

## Corrigé du DS n°5 de PHYSIQUE-CHIMIE

### 1<sup>er</sup> Problème : La balance capacitive (extrait d'une épreuve de spécialité Term 2022)

#### I.A) Domaine d'utilisation de la balance

Q1 : D'après la formule de la capacité d'un condensateur plan, avec l'air comme isolant :

$$C_0 = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times 1,0 \times (3,0 \cdot 10^{-2} \times 4,0 \cdot 10^{-2})}{1,0 \cdot 10^{-2}} = \underline{1,1 \cdot 10^{-12} \text{ F}}$$

On obtient donc une assez faible valeur de capacité (de l'ordre du pF), qui reste relativement classique.

Q2 : Lorsque l'on place une masse sur le plateau, la distance  $e$  entre les armatures diminue, et donc la **capacité  $C$  du condensateur augmente**.

Q3 : À l'**équilibre** (dans le référentiel terrestre local supposé galiléen), la force exercée par le plateau sur la masse **compense son poids**, ce qui se traduit par la relation, **en norme** :

$$P = M g = F = k(D_0 - D) \text{ soit : } M = \frac{k}{g}(D_0 - D)$$

Q4 : La distance minimale pour  $D$  correspond au moment où l'armature supérieure vient en butée sur l'armature inférieure. On a alors :  $M_{\max} = \frac{k}{g}(D_0 - D_{\min}) = \frac{k}{g}(e_0 - e_{\min})$  soit  $M_{\max} = \frac{k}{g}(e_0 - h)$

A.N. :  $M_{\max} = \frac{98 \cdot 10^1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}} \times (1,0 \cdot 10^{-2} - 0,5 \cdot 10^{-3}) \text{ m} = \underline{0,95 \text{ kg}}$

#### I.B) Mesure de la masse à peser

Q5 : D'après la loi des mailles :  $E = u_C + u_R$ . D'après la loi d'Ohm en convention récepteur,  $u_R = R i$ .

Et puisque le condensateur est décrit en convention récepteur, alors :  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C(t)$  :  $E = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$

Q6 : Les solutions de cette équation différentielle d'ordre 1 à coefficients et second membre constants sont de la forme (pour  $t > 0$ ) :  $u_C(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur :  $u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = 0$  puisque le condensateur est initialement déchargé. On en déduit :  $u_C(t=0) = A \exp(0) + E = 0 \Leftrightarrow A = -E$ .

Et donc :  $u_C(t) = E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

Q7 : Il faut brancher un **oscilloscope en parallèle** du condensateur, avec la masse de l'oscilloscope branchée sur celle de la source.

Q8 : La valeur de la f.é.m.  $E$  est la **valeur asymptotique** de la tension aux bornes du condensateur, obtenue une fois la charge du condensateur « complète ». D'après le **graphique**, cette valeur asymptotique (atteinte dans le cas de  $M_1$  mais pas dans le cas de  $M_2$ ) est égale à :  $E = 5,0 \text{ V}$

Les valeurs de  $C_1$  et de  $C_2$  sont déterminées à partir de la détermination des temps caractéristiques  $\tau_1 = RC_1$  et  $\tau_2 = RC_2$ , eux-mêmes estimés à partir de l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote, ou, **plus précisément** par la détermination de l'abscisse pour laquelle la tension  $u_C$  est égale à  $(1 - e^{-1}) E = 63 \% E = 3,2 \text{ V}$ .

On mesure ainsi graphiquement :  $\tau_1 = 15 \mu\text{s}$  et  $\tau_2 = 42 \mu\text{s}$ .

On en déduit :  $C_1 = \frac{\tau_1}{R}$  A.N. :  $C_1 = \frac{15 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ F}$

$C_2 = \frac{\tau_2}{R}$  A.N. :  $C_2 = \frac{42 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^6} = 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ F}$

**Q9** : On a vu à la question **Q3** que :  $M = \frac{k}{g}(D_0 - D) = \frac{k}{g}(e_0 - e)$ .

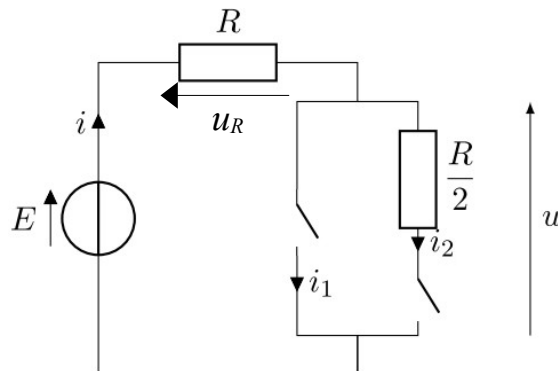
Et d'après la formule de la capacité d'un condensateur plan :  $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e} \Leftrightarrow e = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{C}$ .

