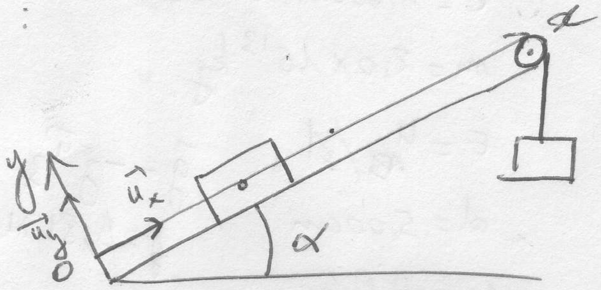
Ex1 :



$g = 9{,}81\ N.kg^{-1}$

$m = 10{,}0\ kg$

$\alpha = 20{,}0°$

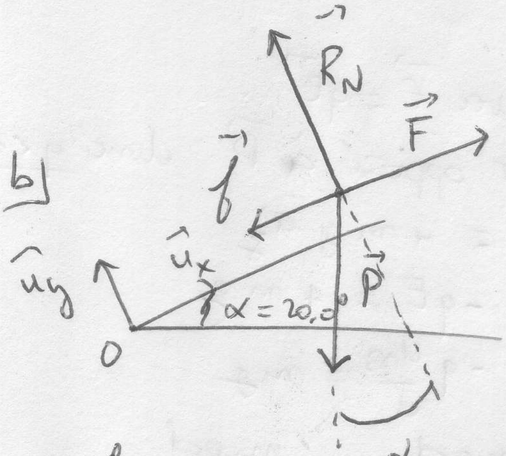
$\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x$ et $V_0 = 0{,}20\ m.s^{-1}$

réf : terrestre supposé galiléen

a) Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- frottements $\vec{f} = -f\vec{u}_x$
- tension $\vec{F} = F.\vec{u}_x$ et $F = 100\ N$
- réaction normale $\vec{R}_N = R_N.\vec{u}_y$

b)



c) Le mvt est rectiligne et uniforme. On peut utiliser la 1re loi de Newton :

Un objet en mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen est isolé ou pseudo isolé : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

ou 2e loi de Newton : $m\vec{a} = \Sigma\vec{F} = \vec{0}$ dans un référentiel galiléen.

Donc $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

Soit $\vec{P} + \vec{f} + \vec{F} + \vec{R}_N = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

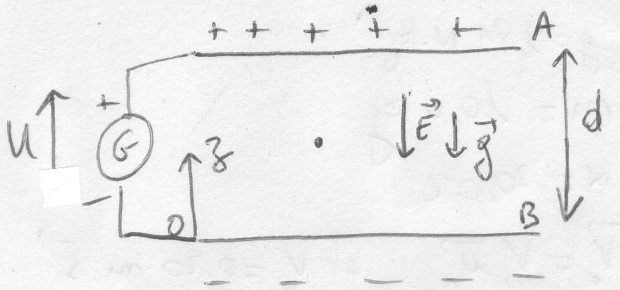
D'où $R_N = mg\cos\alpha = 10{,}0 \times 9{,}81 \times \cos(20{,}0) = 92{,}2\ N$

$P = mg = 10{,}0 \times 9{,}81 = 98{,}1\ N$

$F = 100\ N$

$f = F - mg\sin\theta = 100 - 10{,}0 \times 9{,}81 \times \sin(20{,}0) = 66{,}5\ N$

Ex2



$e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

$m = 2{,}0 \times 10^{-13}$ kg

$E = U_{AB}/d$ $\vec{g} = -g\vec{u}_z$

$d = 5{,}00$ cm $g = 9{,}81$ N/kg

1) Le référentiel est terrestre supposé galiléen.
Le système étudié est une goutte de masse m.

2) a) $\vec{P} = m\vec{g}$

b) 2e loi de Newton pour un mouvement rectiligne et uniforme : $\boxed{\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}}$

c) $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{F}$ avec $\vec{F} = q\vec{E}$

Il faut que $\vec{F}$ soit opposé à $\vec{P}$ donc $q<0$.

