alors $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$.

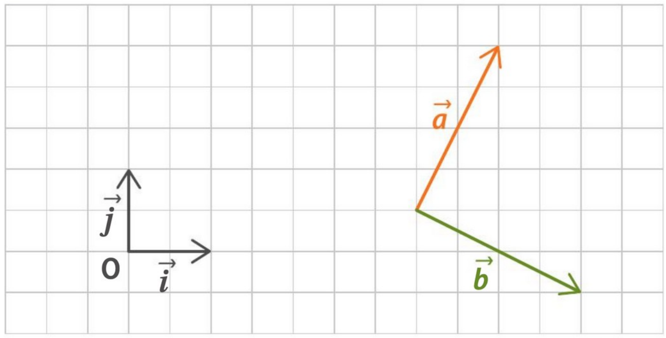
  Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires de **sens contraires**, alors $\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$.
- Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux, alors $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.



Soient $\vec{a}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$.
Alors :
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Ex1 : les fondamentaux sur les vecteurs

Soient deux vecteurs dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (schéma ci-contre)



A) Vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

1) Exprimer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2) En déduire les coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
3) Calculer $\vec{a}.\vec{i}$ et $\vec{b}.\vec{i}$. Commenter.
4) Calculer de même $\vec{a}.\vec{j}$ et $\vec{b}.\vec{j}$. Commenter.

B) Somme de vecteurs : $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$

1) Dessiner le vecteur $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$.
2) Donner les coordonnées de $\vec{s}$ en vous appuyant sur votre dessin.
3) Donner les coordonnées de $\vec{s}$ en vous appuyant sur un calcul.

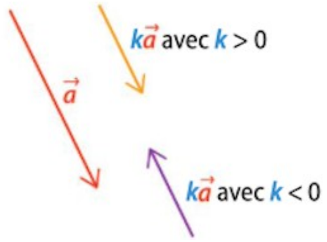
C) Soustraction de vecteurs : $\vec{v}=\vec{a}-0,5.\vec{b}$

1) Dessiner le vecteur $\vec{v}$.
2) Donner les coordonnées de $\vec{v}$ en vous appuyant sur votre dessin.
3) Donner les coordonnées de $\vec{v}$ en vous appuyant sur un calcul

Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{a}$ un vecteur ($\vec{a} \neq \vec{0}$) et soit k un nombre réel non nul. Le produit du vecteur $\vec{a}$ par le réel k est **le vecteur noté** $k\vec{a}$ tel que :

- $k\vec{a}$ et $\vec{a}$ ont la même direction.
- $k\vec{a}$ et $\vec{a}$ ont :
  - le même sens si $k > 0$;
  - des sens contraires si $k < 0$.
- La norme de $k\vec{a}$ est :
  - ka si $k > 0$;
  - $-ka$ si $k < 0$.



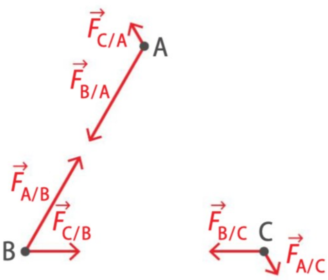
Soit $\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ et soit k un réel non nul.

Alors :

$k\vec{a}\begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \end{pmatrix}$

Ex 2 : interpréter une expression vectorielle

29 Trois objets ponctuels A, B et C de charges électriques q_A, q_B et q_C sont disposés aux sommets d'un triangle équilatéral. On représente à l'échelle les forces électrostatiques qu'ils exercent les uns sur les autres. La charge q_A est positive.



a. Quels sont les signes de q_B et q_C ?

b. Parmi q_B et q_C, dire laquelle est le double de q_A en valeur absolue, et laquelle est la moitié de q_A en valeur absolue.

