

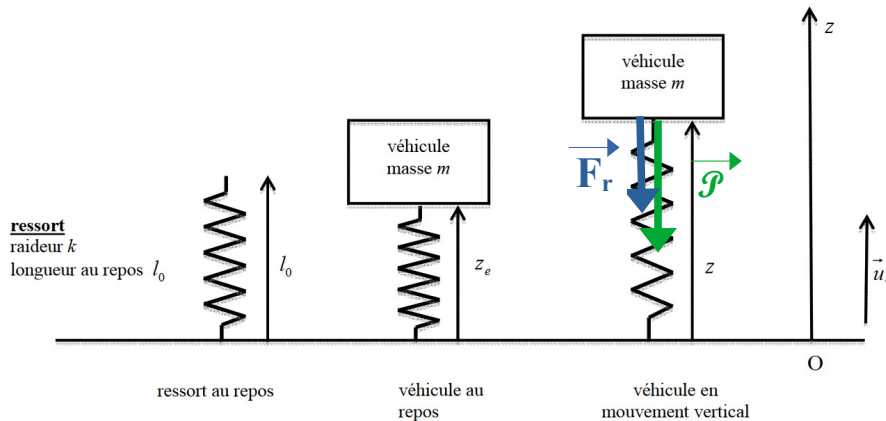
# CORRECTION DU DS n°6

## 1<sup>er</sup> Problème : Suspension de véhicule (≈ 1h)

### I.A) Première partie : suspension sans amortissement

**Q1 : Bilan des forces appliquées au véhicule :**

- son poids :  $\vec{\mathcal{P}} = -m g \vec{u}_z$  : de direction verticale, orienté vers le bas.
- la force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -k (l - l_0) \vec{u}_z = -k (z - l_0) \vec{u}_z$  : de direction verticale, mais de sens variable avec le signe de  $l - l_0$ .



**Q2 :** Dans le référentiel terrestre local supposé galiléen, et avec un système de masse  $m$  constante, le premier principe s'écrit :  $\vec{\mathcal{P}} + \vec{F}_r = \vec{0}$  (1) soit  $-m g \vec{u}_z - k (z_e - l_0) \vec{u}_z = \vec{0} \Leftrightarrow z_e = l_0 - \frac{m g}{k}$

**Q3 :** La cinématique dans le repère cartésien permet d'écrire :  $\vec{OM} = z \vec{u}_z \Rightarrow \vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z \Rightarrow \vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$   
 Et la seconde loi de Newton permet donc d'écrire :  $\vec{\mathcal{P}} + \vec{F}_r = m \vec{a} \Rightarrow -m g - k (z - l_0) = m \ddot{z}$

En en déduit l'équation (2) :  $\ddot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_e$

**Q4 :** Les solutions de cette équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients et second membre constants sont de la forme :  $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + z_e$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la pulsation

propre de la suspension et  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  sa période propre.

**A.N. :**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^3}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $T_0 = \frac{2\pi}{10} = 0,63 \text{ s}$

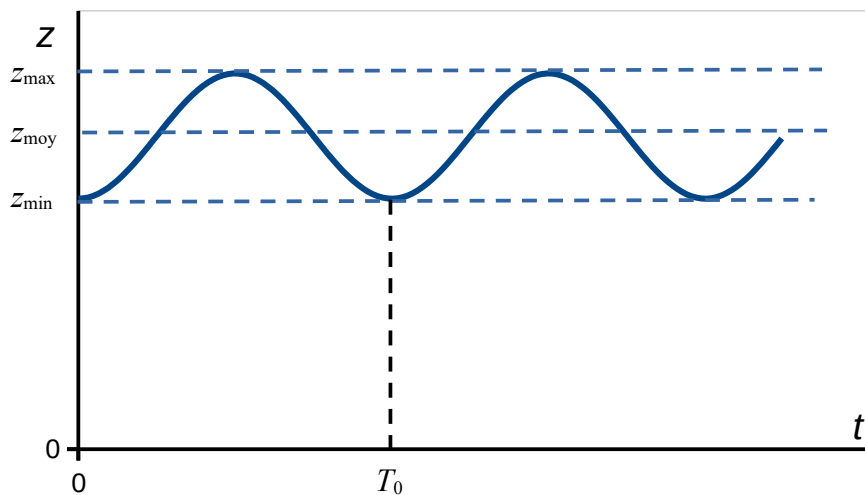
**Q5 :** D'après l'équation (2), on en calcule :  $\dot{z}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