On en déduit la relation :  $M = \frac{k}{g} \left( e_0 - \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{C} \right)$  et on constate que **la masse varie de manière affine avec l'inverse de la capacité** ( $k, g, e_0, \epsilon_0, \epsilon_r$  et  $S$  sont des constantes). Il est donc possible d'établir une droite d'étalonnage.

**Q10** : Par lecture graphique, on constate que la masse correspondant à la capacité  $C_2 = 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ F}$  donc à l'inverse de capacité  $1/C_2 = 2,4 \cdot 10^{11} \text{ F}^{-1}$  est :  $M_2 = 0,73 \text{ kg} < M_{\text{max}}$  !

## 2<sup>ème</sup> Problème : Changement de régime d'un condensateur

**Q11** : Pour les instants  $t < 0$ , le condensateur se comporte en régime permanent (ou stationnaire) comme un coupe-circuit, et le circuit est donc équivalent à :



**Q12** : Pour  $t < 0$ , c'est-à-dire quand le régime permanent est atteint avant la fermeture de l'interrupteur, les valeurs de  $i_1$  et  $i_2$ , puis  $i$ , et enfin  $u$ . Puisque les interrupteurs sont ouverts pour  $t < 0$ , on en déduit que :

$i_1(t < 0) = 0$  et  $i_2(t < 0) = 0$ . Ainsi, d'après la **loi des nœuds** :  $i(t < 0) = i_1(t < 0) + i_2(t < 0) = 0$ .

Puis, grâce à l'**additivité des tensions** :  $u = E - u_R$ , et d'après la **loi d'Ohm** :  $u_R = R i$

Ainsi :  $u(t < 0) = E$

**Q13** : À l'instant  $t = 0^+$  (juste après la fermeture de l'interrupteur), par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur** :  $u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = E$ .

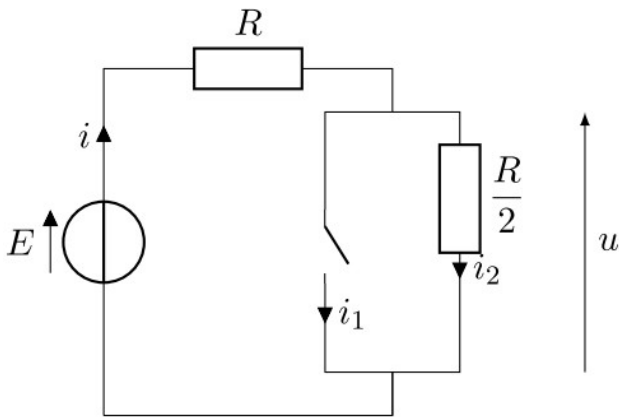
L'additivité des tensions permet d'écrire :  $u(t = 0^+) = E - u_R(t = 0^+)$ , d'où  $u_R(t = 0^+) = 0$  et donc, par la loi d'Ohm appliquée au résistor de résistance  $R$  :  $i(t = 0^+) = 0$

La loi d'Ohm appliquée au résistor de résistance  $R/2$  permet par ailleurs de déterminer :

$$i_2(t = 0^+) = \frac{u(t = 0^+)}{R/2} = \frac{2E}{R}$$

Et enfin, la loi des nœuds permet de prouver que : 
$$i_1(t=0^+) = i(t=0^+) - i_2(t=0^+) = -\frac{2E}{R}$$

**Q14 :** Au bout d'un temps très long après la fermeture de l'interrupteur, on parvient à un nouveau régime permanent (ou stationnaire) pour lequel le circuit est équivalent à :



On en déduit que : 
$$i_2(t \rightarrow \infty) = 0$$

Grâce à la **loi des ponts diviseurs de tension** :

$$u(t \rightarrow \infty) = \frac{R/2}{R + R/2} E \Leftrightarrow u(t \rightarrow \infty) = \frac{E}{3}$$