3) On a donc $q\vec{E} = -m\vec{g} = +mg\,\vec{u}_z$

En projetant selon l'axe (Oz) : $-qE = +mg$

$-q\dfrac{U_{AB}}{d} = mg$

On trouve bien $U_{AB} = \dfrac{mgd}{-q} = \dfrac{mgd}{|q|}$

Donc $|q| = \dfrac{mgd}{U_{AB}}$

Pour $U_{AB} = 153 \times 10^3$ V : $|q| = \dfrac{2{,}0 \times 10^{-13} \times 9{,}81 \times 5{,}00 \times 10^{-2}}{153 \times 10^3}$

$= 6{,}41 \times 10^{-19}$ C

$\boxed{|q| = 4{,}00 \times e}$

Pour $U_{AB} = 204$ kV

$|q| = 4{,}81 \times 10^{-19}$ C $= 3{,}00 \times e$

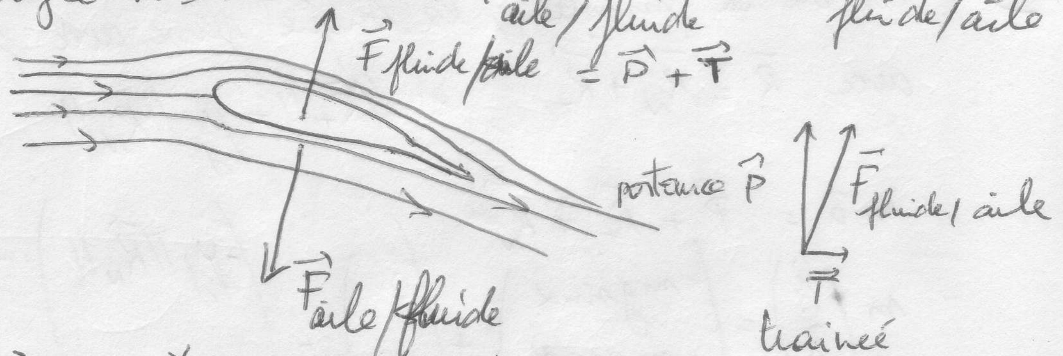
Pour $U_{AB} = 307$ kV : $|q| = 3{,}19 \times 10^{-19}$ C $= 1{,}99\,e$

Pour $U_{AB} = 613$ kV : $|q| = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C $= 1{,}00\,e$

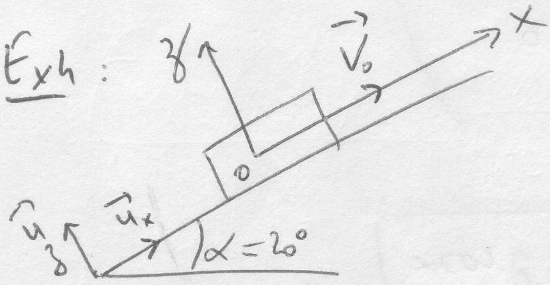
Les charges observées sont des multiples de la charge élémentaire e. Cette charge est indivisible, elle est appelée charge élémentaire.

Ex3 :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on s'intéresse au fluide qui circule autour de l'aile :
on voit que celui-ci est dévié vers le bas. Cela signifie qu'il subit une force dirigée vers le bas. Cette force est exercée par l'aile sur le fluide : $\vec{F}_{aile/fluide}$
D'après la 3ème loi de Newton, la force exercée par le fluide sur l'aile est opposée à $\vec{F}_{aile/fluide}$ et sera donc dirigée vers le haut : $\vec{F}_{aile/fluide} = -\vec{F}_{fluide/aile}$



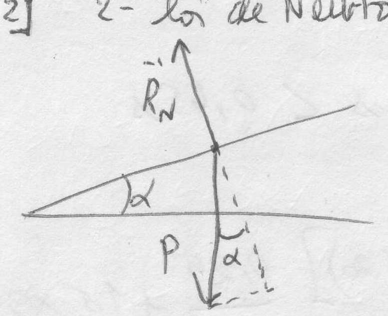
Ex4 :



$m = 0{,}600 kg$
$V_0 = 1{,}5 m.s^{-1}$
réf : terrestre supposé galiléen

1] La brique n'a aucune raison de s'enfoncer ni de décoller donc $z = cte = 0$ et $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$