Les conditions initiales :  $z(t=0) = z_0$  et  $\dot{z}(t=0) = 0$  imposent :

$$\begin{cases} A \cos(0) + B \sin(0) + z_e = z_0 \\ -A \omega_0 \sin(0) + B \omega_0 \cos(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -(z_e - z_0) \\ B = 0 \end{cases}$$

On en déduit l'expression :  $z(t) = z_e - (z_e - z_0) \cos(\omega_0 t)$

**Q6 :** Allure du graphe de  $z(t)$ , avec la cote minimale  $z_{\min} = z_0$  (lorsque le cosinus vaut +1), la cote maximale  $z_{\max} = 2z_e - z_0$  (lorsque le cosinus vaut -1) et la cote moyenne  $z_{\text{moy}} = z_e$  (lorsque le cosinus vaut 0) :



### I.B) Deuxième partie : suspension avec amortissement

**Q7 :** Par une étude dimensionnelle :  $[h] = \frac{[\text{force}]}{[\text{vitesse}]} = \frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{L} \cdot \text{T}^{-1}} = \text{M} \cdot \text{T}^{-1}$ . L'USI de  $h$  est donc le  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q8 :** On rajoute au bilan des forces précédent la force de frottement fluide, de direction verticale et de sens opposé au sens du mouvement :  $\vec{F} = -h \vec{v} = -h \dot{z} \vec{u}_z$

À l'équilibre, il n'y a pas de mouvement, donc pas de force de frottement fluide. La relation (1) n'est donc pas modifiée :  $\vec{\mathcal{P}} + \vec{F}_r = \vec{0}$  et donc :  $z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}$

**Q9 :** La seconde loi de Newton s'écrit désormais :  $-mg \vec{u}_z - k(z_e - \ell_0) \vec{u}_z - h \dot{z} \vec{u}_z = m \ddot{z} \vec{u}_z$ , soit :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_e$$

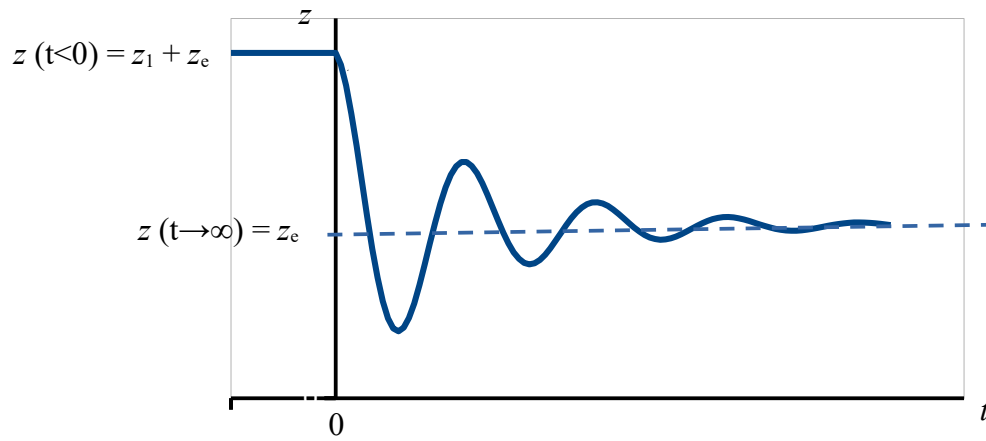
**Q10 :** On reconnaît l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur amorti, associée à l'équation caractéristique :  $X^2 + \frac{h}{m} X + \frac{k}{m} = 0$ . Le régime sera :

- **pseudo-périodique** ssi  $\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0 \Leftrightarrow h^2 < 4mk$
- **critique** ssi  $\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = 0 \Leftrightarrow h^2 = 4mk$
- **apériodique** ssi  $\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} > 0 \Leftrightarrow h^2 > 4mk$