La loi d'Ohm donne alors :

$$i_2(t \rightarrow \infty) = \frac{E/3}{R/2} = \frac{3E}{2R}$$

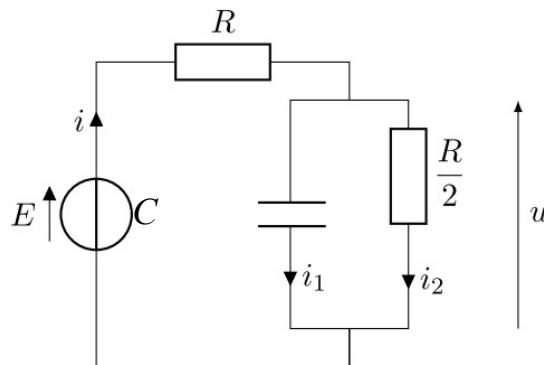
Et la loi des nœuds donne :

$$i(t \rightarrow \infty) = i_2(t \rightarrow \infty) = \frac{3E}{2R}$$

**Q15 :** Grâce aux études asymptotiques réalisées dans les questions précédentes, on peut affirmer que :

- la courbe 1 correspond à l'évolution temporelle de  $i(t)$
- la courbe 2 correspond à l'évolution temporelle de  $i_2(t)$
- la courbe 3 correspond à l'évolution temporelle de  $i_1(t)$

**Q16 :** Pour  $t > 0$ , le circuit est équivalent à :



Les lois de l'électricité permettent d'écrire :

• Loi des mailles (+ Ohm) :  $u = E - R i \Leftrightarrow i = \frac{E - u}{R}$

• Loi du condensateur :  $i_1 = C \frac{du}{dt}$

• Loi d'Ohm :  $i_2 = \frac{u}{R/2} = \frac{2u}{R}$

• Loi des nœuds :  $i = i_1 + i_2 \Leftrightarrow \frac{E - u}{R} = C \frac{du}{dt} + \frac{2u}{R} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{3}{RC} u = \frac{E}{RC}$

**Q17 :** Par analyse dimensionnelle, on en déduit l'expression du temps caractéristique d'évolution des grandeurs électriques du circuit pour  $t > 0$  : 
$$\tau = \frac{RC}{3}$$

**Q18 :** L'ensemble des solutions de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients et second

membre constants ont pour expression :  $u(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{3}$  avec  $A$  une constante.

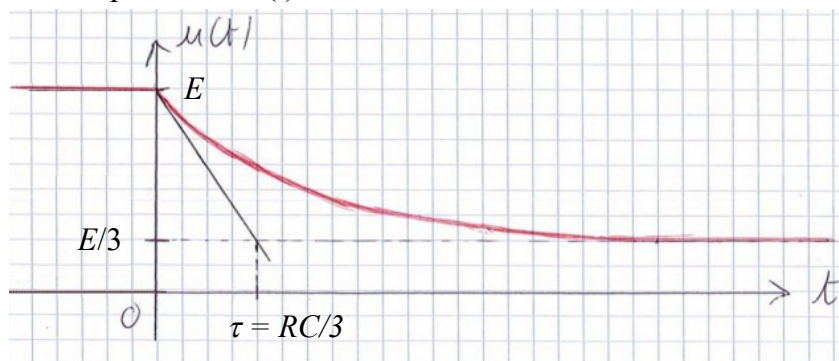
**N.B.** : la solution particulière de l'E.D. correspond bien à la valeur asymptotique :  $u(t \rightarrow \infty) = \frac{E}{3}$ .

La condition initiale permet de trouver la valeur de la constante  $A$  :

$$u(t=0^+) = A \exp(0) + \frac{E}{3} = E \Leftrightarrow A = \frac{2E}{3}$$

D'où l'expression :  $u(t) = \frac{E}{3} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

**Q19** : Allure de la courbe représentant  $u(t)$  :



**Q20** : À partir des expressions de la question **Q16** :

$$i_2(t) = \frac{2u(t)}{R} = \frac{2E}{3R} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] ; i_1(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -\frac{2CE}{3\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{2E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et donc :  $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{2E}{3R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

**N.B.** : on retrouve bien les valeurs asymptotiques déterminées en **Q13** et **Q14** !

**Q20.** L'énergie initialement stockée dans le condensateur vaut :  $\mathcal{E}_C(t=0) = \frac{1}{2} C [u(t=0)]^2 = \frac{1}{2} C E^2$