On donne :

Loi de Coulomb

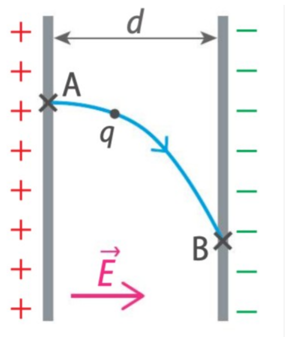
L'interaction électrostatique entre deux points matériels A et B, de charges électriques respectives q_A et q_B, séparés par une distance d, est modélisée par des forces $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ telles que :

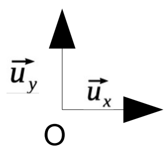
$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = k \times \frac{q_A \times q_B}{d^2}\,\overrightarrow{u_{AB}}$$

Unités SI :
q_A et q_B en coulomb (C)
d en mètre (m)
$F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ en newton (N)
$k = 9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$, constante de Coulomb dans le vide et dans l'air
$\overrightarrow{u_{AB}}$: vecteur de norme 1, de direction (AB) et orienté de A vers B

Ex 3 : produits scalaires

Une particule de charge électrique $q = 4{,}5 \times 10^{-19}$ C se déplace d'un point A à un point B entre deux plaques où règne un champ électrostatique $\vec{E}$, identique en tout point, de norme $E = 6{,}0 \times 10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.
La distance entre les deux plaques est $d = 7{,}0$ cm.
La force électrostatique subie par la particule est $\vec{F} = q\vec{E}$.





1) Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

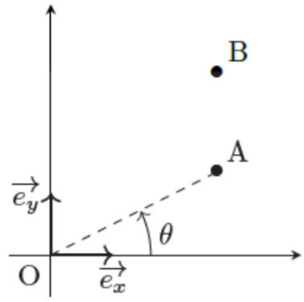
2) A partir des coordonnées seulement, calculer le travail W de $\vec{F}$ entre A et B. On définit W tel que : $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

3) A partir de la formule $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos(\theta)$ retrouver le résultat précédent pour W.

Ex4 : composantes de vecteurs

On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ en fonction de $a = \|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\|$, $b = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ et de l'angle θ.



a) $\overrightarrow{OA}$
b) $\overrightarrow{OB}$
c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

III. Systèmes de coordonnées

En général, le système étudié sera un point M repéré à chaque instant par 3 coordonnées qui sont donc des fonctions du temps. Il faudra choisir le système de coordonnées le plus adapté à la géométrie du mouvement pour simplifier la mise en équation du mouvement. Le point M choisi est en général le centre de gravité.

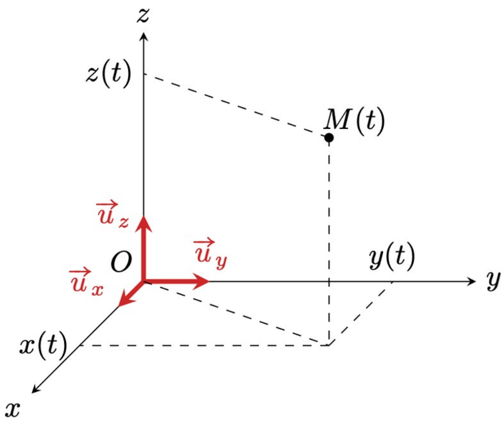
1. Degrés de liberté

Un degré de liberté est un paramètre indépendant dans la description de l'état d'un système physique. Ce paramètre doit avoir la liberté d'évoluer sans contraintes.

Concrètement un solide possède 6 degré de liberté dans l'espace tridimensionnel : 3 degré de translation et 3 degré de rotation. Puisque un point n'a pas de volume (simplification de la réalité), un point a donc maximum 3 degré de liberté (pas de rotation). Il faut donc en général 3 coordonnées pour décrire le mouvement de ce point. Les contraintes sur le mouvement de l'objet réduisent les degrés de liberté.

Exemples :
- un ballon de foot peut se mouvoir dans tout l'espace disponible. S'il est modélisé par un point, il possède 3 degré de liberté. Il faut 3 coordonnées pour décrire le mouvement du ballon.
- un palet sur une table à coussin d'air possède …. degré de liberté. Il faudra donc …. coordonnées pour décrire le mouvement du palet.
- Un chariot de montagne russes et contraint de se déplacer le long d'un rail. Il possède donc … degré de liberté. …. coordonnée est nécessaire pour décrire son mouvement.

2. Coordonnées cartésiennes



Repérage d'un point

A chaque instant, le point M est repéré pas ses coordonnées x(t), y(t) et z(t). Souvent t est implicite et on écrit simplement x, y, z.

3 vecteurs unitaires fixes $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ tels que : ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$) est une base orthonormée directe.