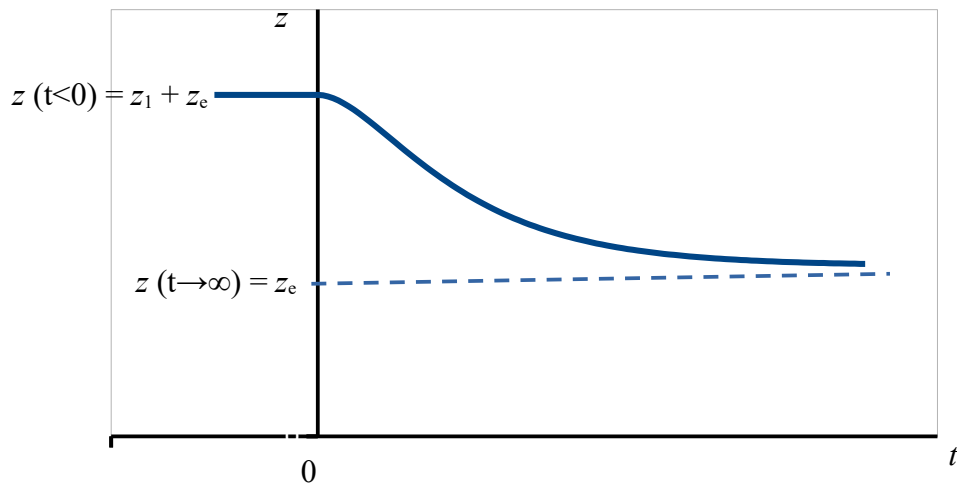
**Q11 :** Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, alors  $h^2 = 4m_{\text{vide}}k$ , alors, lorsque le véhicule est chargé :  $m_{\text{charge}} > m_{\text{vide}}$  et donc  $4m_{\text{charge}}k > 4m_{\text{vide}}k = h^2$  : le régime est pseudo-périodique.

**Q12 :** On en déduit que pour ne pas être en régime pseudo-périodique, même lorsque le véhicule est chargé, il faut régler la suspension de telle sorte que le régime soit assez nettement apériodique lorsqu'on est à vide.

**Q13 :** Allure de  $z(t)$  pour  $t$  variant entre 0 et  $t \gg t_1$  lorsque la suspension est en régime pseudo-périodique :



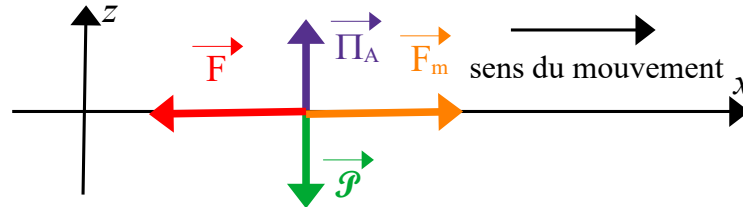
**Q14 :** Allure de  $z(t)$  pour  $t$  variant entre 0 et  $t \gg t_1$  lorsque la suspension est en régime apériodique :



## 2<sup>ème</sup> Problème : Bateau sur l'eau, version mobile (≈ 45 min)

### Q15 : Bilan des forces appliquées au bateau :

- son poids :  $\vec{\mathcal{P}} = -m g \vec{u}_z$  : direction verticale, orienté vers le bas.
- la poussée d'Archimède :  $\vec{\Pi}_A = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{eau déplacée}} = \|\vec{\Pi}_A\| \vec{u}_z$  : direction verticale, orientée vers le haut
- force de frottement fluide :  $\vec{F} = -k \|\vec{v}\| \vec{v} = -k v^2 \vec{u}_x$  (modèle quadratique) : direction horizontale, sens opposé au mouvement.
- force de poussée des moteurs (via les hélices) :  $\vec{F}_m = +\|\vec{F}_m\| \vec{u}_x$  : direction horizontale, sens = celui du mouvement.



**Q16 :** D'après la première loi de Newton appliquée au navire de masse  $m$  constante, soumis à un mouvement rectiligne et uniforme dans le référentiel du port, supposé galiléen :  $\sum_k \vec{F}_k = \vec{\mathcal{P}} + \vec{\Pi}_A + \vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0}$ , relation qui se traduit après projection sur chacun des deux axes du repre cartésien par les relations :

$$\|\vec{\Pi}_A\| = \|\vec{\mathcal{P}}\| \text{ (le navire flotte : ouf !)} \text{ et } \|\vec{F}_m\| = \|\vec{F}\| = k v^2 \text{ (le moteur compense les frottements)}$$

Ainsi, puisque la puissance des moteurs vaut :  $P = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = +\|\vec{F}_m\| v$ , on en déduit que :  $k = \frac{P}{v^3}$