L'énergie stockée dans le condensateur une fois le nouveau régime permanent atteint vaut :

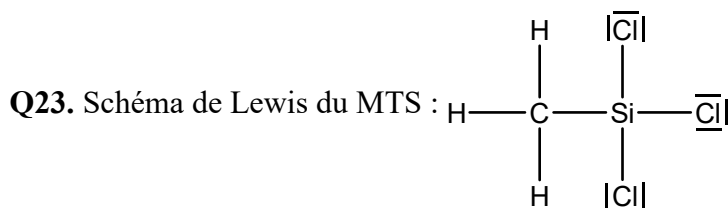
$$\mathcal{E}_C(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} C [u(t \rightarrow \infty)]^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{E}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} C E^2 < \mathcal{E}_C(t=0) : \text{le condensateur a donc perdu de}$$

l'énergie, qu'il a nécessairement fourni au reste du circuit électrique.

**Q21.** L'énergie fournie par le condensateur au reste du circuit au cours du régime transitoire vaut donc :

$$\mathcal{E}_{fournie} = \mathcal{E}_C(t=0) - \mathcal{E}_C(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} C E^2 - \frac{1}{18} C E^2 \text{ soit : } \mathcal{E}_{fournie} = \frac{4}{9} C E^2$$

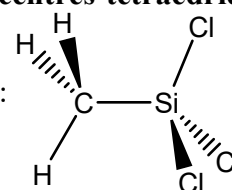
### 3<sup>ème</sup> Problème : Formation de carbure de silicium par CVD (≈ 1h)



L'élément silicium se trouvant dans la même colonne du tableau périodique que l'élément carbone, il possède le même nombre d'électrons de valence : 4. L'élément chlore est un halogène qui possède 7 électrons de valence. La structure présente donc  $N_{v,tot} = 3+4 \times 2 + 7 \times 3 = 32$  électrons de valence en tout.

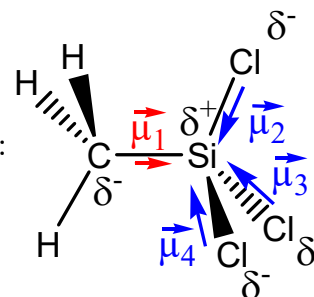
Q24. La structure présente deux atomes centraux : le carbone et le silicium, chacun d'eux possédant 4 centres répulsifs = 4 liaisons covalentes autour d'eux. Il s'agit donc de deux centres tétraédriques, et

les angles de liaisons valent tous 109,5°. On peut ainsi représenter la molécule :



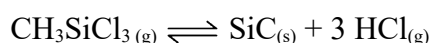
Q25. Les atomes de carbone et d'hydrogène ont quasiment la même électronégativité. Puisque les atomes de chlore sont beaucoup plus électronégatifs que l'atome de carbone, lui-même légèrement plus électronégatif que l'atome de silicium, on en déduit que les quatre moments dipolaires des liaisons

polarisées ne se compensent pas, comme l'illustre le schéma ci-contre :



$\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3 + \vec{\mu}_4 \neq \vec{0}$  donc le MTS est donc une molécule légèrement polaire.

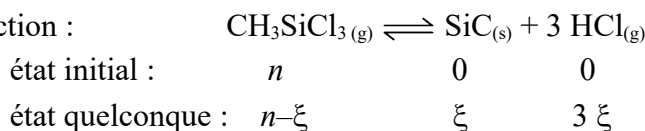
L'équation de la réaction globale s'écrit :



Q26. Expression du quotient réactionnel de la réaction :

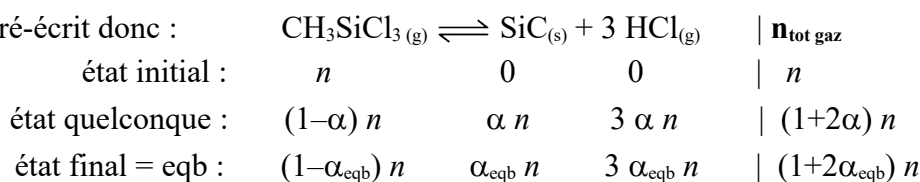
$$Q_r = \frac{1 \times \left(\frac{P_{\text{HCl}}}{P^\circ}\right)^3}{\frac{P_{\text{MTS}}}{P^\circ}} = \frac{(P_{\text{HCl}})^3}{P_{\text{MTS}} (P^\circ)^2}$$

Q27. Tableau d'avancement de la réaction :



Q28. Par définition du taux de décomposition du MTS :  $\alpha = \frac{\xi_{\text{eqb}}}{n} \Leftrightarrow \xi_{\text{eqb}} = \alpha n$ .