Les vecteurs définissant la base sont fixes dans le référentiel: leur direction et leur sens ne changent pas au cours du temps.

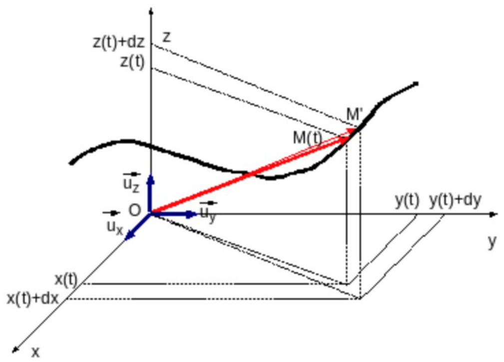
Remarques : - on trouve aussi d'autres notations pour la base comme $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en math ou encore $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

- la base peut être placée ailleurs qu'en O. Par exemple, en M.

Vecteur position $\overrightarrow{OM}$ *:*

$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{u}_x+y\,\vec{u}_y+z\,\vec{u}_z$ on le note souvent en colonne : $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Déplacement élémentaire $d\,\overrightarrow{OM}$ *(noté aussi* $\vec{dl}$ *) :*



M(t) se déplace au cours du temps. On note dt la durée infinitésimale qui sépare deux instants infiniment proches.

On appelle **déplacement élémentaire** la petite variation de $\overrightarrow{OM}$ pendant dt.

$$d\,\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}$$

coordonnées de M(t) : x(t), y(t), z(t)
coordonnées de M(t+dt) : x(t+dt) = x(t)+dx, y(t+dt) = y(t)+dy, z(t+dt) = z(t)+dz

$$\boxed{d\,\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{u}_x+dy\,\vec{u}_y+dz\,\vec{u}_z}$$

Vecteur vitesse $\vec{V}$

Le vecteur vitesse instantané d'un point M est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\boxed{\vec{V}(M)_R=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\vec{V}(t)=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

On précise parfois le référentiel (R) de référence car le vecteur vitesse en dépend. Pour alléger les écritures, on ne le précise pas systématiquement.

Remarques sur les dérivées :

- En physique, il existe de nombreuses variables. C'est pourquoi on explicite les variables par rapport auxquelles on a besoin de dériver.

Ainsi, f'(u) s'écrit : $\frac{df}{du}$ avec f une fonction qui dépend de u et f''(u) s'écrit : $\frac{d^2 f}{du^2}$

- Les dérivées par rapport au temps sont parfois notées par un « . » : $\frac{df}{dt}$ est noté : $\dot{f}$ et $\frac{d^2 f}{dt^2}$ est noté $\ddot{f}$.

- $\frac{d k \vec{v}}{dt} = \frac{d k}{dt} \vec{v} + k \frac{d \vec{v}}{dt}$

Caractéristiques du vecteur vitesse (quelque soit le système de coordonnée) :

Le vecteur vitesse d'un point matériel à une date t est caractérisé par :

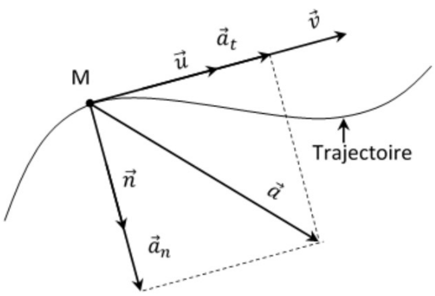
- sa **direction** : tangente à la trajectoire
- son **sens** : celui du mouvement
- sa **norme** $\|\vec{v}\|$ (ou norme) qui correspond à la **valeur de la vitesse** en m.s^{-1}

En **coordonnées cartésiennes,** $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont immobiles ($\frac{d \vec{u}_x}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d \vec{u}_y}{dt} = \vec{0}$ $\frac{d \vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$) et $\vec{V}$ s'écrit : $\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Vecteur accélération

Le vecteur accélération traduit les variations du vecteur vitesse. Le vecteur accélération d'un point M est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{a}(M)_R = \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(M') - \vec{v}(M)}{\Delta t} = \frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$



On précise parfois le référentiel (R) de référence car le vecteur accélération en dépend. Pour alléger les écritures, on ne le précise pas systématiquement.

Remarque : quand la trajectoire est courbée, le vecteur accélération est toujours orienté vers la concavité de la courbe.