2] 2ème loi de Newton : $\Sigma \vec{F} = \vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$



$$\begin{pmatrix} -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Puisque $\ddot{z} = 0 \Rightarrow R_N = mg\cos\alpha$

Et $\boxed{\ddot{x} = -g\sin\alpha}$

3] $V = \dot{x} = -g\sin\alpha \cdot t + V_0$

arret quand $V = 0 = -g \sin\alpha \cdot t + V_0$

$$\Rightarrow t_{\text{arrêt}} = \frac{V_0}{g \sin\alpha} \qquad \underline{\text{A.N}} \quad t_{\text{arrêt}} = \frac{1,5}{9,81 \sin 30} = 0,45\,s$$

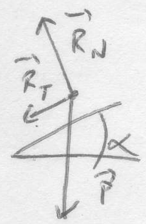
$$x = -g \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} + V_0 t$$

$$d_{\text{arrêt}} = -g \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{g \sin\alpha}\right)^2 + V_0 \frac{V_0}{g \sin\alpha}$$

$$d_{\text{arrêt}} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g \sin\alpha} \qquad \underline{\text{A.N.}} \quad d_{\text{arrêt}} = \frac{1,5^2}{2 \times 9,81 \sin(20)} = 0,33\,m = 33\,cm$$

<u>4)</u> Sans frottement, la brique redescend car $V_x < 0$.

<u>5)</u> Lors de la montée, la brique glisse avec frottement avec $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ et $\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$



$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-mg\sin\alpha\\ -mg\cos\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ R_N\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\mu_d \|\vec{R}_N\|\\ 0\end{pmatrix}$$

$\ddot{z} = 0 \Rightarrow R_N = mg\cos\alpha$ D'où :

$$\boxed{\ddot{x} = -g\sin\alpha - \mu_d g \cos\alpha}$$

<u>6)</u>

$$x(t) = (-g\sin\alpha - \mu_d g\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_0 t$$

$$v(t) = (-g\sin\alpha - \mu_d g\cos\alpha) \cdot t + V_0$$

$$t_{\text{arrêt}} = \frac{V_0}{g[\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha]} = 0,29\,s < 0,45\,s$$

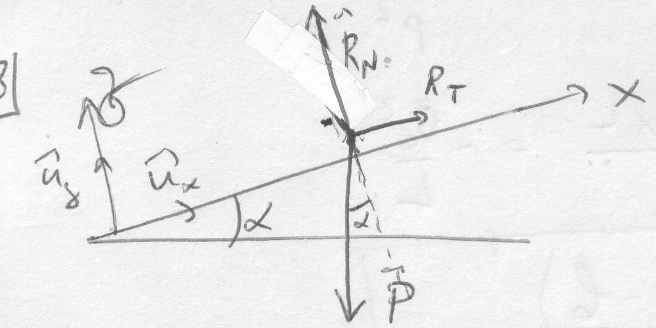
$$d_{\text{arrêt}} = [-9,81 \sin(20) - 0,20 \times 9,81 \cos(20)]\,\frac{0,29}{2} + 1,5 \times 0,29$$

$$= 0,22\,m = 22\,cm < 33\,cm$$

<u>7)</u> $\vec{R}_T$ s'oppose au mouvement : $\vec{R}_T = R_T \vec{u}_x$ (vers la droite)

p5

8]



$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ R_N\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}R_T\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-P\sin\alpha\\ -P\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{R_N = P\cos\alpha}$$

Tant que objet immobile : $\ddot{x} = 0$ alors $R_T - P\sin\alpha = 0$

soit $R_T = P\sin\alpha$

ceci est vrai tant que $R_T \leq \mu_s \|\vec{R_N}\| = \mu_s P\cos\alpha$

<u>A la limite du glissement</u> : $R_T = mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \mu_s\cos\alpha$$

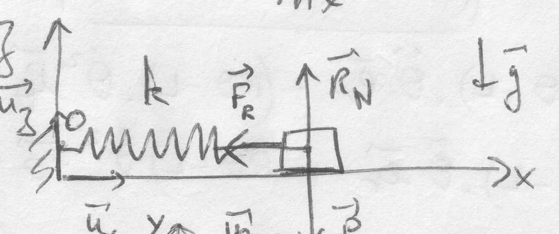
$$\Rightarrow \tan\alpha = \mu_s \Rightarrow \alpha_{MAX} = \arctan\mu_s$$