Le tableau d'avancement se ré-écrit donc :



**Q29.** D'après la loi de l'équilibre :

$$K^\circ = Q_{r,eqb} = \left( \frac{x_{HCl}}{x_{MTS}} \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^2 \right)_{eqb} = \left( \frac{n_{HCl}^3}{n_{MTS} (n_{tot,gaz})^2} \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^2 \right)_{eqb} = \frac{(3\alpha_{eqb}n)^3}{(1-\alpha_{eqb})n \times [(1+2\alpha_{eqb})n]^2} \times \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^2$$

On obtient donc, après simplification :

$$K^\circ = \frac{27 (\alpha_{eqb})^3}{(1-\alpha_{eqb})(1+2\alpha_{eqb})^2} \times \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^2$$

La **résolution numérique** (à la calculatrice) de cette équation mène, pour  $P=P^\circ$  et  $K^\circ=10$  à :

$$\alpha_{eqb} = 0,80 = 80 \%$$

**Q30.** Augmenter la pression du récipient sans faire varier la température, donc la valeur de  $K^\circ$ , va avoir comme effet de diminuer le rapport  $\left( \frac{x_{HCl}}{x_{MTS}} \right)_{eqb}$  donc d'abaisser le rendement de la synthèse de SiC.

C'est la raison pour laquelle la transformation a lieu dans les conditions réelles « sous pression réduite » comme l'indique l'énoncé.

**Q31.** Le temps de demi-réaction est le temps nécessaire pour que la concentration en MTS soit divisée par deux depuis l'instant initial. On relève donc graphiquement que :

Pour  $n = 0,30$  mol et  $[MTS]_0 = 0,30$  mol.L<sup>-1</sup> (le récipient a donc un volume de 1 L...) :  $t_{1/2} = 21$  min.

Pour  $n = 0,20$  mol et  $[MTS]_0 = 0,20$  mol.L<sup>-1</sup> :  $t_{1/2} = 21$  min.

Pour  $n = 0,10$  mol et  $[MTS]_0 = 0,10$  mol.L<sup>-1</sup> :  $t_{1/2} = 21$  min.

On constate que le temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  ne dépend pas de la concentration initiale en réactif, ce qui permet d'affirmer que **l'ordre relatif au MTS vaut 1**.

**Q32.** La loi de vitesse s'écrit :  $v = k [MTS]$ , et par définition de la vitesse de réaction :  $v = - \frac{d[MTS]}{dt}$

L'équation différentielle vérifiée par la concentration en MTS est donc :

$$\frac{d[MTS]}{dt} + k [MTS] = 0$$

**Q33.** On en déduit, par intégration et prise en compte de la condition initiale :

$$[MTS](t) = [MTS]_0 \exp(-k t)$$

**Q34.** Le temps de trois-quarts de réaction est défini tel que :

$$[MTS](t_{3/4}) = \frac{[MTS]_0}{4} = [MTS]_0 \exp(-k t_{3/4}) \Leftrightarrow t_{3/4} = \frac{\ln 4}{k} \text{ soit } t_{3/4} = 2 \frac{\ln 2}{k}$$

**Q35.** Le temps de demi réaction est défini tel que :

$$[MTS](t_{1/2}) = \frac{[MTS]_0}{2} = [MTS]_0 \exp(-k t_{1/2}) \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

**N.B. :** On vérifie bien que  $t_{1/2}$  ne dépend pas de la concentration initiale !

On en déduit que pour un ordre 1 :

$$\frac{t_{3/4}}{t_{1/2}} = 2$$

Pour les expériences envisagées, on constate que quelle que soit la concentration initiale :  $t_{3/4} = 42$  min, ce qui permet donc de valider la théorie.