**A.N. :**  $k = \frac{5,0 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}}{\left(\frac{15 \times 1852}{3600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right)^3} \simeq \frac{5,0 \cdot 10^6}{\left(\frac{16}{2}\right)^3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \simeq \underline{1,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}}$

**Q17 :** La seconde loi de Newton, projetée sur l'axe horizontal s'écrit, en l'absence de la force du moteur :

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_x = -k v^2 = m \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow -\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m} dt$$

**N.B. :** on reconnaît l'équation différentielle à variables séparables déjà vue dans le cas d'une cinétique chimique d'ordre 2 !!! L'intégration entre l'état initial ( $t = 0 ; v = v_0$ ) et l'état générique ( $t, v$ ) mène à la

relation fournie :  $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{k}{m} t$

**Q18 :** Pour obtenir la distance parcourue depuis l'arrêt des moteurs à  $t = 0$ , il suffit d'intégrer l'expression

de la vitesse :  $v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{k}{m} t} = \frac{dx}{dt}$  D'où :  $x(t) = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{1}{v_0} + \frac{k}{m} t\right) + A$

Par ailleurs, la condition initiale impose :  $x(t=0) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{k} \ln\left(\frac{1}{v_0}\right) + A = 0 \Leftrightarrow A = \frac{m}{k} \ln(v_0)$

On en déduit que la distance parcourue jusqu'à la passe est :

$$X = x(t_p) = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{1}{v_0} + \frac{k}{m} t_p\right) + \frac{m}{k} \ln(v_0) = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{1}{v_p}\right) + \frac{m}{k} \ln(v_0) \text{ soit } \boxed{X = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{v_0}{v_p}\right)}$$

**A.N. :** Pour atteindre la passe à la vitesse de 2 nœuds :  $X = \frac{1,0 \cdot 10^7 \text{ kg}}{1,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}} \ln\left(\frac{15}{2}\right) = \underline{2,0 \cdot 10^3 \text{ m}}$

**Q19 :** D'après l'expression obtenue en Q17 : 
$$\tau_p = \frac{m}{k} \left( \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_0} \right)$$

**A.N. :** 
$$\tau_p = \frac{1,0 \cdot 10^7 \text{ kg}}{1,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{15} \right) \times \frac{3600}{1852} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} \approx 1,0 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 17 \text{ min}$$

**Q20 :** On parvient au quai après avoir parcouru la distance :

$$1,5 X = x(t_Q) = \frac{m}{k} \ln \left( \frac{1}{v_0} + \frac{k}{m} t_Q \right) + \frac{m}{k} \ln(v_0) = \frac{m}{k} \ln \left( \frac{v_0}{v_Q} \right) \Leftrightarrow v_Q = v_0 \exp \left( -1,5 X \cdot \frac{k}{m} \right)$$

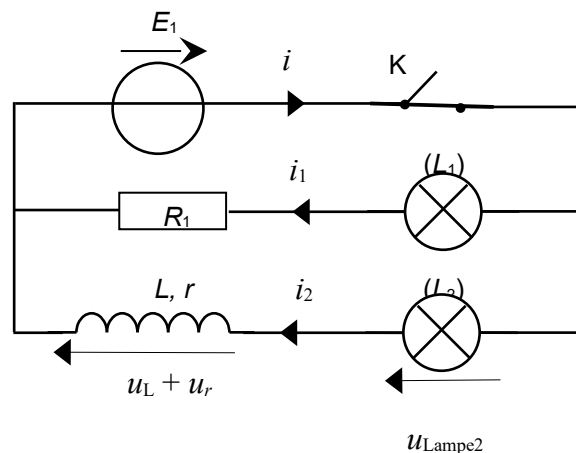
**A.N. :** 
$$v_Q = 15 \times \exp \left( -1,5 \times 2,0 \cdot 10^3 \text{ m} \times \frac{1,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}}{1,0 \cdot 10^7 \text{ kg}} \right) \approx 15 \times \exp(-3) \approx 0,75 \text{ noeuds}$$

On ne peut donc pas compter sur les frottements fluides pour stopper « efficacement » le navire !

**Q21 :** Il y a deux solutions classiques pour stopper le navire : modifier le sens de rotation des hélices (« machine arrière toute »), ou bien... jeter l'ancre !