L'objet (la brique) reste immobile si $\alpha \leq \arctan(\mu_s)$

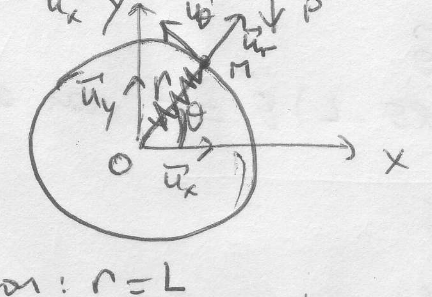
<u>A.N.</u> $\alpha_{MAX} = \arctan(0{,}3) = 0{,}29$ rad

$= 16{,}6° \simeq 17°$

Ex5 vue de côté



vue de dessous



$\vec{F}_R = -k(l - l_0)\vec{u}_x$

$\vec{OM} = r\vec{u}_r = L\vec{u}_r$

$\vec{V} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

1) rayon : $r = L$

$\vec{v}_0$ tangent au cercle : $\vec{v}_0$ selon $\vec{u}_\theta$

2] 2ᵉ loi de Newton (réf terrestre, galiléen) : $m\vec{a} = \underbrace{\vec{P} + \vec{R}_N}_{\text{selon } \vec{u}_z} + \underbrace{\vec{F}_R}_{\text{selon } \vec{u}_r}$

$\vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$ car $\vec{a}$ selon $\vec{u}_z$ est nulle (ne décolle pas)

$m\vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -k(L - l_0)\vec{u}_r$

Donc $L\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte \Rightarrow L\dot{\theta} = cte = V_0$ Mvt circulaire et uniforme.

3] $\vec{a} = -\frac{k}{m}(L - l_0)\vec{u}_r = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

D'où

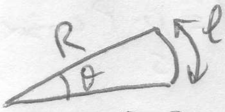
$$-\frac{k}{m}(L-l_0) = -\frac{L\dot{\theta}^2 \times L}{L} = -\frac{V_0^2}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{kL}{m}\underbrace{(L-l_0)}_{>0}}}$$

Ex 6 :

1] $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$

$\overrightarrow{OI} = R.\vec{e_r}$ et $\overrightarrow{IM} = \|\overrightarrow{IM}\|.\vec{e_\theta}$



$l = R.\theta$

La longueur du fil est L et la partie enroulée est l'arc de cercle de longueur $R\theta$

Donc $L = \|\overrightarrow{IM}\| + R\theta$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{IM}\| = L - R\theta$

D'où $\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e_r} + (L-R\theta).\vec{e_\theta}}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R\vec{e_r}) + (L - R\theta)\vec{e_\theta}\right]$$

$$= R.\dot{\theta}\vec{e_\theta} + (-R\dot{\theta})\vec{e_\theta} + (L-R\theta)(-\dot{\theta})\vec{e_r}$$

$$\vec{V} = -(L-R\theta)\dot{\theta}\vec{e_r} = \boxed{(R\theta - L)\dot{\theta}\vec{e_r} = \vec{V}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = R\dot{\theta}.\dot{\theta}\vec{e_r} + (R\theta-L).\ddot{\theta}\vec{e_r} + (R\theta-L).\dot{\theta}^2\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + (R\theta-L).\ddot{\theta}\vec{e_r} + (R\theta-L)\dot{\theta}^2\vec{e_\theta}$$

2) Bilan des forces : $\vec{T} = -T\vec{e_\theta}$

$m\vec{a} = -T\vec{e_\theta} \Longrightarrow R\dot{\theta}^2 + (R\theta - L)\ddot{\theta} = 0$ car $a_r = 0$

Or Vitesse radiale $V_r = (R\theta - L)\dot{\theta}$

$$\frac{dV_r}{dt} = R\dot{\theta}^2 + (R\theta - L)\ddot{\theta} = a_r = 0$$

La vitesse radiale est constante.