**Q36.** Diminuer le temps de demi-réaction d'un facteur 20 revient à augmenter la constante de vitesse d'un facteur 20 (pour un ordre 1). L'application de la loi d'Arrhénius à chacune des deux températures donne :

$$k(T_2) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_2}\right) \text{ et } k(T_3) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_3}\right).$$

On en déduit que :  $\frac{k(T_3)}{k(T_2)} = \exp\left(\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right)\right) \Leftrightarrow E_a = R \frac{\ln\left(\frac{k(T_3)}{k(T_2)}\right)}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}}$

A.N. :  $E_a = \frac{8,31 \times \ln 20}{\frac{1}{1200} - \frac{1}{1300}} = 3,9 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$

#### 4<sup>ème</sup> Problème : Traitements d'une eau contenant du fer

**Q37 :** Compte tenu de la stœchiométrie de la réaction et de sa constante d'équilibre, on doit introduire au minimum  $n(O_2)_{\min} = \frac{n(Fe^{2+})_{\text{initialement présent}}}{4}$  pour consommer quantitativement tous les ions Fe(II) en

solution. Soit, en divisant par le volume de solution :  $c_m(O_2)_{\min} = \frac{c(Fe^{2+})}{4} \cdot M(O_2)$

A.N. :  $c_m(O_2)_{\min} = \frac{4,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 2 \times 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{4} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$

Puisque la solubilité du dioxygène dans l'eau est  $s(O_2) = 8,28 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \gg c_m(O_2)_{\min}$ , la valeur nécessaire est **largement dépassée** en saturant l'eau en dioxygène, et l'opération est parfaitement **efficace**.

**Q38 :** Dans les conditions de l'expérience,  $[HO^-] = \text{cste}$  (solution tampon) et  $P(O_2) = \text{cste}$  (pression atmosphérique). On se place donc dans des conditions de **dégénérescence de l'ordre** et :

$$v = k_{app} \cdot [Fe^{2+}]^a \text{ avec } k_{app} = k \cdot [HO^-]^b \cdot (P(O_2))^c$$

D'autre part, compte tenu de la stœchiométrie :  $v = -\frac{1}{4} \cdot \frac{d[Fe^{2+}]}{dt}$

Si on suppose que l'ordre partiel par rapport à l'ion Fe(II) est  $a=1$ , l'intégration de la loi de vitesse mène

à la relation :  $[Fe^{2+}] = [Fe^{2+}]_0 \exp^{-4 \cdot k_{app} \cdot t}$  et donc à la relation :  $\ln\left(\frac{[Fe^{2+}]}{[Fe^{2+}]_0}\right) = -4 \cdot k_{app} \cdot t$

On constate sur la figure 1 que le tracé de la fonction  $\ln\left(\frac{[Fe^{2+}]}{[Fe^{2+}]_0}\right) = f(t)$  mène à des points **sensiblement**

**alignés, aléatoirement répartis** de part et d'autre de la droite de régression, avec un coefficient de détermination  $R^2$  suffisamment proche de 1 pour valider l'ordre  $a=1$ .

**Q39 :** D'après l'étude faite à la question précédente, la constante de vitesse apparente de la réaction est directement reliée à la pente  $p$  de la droite modèle par la relation :  $p = -4 \cdot k_{app}$ .

Le cas de la transformation la plus rapide correspond à la pente la plus raide, obtenue pour  $pOH = 6,21$ .

On a alors :  $k_{app} = \frac{0,564}{4} = 0,141 \text{ min}^{-1}$

**Q40 :** Dans le tableau 1, les six premières colonnes correspondent toutes à la même pression partielle en dioxygène,  $P(O_2) = 0,209$  bar, et les six dernières à la même concentration en ion hydroxyde,  $[HO^-] = 10,00 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$  (soit  $pOH = -\log(10,00 \cdot 10^{-8}) = 7,00$ ).

- Pour les 6 premières colonnes :

$$\ln(k_{app}) = \ln(k \cdot (P(O_2))^c) + b \cdot \ln[HO^-]$$

On trace la courbe  $\ln(k_{app}) = f(\ln[HO^-])$ , que l'on peut modéliser par une droite de pente :

$$\boxed{b=2} \quad (R^2 = 0,9996)$$

**Remarque :** il est inutile de convertir la pente en valeur de  $k_{app}$ , tout comme il est inutile de prendre en compte les facteurs multiplicatifs puisque  $\ln(axb) = \ln(a) + \ln(b)$  (à méditer chez vous... ) !