### 3<sup>er</sup> Problème : Réveil en douceur (≈ 1h)

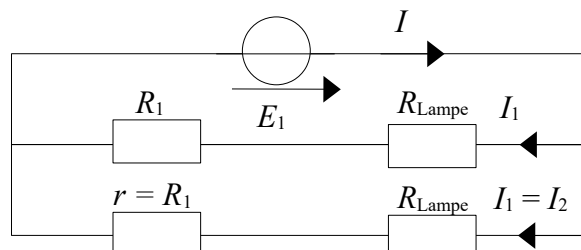
#### III.A) Influence d'une bobine dans un circuit électrique



**Q22 :** Une fois l'interrupteur fermé, l'intensité s'établit quasi-instantanément dans la branche qui contient  $R_1 + L_1$ , et la lampe  $L_1$  s'allume donc tout de suite. La lampe  $L_2$  s'allume, elle, avec retard car la bobine qui est présente dans sa branche impose une intensité continue. Et puisque cette intensité est nulle pour  $t < 0$ , elle doit rester nulle en  $t = 0^+$  : elle va donc s'allumer un peu plus tard (une fois que l'intensité sera suffisamment élevée dans sa branche).

**Q23 :** Dans la branche contenant la bobine, on va d'abord observer un **régime transitoire** avant d'atteindre un nouveau **régime stationnaire**.

**Q24 :** Une fois le régime stationnaire atteint, la bobine réelle se comporte comme un résistor de résistance  $r$ . Les deux branches contenant les lampes sont alors équivalentes, comme le prouve le circuit équivalent suivant :

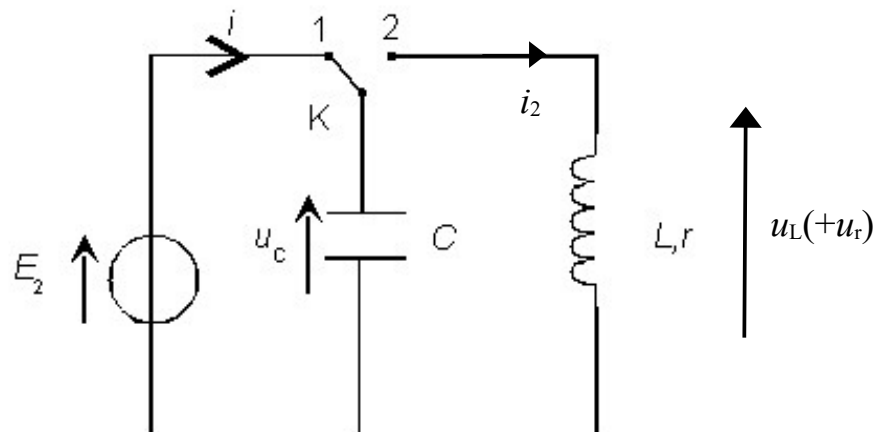


**Q25 :** La loi des mailles s'écrit (dans la « grande » maille), pour  $t > 0$  :  $E_1 = u_L + u_r + u_{Lampe2}$

Soit :  $L \frac{di}{dt} + r i_2 + R_{lampe} i_2 = E_1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{di_2}{dt} + \frac{r + R_{lampe}}{L} i_2 = \frac{E_1}{L}}$  : équation différentielle régissant l'évolution de l'intensité parcourant la bobine. On en déduit l'expression du temps caractéristique du phénomène :  $\tau = \frac{L}{r + R_{lampe}}$

**Q26 : A.N. :** Avec les données fournies :  $\tau \equiv \frac{1 \text{ H}}{(7+3) \Omega} \equiv 0,1 \text{ s}$ . La durée du régime transitoire étant d'environ  $5\tau = 0,5 \text{ s}$ , le phénomène est tout à fait observable à l'œil nu.

### III.B) Vérification de la valeur de l'inductance $L$ de la bobine utilisée



#### III.B.1) Modélisation simple de la situation

**Q27 :** Dans l'hypothèse où l'on néglige l'influence de la résistance  $r$  de la bobine, la loi des mailles s'écrit pour  $t > 0$  (une fois le commutateur en position 2) :  $u_C = u_L = L \frac{di_2}{dt}$ , avec  $i_2 = -C \frac{du_C}{dt}$ . D'où l'équation différentielle (homogène, linéaire, du second ordre à coefficients constants) à laquelle est soumise la tension  $u_C$  :

$$u_C = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la **pulsation propre de l'oscillateur harmonique** correspondant.