à $t=0$: $\boxed{V_r = -V_0 = (R\theta - L)\dot{\theta} = cte}$

3] On en déduit $R\theta.\dot{\theta} - L\dot{\theta} = -V_0$

on sait que $(u^2)' = 2u'u$ et $(u)' = u'$

Donc en intégrant on obtient $\frac{R}{2}\theta^2 - L\theta = -V_0 t$

Pour enrouler le fil, il faut $R \cdot \theta = L$

alors τ tel que $\theta = \frac{L}{R}$

on trouve donc : $\frac{R}{2}\left(\frac{L}{R}\right)^2 - L\left(\frac{L}{R}\right) = -v_0 \tau$

D'où $\frac{L^2}{2R} - \frac{L^2}{R} = -v_0 \tau$

$-\frac{1}{2}\frac{L^2}{R} = -v_0 \tau \Rightarrow \frac{L^2}{2R} = v_0 \tau$

soit $\boxed{\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}}$ $\sim \frac{m^2}{m \cdot m \cdot s^{-1}} \sim s$

si $L \nearrow$ $\tau \nearrow$
$R \nearrow$ $\tau \searrow$
$v_0 \nearrow$ $\tau \searrow$
ok.

4] On reprend l'équation sur θ établie en 3] :

$\frac{R}{2}\theta^2 - L\theta = -v_0 t$ soit $\boxed{\frac{R}{2}\theta^2 - L\theta + v_0 t = 0}$

éq° du 2d degré en θ.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-L)^2 - 4 \times \frac{R}{2} \times v_0 t$

$\boxed{\Delta = L^2 - 2Rv_0 t} \geqslant L^2 - 2Rv_0 \tau$
$\geqslant L^2 - 2Rv_0 \frac{L^2}{2Rv_0} = 0$

$\Delta \geqslant 0$

solutions : $\theta_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $\theta_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\theta_1 = \frac{+L - \sqrt{L^2 - 2Rv_0 t}}{R}$ ou $\theta_2 = \frac{+L + \sqrt{L^2 - 2Rv_0 t}}{R}$

Du fait que $\theta(t=0) = 0$ alors la bonne solution est $\theta = \theta_1$

et donc $\theta = \frac{L}{R}\left[1 - \frac{1}{L}\sqrt{\underbrace{L^2 - 2Rv_0 \times \frac{L^2}{L^2} t}_{L^2 \frac{t}{\tau}}}\right]$

D'où $\boxed{\theta = \frac{L}{R}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right]}$

5) Le fil n'est pas tendu si $T = 0$

Pour rester tendu il faut $T \neq 0$

$$m\vec{a} = -T\vec{e_\theta} \Rightarrow m\vec{a}\cdot\vec{e_\theta} = -T$$

$$\Rightarrow m(R\theta - L)\dot{\theta}^2 = -T$$

$T \neq 0$ si $R\theta - L \neq 0$ vrai <u>tant que $t < \tau$</u>

car alors $R\theta = L$

De plus il faut $\dot{\theta}^2 \neq 0$

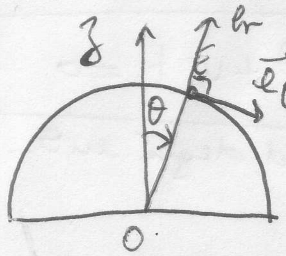
Or $\theta = \frac{L}{R}\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}\right]$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{R}\left[0 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-1/2} \times \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right] = +\frac{L}{2R}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}} \neq 0$$

Donc on a bien $T \neq 0$ quelque soit $t \in [0, \tau[$

Le fil reste donc tendu.

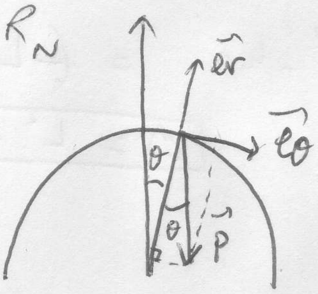
<u>Ex7</u> :



<u>Système</u> : enfant (point E) <u>Réf</u> : terrestre (galiléen)

1) on applique la 2e loi de Newton

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N}$$



$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -P\cos\theta \\ P\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{R_N} = \begin{pmatrix} R_N \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Repère polaire</u> : $\vec{OE} = R\,\vec{e_r}$

$\vec{V} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$

<u>On en déduit 2 équations</u>

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -P\cos\theta + R_N & (1) \\ mR\ddot{\theta} = P\sin\theta & (2) \end{cases}$$

(2) permet de déterminer θ car il n'y a que $\theta(t)$ comme inconnue

(1) contient R_N ce qui permettra de déterminer sa valeur.