- Pour les 6 dernières colonnes :

$$\ln(k_{app}) = \ln(k \cdot [HO^-]^b) + c \cdot \ln[P(O_2)]$$

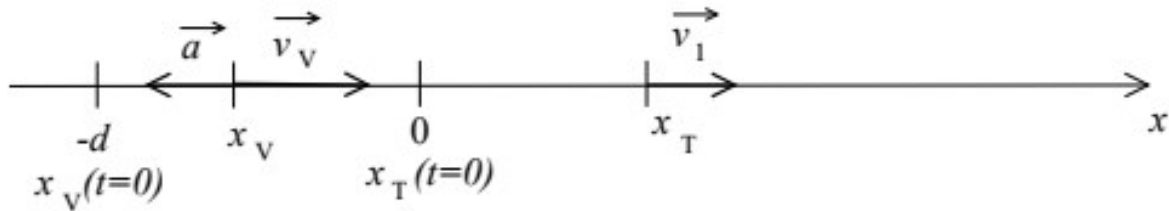
On trace la courbe  $\ln(k_{app}) = f(\ln[P(O_2)])$ , que l'on peut modéliser par une droite de pente :

$$\boxed{c=1} \quad (R^2 = 0,998)$$

**Q41 :** Une moyenne de toutes les valeurs numériques de  $k = \frac{k_{app}}{[HO^-]^2 \cdot P(O_2)}$  donne : **à faire !**

## 5<sup>ème</sup> Problème : Freinage d'urgence

**Q42 :** Le repère (cartésien à 1D) est imposé par l'énoncé. Le référentiel d'étude est celui de la route.



Les vecteurs positions sont :  $\vec{OV}(t) = x_V(t) \vec{u}_x$  et  $\vec{OT}(t) = x_T(t) \vec{u}_x$

Les vecteurs vitesses sont :  $\vec{v}_V(t) = \dot{x}_V(t) \vec{u}_x$  et  $\vec{v}_T(t) = \dot{x}_T \vec{u}_x = v_1 \vec{u}_x = \vec{cste}$

Les vecteurs accélérations sont :  $\vec{a}_V(t) = \ddot{x}_V(t) \vec{u}_x = -a \vec{u}_x = \vec{cste}$  et  $\vec{a}_T(t) = \vec{0}$

**Mouvement du tracteur :** (le plus simple, puisqu'il a un MRU à partir de l'abscisse  $x=0$ ...)

En intégrant  $\dot{x}_T = v_1$ , on obtient :  $x_T(t) = v_1 t + cste$ . Ainsi, d'après la condition initiale sur la position du tracteur ( $x_T(t=0) = 0$ ), on a :  $x_T(t) = v_1 t$

**Q43 : Mouvement de la voiture :**

En intégrant  $\ddot{x}_V(t) = -a$ , on obtient :  $\dot{x}_V(t) = -a t + cste$ . Ainsi, d'après la condition initiale sur la vitesse de la voiture ( $\dot{x}_V(t=0) = v_0$ ), on a :  $\dot{x}_V(t) = -a t + v_0$

En intégrant à nouveau, on obtient :  $x_V(t) = -\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + cste$ . Et grâce à la condition initiale sur la

position de la voiture ( $x_V(t=0) = -d$ ), on en déduit :  $x_V(t) = -\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t - d$ .

**Q44 :** On souhaite que la voiture reste toujours derrière le tracteur (une fois à la vitesse du tracteur, elle cessera son freinage...). Ainsi on veut que, pour toute valeur de  $t$  :  $x_V(t) < x_T(t)$

Pour la valeur limite de l'accélération,  $a_{min}$ , la voiture vient tout juste se coller au pare-choc du tracteur, on a alors une unique racine  $\tau$  de l'équation  $-\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t - d = v_1 t \Leftrightarrow -\frac{1}{2} a t^2 + (v_0 - v_1) t - d = 0$

Il faut donc que le discriminant de ce polynôme soit nul :  $\Delta = (v_0 - v_1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} a_{min} \times (-d) = 0$

D'où :  $a_{min} = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2d}$

**Q45 : A.N. :**  $a_{min} = \frac{(80 - 40)^2}{2 \times 0,100} = 8,0 \cdot 10^3 \text{ km.h}^{-2}$ , ce qui fait  $0,61 \text{ m.s}^{-2}$ , soit 6% de « g » : ça reste très supportable !