En **coordonnées cartésiennes** $\vec{a}$ peut s'écrire :

$$\vec{a} = \frac{d V_x}{dt} \vec{i} + \frac{d V_y}{dt} \vec{j} + \frac{d V_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Ex1 : On considère un mouvement pour lequel le vecteur accélération est un vecteur constant dirigé vers le bas et de norme g = 10 m.s^{-2}. On suppose que l'objet est initialement à l'origine du système de coordonnées et que son vecteur vitesse initial est dirigé vers le haut avec une norme v_0 = 5, 0 m.s^{-1}.

1) Faire un schéma

2) Déterminer le sommet de la trajectoire (instant et hauteur atteinte).

Ex2 : Un point M est décrit par les coordonnées cartésiennes suivantes : x(t) = t , y(t) = 3t^2 , z(t) = 0.

1) Déterminer les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

2) Quelle est la nature de la trajectoire?

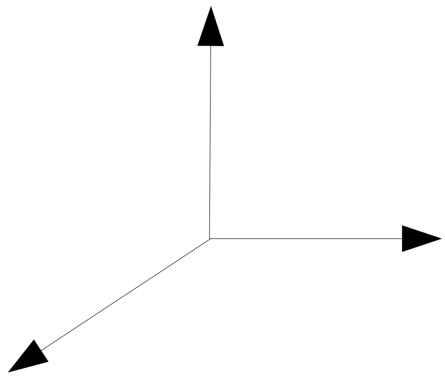
3. Coordonnées cylindriques et polaires

Repérage d'un point

r est la distance entre M et l'axe (Oz) : $r \in [0, +\infty[$

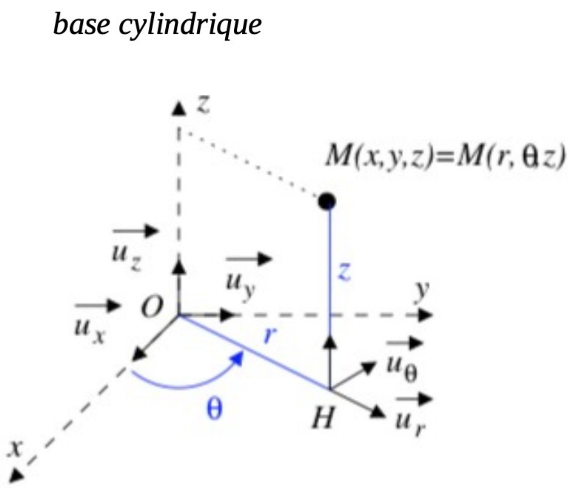
θ est l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OH}$: $\theta \in [0, 2\pi[$

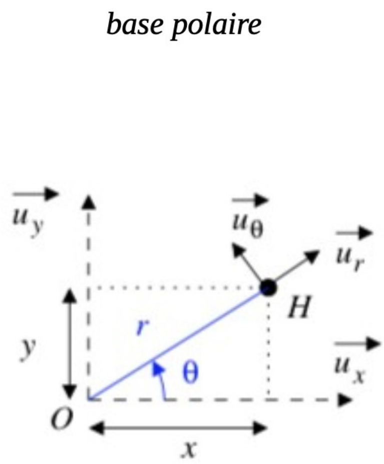
z est la côte de M : $z \in]-\infty, +\infty[$



On choisit un repère muni d'une origine O et d'une base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ définie comme suit :

2 axes mobiles et 1 axe fixe (Oz) dans le référentiel. $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est base orthonormée directe
r = OH, et θ = (Ox,OH)





Lorsque le mouvement est plan et s'effectue autour du point O (qui est alors le pôle autour duquel se fait le mouvement), on utilise la ***base polaire*** *qui est la réduction de la base cylindrique au plan (xOy) .*

Vecteur position $\overrightarrow{OM}$ *:*

en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$ on peut le noter en colonne : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

en coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ on peut le noter en colonne : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque : implicitement, r et z dépendent de t. De plus $\vec{u}_r$ varie selon θ.

Déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ *(noté aussi* $\vec{dl}$ *) :*
M(t) caractérisé par: r(t), θ(t), z(t)
M(t+dt) caractérisé par : r(t+dt) = r+dr, θ(t+dt)=θ(t)+dθ, z(t+dt) = z(t)+dz

Vecteur vitesse $\vec{V}$
Pour déterminer les coordonnées du vecteur vitesse, il est nécessaire de pouvoir dériver les vecteurs de la base par rapport au temps. Or, $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont mobiles donc leurs dérivées ne sont pas nulles !

Exprimons $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ qui sont constants :

On dérive ensuite $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ =

De même, $\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$ =

Rappelons les formules de la dérivée composée :

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dt}$ où y peut désigner une grandeur scalaire ou vectorielle

Ainsi, on peut en déduire le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=$$

On trouve $\vec{V}=\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta+\dot{z}\,\vec{u}_z=\begin{pmatrix}V_r\\V_\theta\\V_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\r\,\dot{\theta}\\\dot{z}\end{pmatrix}$

Vecteur accélération

De même, on en déduit le vecteur accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}}{dt}=$$

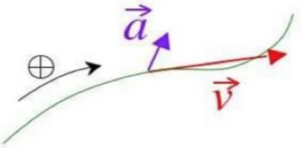
On trouve $\vec{a}=(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r+(r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta+\ddot{z}\,\vec{u}_z=\begin{pmatrix}a_r\\a_\theta\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2\\r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\\\ddot{z}\end{pmatrix}$

Ex3 convertir en coordonnées

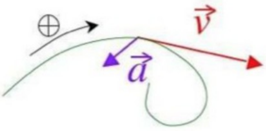
1) cartésiennes les coordonnées cylindriques r = 3, θ = −π/6, z = 2
2) cylindriques les coordonnées cartésiennes $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$, z = 1

IV. Exemples de mouvements simples

1. Mouvement à vecteur accélération constant



A un instant donné, si $\|\vec{v}\|$ augmente, le mouvement est dit accéléré.
Cela correspond à un vecteur accélération dans le sens du mouvement .

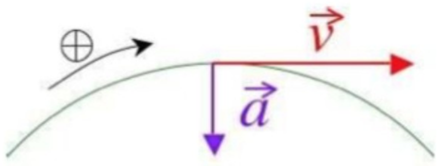


A un instant donné, si $\|\vec{v}\|$ diminue, le mouvement est dit retardé.
Cela correspond à un vecteur accélération dans le sens inverse du mouvement .

Dans la partie qui suit, on considère que le vecteur accélération est constant. Ex : $\vec{a}(M)_R = a\vec{u}_y$ avec a constant.

Selon les conditions initiales, en particulier selon le vecteur vitesse initiale, le mouvement peut être rectiligne ou parabolique.

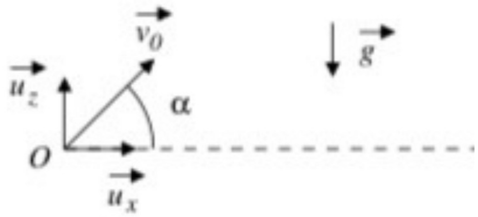
Cas particulier : le mouvement uniforme



Un mouvement est uniforme si $\|\vec{v}\|$ est constante
propriété : si $\|\vec{v}\|$ constante alors $\|\vec{v}\|^2$ constante.
On peut alors écrire : $\frac{d\vec{v}^2}{dt}=0 \Rightarrow 2\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}=0=\vec{a}.\vec{v}$
Autrement dit : $\vec{a}\perp\vec{v}$. On dit que l'accélération est normale.
L' accélération est dirigée vers le centre de la trajectoire. On dit qu'elle est *centripète.*

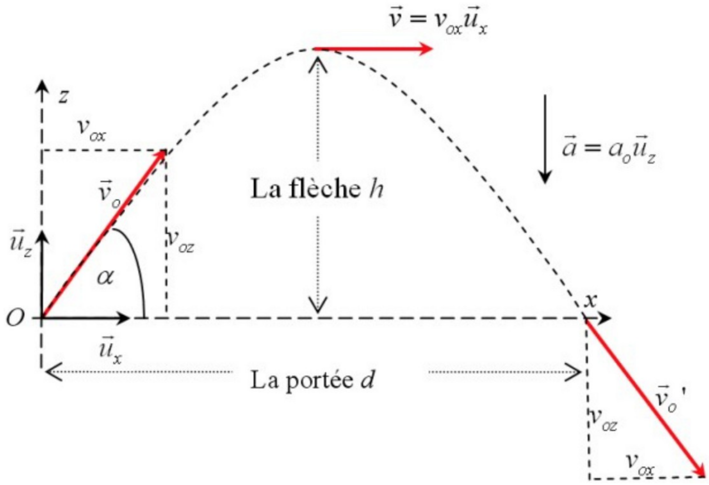
Ex1 : On considère un mobile initialement à l'origine du système de coordonnées faisant un angle α avec l'horizontale.
On suppose que le vecteur accélération est constant tel que : $\vec{a}=\vec{g}=-g\vec{u}_z$