2) $(2)\times\dot{\theta} \Rightarrow mR\dot{\theta}\ddot{\theta} = P\dot{\theta}\sin\theta = mg\,\dot{\theta}\sin\theta$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$\frac{d}{dt}(u^2) = 2\dot{u}u$

$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = \dot{\theta}(-\sin\theta)$

En intégrant : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\cos\theta = K$

Or $V_0 = 0 = R\dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = 0$

de plus $\cos\theta_0 = 1$ car $\theta_0 = 0$

Donc $\frac{g}{R} = K$

Finalement : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\cos\theta = \frac{g}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}(1-\cos\theta)}$$

CQFD

3) $R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$

$= mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$

$= mg\cos\theta - m2g(1-\cos\theta)$

$$\boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4) L'enfant décolle si $R_N = 0$

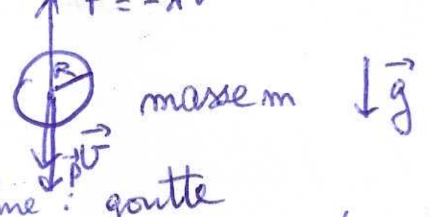
Soit $R_N = mg(3\cos\theta - 2) = 0$

c'est le cas si $3\cos\theta = 2$

$\theta = \arccos\frac{2}{3} = \boxed{48° = \theta}$

Donc l'enfant décolle pour $\theta = 48°$.

Ex8



1) système : goutte

réf : terrestre supposé galiléen.

forces : $\vec{P}$ et $\vec{F}$

2^e loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$

$$\Rightarrow \boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda\vec{v} = m\vec{g}}$$

2] D'après l'équation différentielle p10 établie précédemment, on voit que $\vec{v} \to \vec{v}_{lim}$ avec $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{lim} = 0$, on a : $\lambda \vec{v}_{lim} = m\vec{g}$

alors $\boxed{\vec{v}_{lim} = \frac{m}{\lambda}\vec{g}}$ indépendant de $\vec{v}_0$.

3] En tenant compte de la poussée d'Archimède : les forces à prendre en compte sont au nombre de 3 :

- poussée d'Archimède $\vec{f} = -M\vec{g} = -\rho_{air} V_{goutte} \vec{g}$
- frottement $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$
- poids $\vec{P} = m\vec{g}$ avec $V_{goutte} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$= \rho_{eau} \times V_{goutte} \times \vec{g}$

2e loi de Newton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda\vec{v} + \rho_{eau} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - \rho_{air}\frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}$$

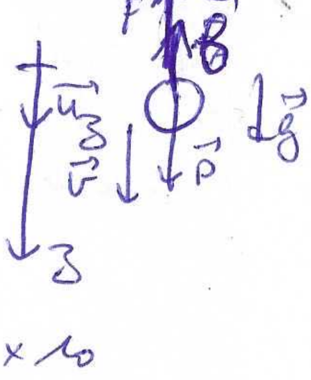
D'où $\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda\vec{v} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{eau} - \rho_{air})\vec{g}}$

La nouvelle vitesse limite atteinte est telle que :

$$\lambda \vec{v}_{lim} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_{eau} - \rho_{air})\vec{g} = (m - M)\vec{g}$$

Soit $\boxed{\vec{v}_{lim} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{\lambda}(\rho_{eau} - \rho_{air})\vec{g}} = \frac{m - M}{\lambda}\vec{g}$

4/ A.N. $\vec{v}_{lim} = v_{lim} \cdot \vec{u}_z$



$$v_{lim} = \frac{4}{3}\cdot\pi\frac{R^3}{\lambda}(\rho_{eau} - \rho_{air})g$$

$$= \frac{4}{3}\pi\frac{(0,5\times10^{-3})^3}{1,81\times10^{-5}} \times (10^3 - 1,3\times10^{-3}\times10^3)\times10$$

$$= 0,3\ m.s^{-1}$$

Rq : l'énoncé est peu cohérent sur les chiffres significatifs.