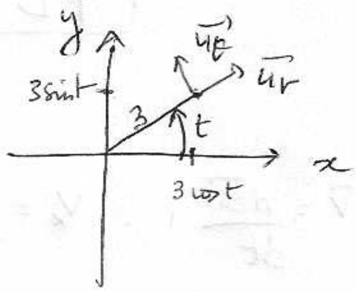
Ex 4

1) $\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \\ 3 \end{pmatrix}$

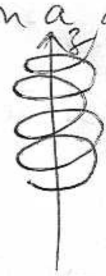


$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos t \\ -3\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2\cos^2 t + 3^2\sin^2 t} = 3 \times \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3$

$r = 3$

$\vec{OM} = r.\vec{u_r} + z\vec{u_z}$ avec $z \nearrow$ on a donc une trajectoire hélicoïdale



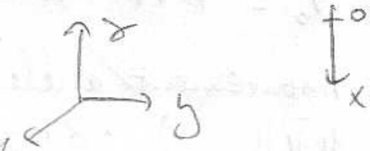
vue de côté.

vue de dessus

Ex 5 :

1) $x(t) = at^2 - bt + c$ $\quad y(t) = 2c$

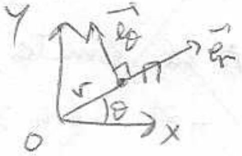
chute libre verticale



$\dot{x} = 2at - b$ $\quad \dot{y} = 0$

$\ddot{x} = 2a$

accélération uniforme
y et z cte → mvt rectiligne uniformément accéléré.



2) $r = 2c$ $\quad \theta = dt + e$ $\quad \vec{OM} = r\vec{u_r}$

$\dot{r} = 0$ $\quad \dot{\theta} = d$

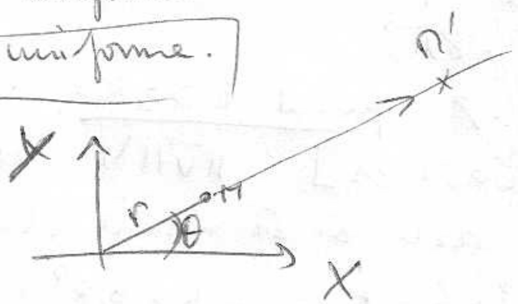
$\vec{V} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = 2c.d\,\vec{u_\theta}$

$\|\vec{V}\| = 2c.d$ uniforme

$\vec{a} = r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u_r}) = -r\dot{\theta}^2\vec{u_r} = -2cd^2\vec{u_r}$

$\|\vec{a}\| = cte$ accélération uniforme.

$r = cte \rightarrow$ circulaire uniforme.



mvt rectiligne

3) $r = bt + c$

$\theta = 2e = cte$

$\vec{OM} = r.\vec{u_r}$

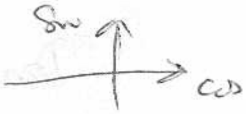
$\vec{V} = \dot{r}\vec{u_r} = b\,\vec{u_r}$

$\|\vec{V}\| = b$ mvt uniforme et rectiligne

Ex6 :

1) à $t=0$: $x(0) = R\sin(0) = 0$

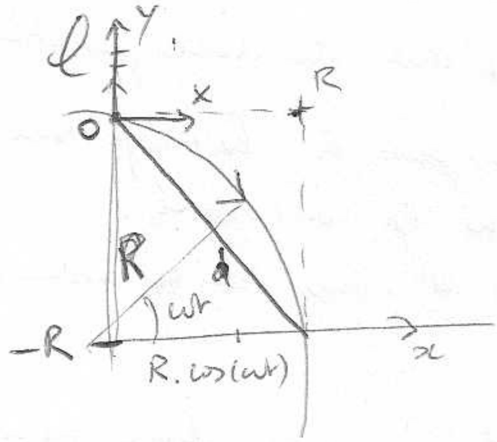
$y(0) = R(\cos(0) - 1) = 0$



2) $x = R = R\sin(\omega t)$ quand $\left| \begin{array}{l} \sin(\omega t) = 1 \\ \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \end{array} \right.$

Soit $t = \frac{\pi}{2\omega} = \ldots$

$y\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right) = R.\left(\cos\left(\cancel{\omega}.\frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) - 1\right) = R.(0-1) = -R$



$l = R \times \frac{\pi}{2}$

$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 + (-R)^2}$
$= \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}.R$

$d = \sqrt{2}R < R.\frac{\pi}{2} = l$

4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R.\omega.\cos(\omega t) \\ R.(-\omega\sin(\omega t)) \end{pmatrix}$

$= R\omega \left| \begin{array}{l} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{array} \right.$ $\|\vec{v}\| = R\omega\sqrt{\cos^2 + \sin^2} = R\omega$

5) $\|\vec{v}\| = R\omega = cte$

Mvt uniforme.

6) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\sin(\omega t) \\ -R\omega^2\cos(\omega t) \end{pmatrix} = -R\omega^2 \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$

7) ~~$\|\vec{a}\| = \pm R\omega^2$~~

$\vec{a}$ varie au cours du temps. $\|\vec{a}\| = \sqrt{R^2\omega^4(\sin^2(\omega t) + \cos^2\omega t)}$

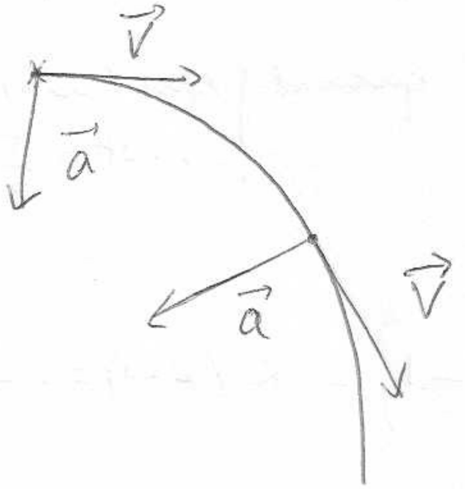
$\|\vec{a}\| = R\omega^2 = cte$

on voit que la norme est constante.

8) $\vec{v}.\vec{a} = R.\omega\cos(\omega t).(-R\omega^2\sin\omega t) + (-R\omega)\sin(\omega t).(-R\omega^2)\cos(\omega t)$
$= -R^2\omega^3\cos(\omega t).\sin(\omega t) + R^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$

Donc $\forall t$, $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$

on peut donc dire que $\vec{v} \perp \vec{a}$



$\|\vec{V}\| = cte$

$\|\vec{a}\| = \overrightarrow{cte}$

Les normes sont constants mais les vecteurs varient en direction et sens.

N°7

je m'intéresse qu'aux situations possibles

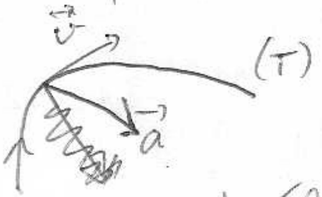
c'est à dire : $\vec{v}$ tangent à la trajectoire

$\vec{a}$ dans la concavité.

$\vec{v}$ dans le sens du mouvement.

→ pas (a) pas (b) pas (c)

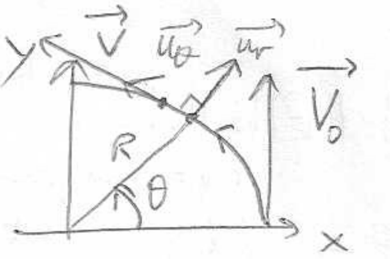
(d) ok



$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ donc accéléré

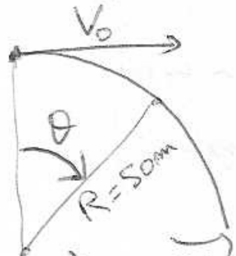
(e) ok $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ décéléré

pas (f) pas (g) pas (h).



~~N°8~~

N°9



$V_{MAX} = 130\,km/h = \underline{cte}$

$\|\vec{a}\|_{max} = 10\,m.s^{-2}$

$R = 50m$

1) $\vec{OM} = R.\vec{u_r}$ $\quad \vec{V} = R.\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ $\quad \vec{a} = \cancel{R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}} - R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\cancel{R\ddot{\theta}})^2 + (R\dot{\theta}^2)^2} = R\dot{\theta}^2 = \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = \frac{V^2}{R}$ $\quad \overset{\shortparallel}{0}$ car $R\dot{\theta} = cte$

$a = \frac{(130/3,6)^2}{50} = 26,1\,m/s^2 > 10\,m/s^2$

Donc trop dangereux.

N°9 2)

Si on freine : $\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}$

$\vec{V} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\|\vec{V}\| = R\dot{\theta} \searrow$ soit $\left|\begin{array}{l}\dot{\theta} \searrow \\ \ddot{\theta} < 0 \\ \ddot{\theta} \neq 0\end{array}\right.$

$\vec{a} = R.\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(R\ddot{\theta})^2 + R^2\dot{\theta}^4}$$

à comparer au cas où $\|\vec{V}\|$ est constante : $\|\vec{a}\| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^4} = R\dot{\theta}^2$

on voit que $\|\vec{a}\|_{\text{freine}} > \|\vec{a}\|_{\text{freine pas}}$. Donc c'est encore pire.

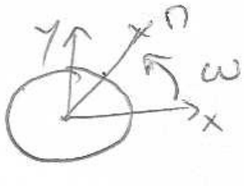
3) Si on suppose que $V = cte$: (pas de freinage)

Il faut $a_{MAX} = \dfrac{V_{MAX}^2}{R} = 10\ m.s^{-2}$

$$\Rightarrow V_{MAX}^2 = R.a_{MAX} \Rightarrow V_{MAX} = \sqrt{R.a_{MAX}}$$

A.N : $V_{MAX} = \sqrt{50 \times 10} = 22{,}4\ m/s = 80\ km/h$

Ex 10 :



$\omega = 33$ tours/min

1) $\omega = 33 \times \dfrac{2\pi}{60} = \boxed{3{,}45\ rad.s^{-1} = \omega}$

$T = \dfrac{60\,s}{33} = 1{,}82\,s \qquad f = \dfrac{33\text{ tours}}{60\,s} = 0{,}55\ Hz$

2) $\overrightarrow{OM} = R.\overrightarrow{u_r}$

$\vec{V} = R.\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$ = (vitesse tangentielle)

$V(R = 0{,}15\,m) = 0{,}15 \times 3{,}45 = 0{,}52\ m/s$

$\vec{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} = \vec{a}_{normale} + \underbrace{\vec{0}}_{\vec{a}_{tangentielle}} = \vec{a}_{totale}$

$a_n = -R\omega^2 = -0{,}15 \times 3{,}45^2$

$$\boxed{a_n = -1{,}78\ m/s^2}$$