Le mouvement s'effectue dans le plan xOz.



1) En partant du vecteur accélération, en tenant compte des conditions initiales, intégrer pour obtenir le vecteur vitesse
2) Intégrer de nouveau pour obtenir le vecteur position.
3) Enfin, connaissant les équations horaires x(t) et z(t), en déduire l'équation de la trajectoire z(x).
4) En déduire la portée d et en déduire avec quel angle il faut tirer un projectile pour l'envoyer le plus loin possible.(voir schéma ci-après)

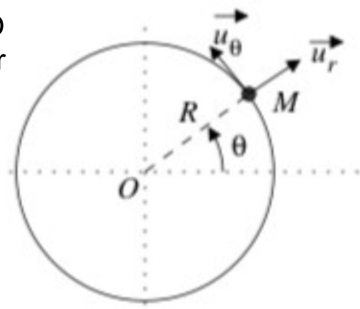
5) En déduire la flèche h .



2. Mouvement circulaire

Par définition, un mouvement est circulaire si la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle.

On considère un mobile assujetti à se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon R. Naturellement, le bon paramétrage consiste ici à utiliser les coordonnées polaires.



Vecteur position $\overrightarrow{OM}$ **:**

Vecteur vitesse $\vec{V}$ **:**

On définit ω la vitesse angulaire telle que : $\omega = \dot{\theta}$. Alors :

Vecteur vitesse $\vec{a}$ **:**

Cas du mouvement circulaire et uniforme :
La norme de vecteur vitesse $\|\vec{v}\| = ...$ est constante. Dans le cas du mouvement circulaire, on voit que cela implique $\omega = cte = \omega_0$.

Le vecteur accélération devient :

Remarques :
- La conservation de la norme du vecteur vitesse n'entraîne pas la nullité du vecteur accélération !
$\frac{dv}{dt} = 0 \neq \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. En effet, si la direction de $\vec{v}$ change, la dérivée de $\vec{v}$ n'est pas nulle !

- La vitesse est constante et vaut :
Ainsi, l'accélération normale est reliée à la courbure R de la trajectoire et la norme du vecteur vitesse comme suit :

Ex2 : *Mouvement d'une roue de VTT*
À un instant donné, la roue d'un VTT a un mouvement par rapport au référentiel lié au cadre, de vitesse angulaire ω constante. On considère deux points *M* et *N* d'un rayon de la roue situés respectivement à r_M et r_N de l'axe de rotation. La longueur d'un rayon de la roue est *R*.

1. Quel type de mouvement décrit la roue de vélo?

2. Écrire la relation entre la vitesse et la vitesse angulaire.

3. Exprimer la vitesse pour chacun des points. Les comparer.

4. On donne ω = 2,70 tr.s^{-1}, r_M = 10 cm, r_N=20cm et *R* = 30 cm. Répondre numériquement à la question précédente.

Ex3 : Manège

Un enfant se déplace sur un manège en rotation. Vue d'un hélicoptère, sa position est donnée par les coordonnées polaires $r(t) = v_0 t$ et $\theta(t) = \omega_0 t$, où v_0 et ω_0 sont des constantes.

1) Donner les unités de v_0 et ω_0 dans le système international.
2) Combien de degré de liberté possède l'enfant assimilé à un point M ?
3) Dessiner le manège et le repère associé.
4) Quelle est l'allure de la trajectoire ?
5) Exprimer la vitesse puis l'accélération de l'enfant en coordonnées polaires.
6) Quelle est l'équation de la trajectoire de l'enfant dans le référentiel du manège qui tourne à la vitesse angulaire ω_0?