

Algorithme du pivot de Gauss

et systèmes linéaires

26 janvier 2025

Passage à la représentation matricielle

$$\left\{ \begin{array}{rcccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & - & 3x_6 & - & 3x_7 & = & 13 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & - & 3x_7 & = & -15 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & + & 3x_6 & - & x_7 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & + & 2x_6 & - & 3x_7 & = & 11 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & & & = & -24 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & - & 3x_6 & - & x_7 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & - & x_6 & + & 3x_7 & = & -8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet + 2\bullet + \bullet - \bullet - 2\bullet - 3\bullet - 3\bullet = 13 \\ 3\bullet - \bullet - \bullet + 2\bullet + \bullet + 3\bullet - 3\bullet = -15 \\ \bullet - \bullet - \bullet - 2\bullet + 3\bullet - \bullet = 7 \\ -3\bullet - 2\bullet - \bullet + \bullet - 2\bullet + 2\bullet - 3\bullet = 11 \\ 3\bullet + \bullet + 2\bullet + 3\bullet - \bullet + 3\bullet = -24 \\ -\bullet + \bullet + \bullet + \bullet + 3\bullet - 3\bullet - \bullet = -3 \\ 2\bullet + \bullet + 3\bullet + \bullet - 3\bullet - \bullet + 3\bullet = -8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1\bullet + 2\bullet + 1\bullet - 1\bullet - 2\bullet - 3\bullet - 3\bullet = 13 \\ 3\bullet - 1\bullet - 1\bullet + 2\bullet + 1\bullet + 3\bullet - 3\bullet = -15 \\ 0\bullet + 1\bullet - 1\bullet - 1\bullet - 2\bullet + 3\bullet - 1\bullet = 7 \\ -3\bullet - 2\bullet - 1\bullet + 1\bullet - 2\bullet + 2\bullet - 3\bullet = 11 \\ 3\bullet + 1\bullet + 2\bullet + 3\bullet - 1\bullet + 3\bullet + 0\bullet = -24 \\ -\bullet + 1\bullet + 0\bullet + 1\bullet + 3\bullet - 3\bullet - 1\bullet = -3 \\ 2\bullet + 1\bullet + 3\bullet + 1\bullet - 3\bullet - 1\bullet + 3\bullet = -8 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -3 & -3 & 13 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 & 3 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & 7 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -1 & 3 & 0 & -24 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -3 & -1 & 3 & -8 \end{array} \right)$$

Mise sous forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

On effectue : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$,

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$,

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$,

$L_5 \leftarrow L_5 + 2L_1$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

Second pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

On choisit le pivot le plus simple sur la deuxième colonne.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

On choisit le pivot le plus simple sur la deuxième colonne.

On effectue la permutation $L_2 \leftrightarrow L_3$ pour placer le pivot en position la plus haute possible.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$,

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$,

$L_5 \leftarrow L_5 + 3L_2$.

Second pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

On effectue $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

On effectue $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

On choisit le pivot le plus simple sur la colonne 4

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

On choisit le pivot le plus simple sur la colonne 4

On effectue la permutation $L_4 \leftrightarrow L_5$ pour placer le pivot en position la plus haute possible.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

On effectue $L_5 \leftarrow L_5 + \frac{3}{2}L_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On a terminé la mise sous forme échelonnée.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \right)$$

Mise sous forme échelonnée : autre cas possible

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 1 & 9 & -2 & -1 & 10 & 0 & -12 \\ 0 & -9 & -3 & 3 & -10 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 6 & -3 & 8 & -8 & 20 \\ -1 & -3 & 4 & -1 & -6 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 1 & 9 & -2 & -1 & 10 & 0 & -12 \\ 0 & -9 & -3 & 3 & -10 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 6 & -3 & 8 & -8 & 20 \\ -1 & -3 & 4 & -1 & -6 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & 3 & -10 & 5 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & -3 & 14 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & 3 & -10 & 5 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & -3 & 14 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & -9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & -9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Mise sous forme réduite : premier exemple

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On effectue : $L_3 \leftarrow L_3 + L_5$,

$L_2 \leftarrow L_2 + L_5$,

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_5$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On effectue $L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$,

$L_2 \leftarrow L_1 - 2L_4$,

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$,

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On effectue enfin $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

On divise toutes les lignes par leurs pivots.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Mise sous forme réduite : deuxième exemple

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rang et inconnues auxiliaires

Définition (Rang)

nombre de pivots

Définition (Rang)

nombre de pivots

Si le rang est inférieur au nombre d'inconnues alors il n'y a pas existence et unicité de la solution.

Définition (Rang)

nombre de pivots

Si le rang est inférieur au nombre d'inconnues alors il n'y a pas existence et unicité de la solution.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a

Définition (Rang)

nombre de pivots

Si le rang est inférieur au nombre d'inconnues alors il n'y a pas existence et unicité de la solution.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a

- 5 équation

Définition (Rang)

nombre de pivots

Si le rang est inférieur au nombre d'inconnues alors il n'y a pas existence et unicité de la solution.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a

- 5 équation
- 6 inconnues

Définition (Rang)

nombre de pivots

Si le rang est inférieur au nombre d'inconnues alors il n'y a pas existence et unicité de la solution.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a

- 5 équation
- 6 inconnues
- un rang de 4.

En revenant à la notation système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & - 5x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 & & = -4 \\ & 2x_5 & = 0 \\ & x_6 & = -3 \\ & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

En revenant à la notation système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & - 5x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 & & = -4 \\ & 2x_5 & = 0 \\ & x_6 & = -3 \\ & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Les inconnues auxquelles ne correspondent aucun pivot sont appelées *auxiliaires*. Elles peuvent être vues comme des paramètres.

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 1x_1 & & & = & 0 & + & 5x_3 & - & 2x_4 \\ & 3x_2 & & = & -4 & - & 1x_3 & + & 1x_4 \\ & & 2x_5 & = & 0 & & & & \\ & & & 1x_6 & = & -3 & & & \\ & & & 0 & = & 0 & & & \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \phantom{-\frac{4}{3}} - \phantom{\frac{1}{3}x_3} - \phantom{\frac{1}{3}x_4} 5x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = \phantom{-\frac{4}{3}} \phantom{-\frac{1}{3}x_3} \phantom{+\frac{1}{3}x_4} x_3 \\ x_4 = \phantom{-\frac{4}{3}} \phantom{-\frac{1}{3}x_3} \phantom{+\frac{1}{3}x_4} x_4 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = -3 \end{array} \right.$$