**Q46 :** On recherche la fameuse racine double de l'équation du second degré :  $\tau = \frac{-(v_0 - v_1)}{2 \times \frac{-a_{min}}{2}} = \frac{2d}{v_0 - v_1}$

A.N. :  $\tau = \frac{2 \times 0,100}{80 - 40} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ h} = 18 \text{ s}$

**Q47 :** Pendant la durée  $\tau$ , le tracteur a avancé de  $v_1 \tau$ . Ainsi, la distance totale parcourue par la voiture est :

$$D = d + v_1 \tau$$

A.N. :  $D = 0,100 \text{ km} + (40 \text{ km/h}) \times (0,0050 \text{ h}) = 0,30 \text{ km}$

**Q48 : Lignes 3 & 4 :** on souhaite convertir les vitesses données en km/h en USI (m/s) : il faut donc multiplier par  $10^3$  et diviser par 3600, c'est-à-dire diviser 80 et 40 par 3,6 :  $v_0=80/3.6$  et  $v_1=40/3.6$

**Ligne 10 :** on initialise la position de la voiture à -d :  $x_V=[-d]$

**Ligne 11 :** on initialise la vitesse de la voiture à  $v_0$  :  $v_V=[v_0]$

**Ligne 15 :** on va laisser tourner la boucle jusqu'à ce que la voiture ralentisse jusqu'à atteindre la vitesse  $v_1$  : `while v_V[-1]>v1:`

**Ligne 18 :** on utilise la **méthode d'Euler** pour incrémenter la position de la voiture :

$$x_V(t+dt) \simeq x_V(t) + \frac{dx_V}{dt}(t) \times dt = x_V(t) + v_V(t) \times dt \quad \text{à condition que } dt \text{ soit assez petit.}$$

ce qui se traduit en langage Python par : `x_V.append(x_V[-1]+v_V[-1]*dt)`

**Ligne 19 :** on utilise la **méthode d'Euler** pour incrémenter la vitesse de la voiture :

$$v_V(t+dt) \simeq v_V(t) + \frac{dv_V}{dt}(t) \times dt = v_V(t) + a_V(t) \times dt \quad \text{à condition que } dt \text{ soit assez petit.}$$

ce qui se traduit en langage Python par : `v_V.append(v_V[-1]-a*dt)`

**Q49 :** Le paramètre  $dt$  est le **pas de temps de la simulation** : il paramétrise la discrétisation du temps. Pour que la méthode d'Euler soit correcte, il faut que sa valeur ne soit pas trop grande. C'est l'« expérience » qui permet de savoir si la valeur est assez petite. On constate notamment que dans la simulation avec  $a=0,5 \text{ m.s}^{-2}$  et  $dt=5\text{s}$ , la courbe est sous forme de lignes brisées, et les positions de la voiture et du tracteur se rejoignent au bout d'à peine plus de 10s et environ 100 m après que le tracteur a débouché sur la route, tandis que pour la même accélération mais un pas de temps  $dt=0,1\text{s}$ , la rencontre a lieu à environ 130 m au bout d'environ de 13s. Ces caractéristiques de la « rencontre » entre le tracteur et la voiture n'évoluent quasiment pas pour la simulation avec la même accélération mais avec un pas de temps encore plus petit  $dt=0,001\text{s}=1\text{ms}$ , preuve que le pas de temps  $dt=0,1\text{s}$  était déjà suffisamment petit, tandis que le pas de temps  $dt=5\text{s}$  est bien trop grand.

**Q50 :** Puisque la rencontre a lieu pour une accélération égale à  $0,5 \text{ m.s}^{-2}$  avant que la vitesse de la voiture atteigne  $v_1$ , c'est que  $a_{\min} > 0,5 \text{ m.s}^{-2}$ . Et puisque les deux véhicules ne se rejoignent pas pour une accélération de  $1 \text{ m.s}^{-2}$  alors que la voiture a atteint la vitesse  $v_1$ , c'est que  $a_{\min} < 1,0 \text{ m.s}^{-2}$ . On en déduit donc un encadrement de  $a_{\min}$ , tout à fait cohérent avec la valeur calculée dans le *I.A* !

On peut ainsi déterminer « à tâtons » une valeur numérique approchée de  $a_{\min}$ , ou bien, de manière plus élégante, utiliser la dichotomie !!!