Les solutions sont de la forme :  $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  et donc  $i_2(t) = -C \frac{du_C}{dt} = +A C \omega_0 \sin(\omega_0 t) - B C \omega_0 \cos(\omega_0 t)$ .

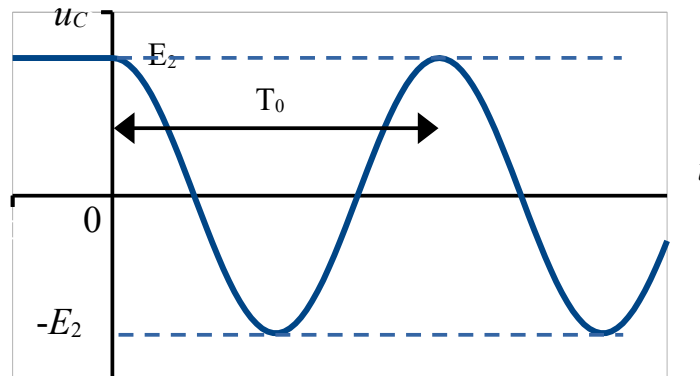
Les conditions initiales sont fournies par la **continuité** en  $t=0$  de :

- l'intensité circulant dans la bobine :  $i_2(t=0^+) = -B C \omega_0 = i_2(t=0^-) = 0$  (branche de la bobine ouverte pour  $t < 0$ )
- la tension aux bornes du condensateur :  $u_C(t=0^+) = A = u_C(t=0^-) = E_2$  (condensateur chargé sous  $E_2$ )

La solution correspondant au problème étudié est donc :  $\boxed{u_C(t) = E_2 \cos(\omega_0 t)}$

**Q28 :** La période propre  $T_0$  du système est :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

**Q29 :** La représentation graphique de  $u_C(t)$  est la suivante :



**Q30 :** Les oscillations sans amortissement sont impossibles à observer expérimentalement car la résistance de la bobine n'est pas négligeable (elle vaut quelques ohms).

### III.B.2) Retour à l'expérience réelle

**Q31 :** L'évolution de la tension  $u_C(t)$  observée aux bornes du condensateur correspond à un **régime transitoire pseudo-périodique**.

**Q32 :** La loi des mailles s'écrit désormais, pour  $t > 0$  :  $u_C = u_L + u_r = L \frac{di_2}{dt} + r i_2$ , avec  $i_2 = -C \frac{du_C}{dt}$ .

D'où l'équation différentielle (homogène, linéaire, du second ordre à coefficients constants) à laquelle est soumise la tension  $u_C$  :  $u_C = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} - rC \frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur amorti, de la forme :  $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$

- cet oscillateur a pour **pulsation propre** :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- et pour **facteur de qualité**  $Q$ , tel que :  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L} \Leftrightarrow Q = \frac{L \omega_0}{r}$  soit :  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$

**Q33 :** Puisqu'on observe des oscillations amorties, c'est que le facteur de qualité est supérieur à 0,5, et que l'équation caractéristique  $X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$  associée possède un discriminant  $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$  et

possède donc deux solutions complexes conjuguées :  $X_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}{2}$

En posant :  $\tau' = \frac{2Q}{\omega_0}$  et  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :  $u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) [\lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)]$

On en déduit donc :

$$i_2(t) = -C \frac{du_C}{dt} = +\frac{C}{\tau'} \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) [\lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)] + \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) [\lambda C \Omega \sin(\Omega t) - \mu C \Omega \cos(\Omega t)]$$

Les conditions initiales sont fournies par la **continuité** en  $t=0$  de :

- la tension aux bornes du condensateur :  $u_C(t=0^+) = \lambda = u_C(t=0^-) = E_2$  (condensateur chargé sous la tension  $E_2$ )
- l'intensité circulant dans la bobine :  $i_2(t=0^+) = \frac{\lambda C}{\tau'} - \mu C \Omega = i_2(t=0^-) = 0$  (branche de la bobine ouverte pour  $t < 0$ ), d'où :  $\mu = \frac{E_2}{\Omega \tau'}$

D'où la solution correspondant au problème étudié : 
$$u_C(t) = E_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \left[ \cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau'} \sin(\Omega t) \right]$$

**Q34 :** D'après le graphe fourni :

- $E_2$  est la tension aux bornes du condensateur à  $t = 0$ , donc :  $E_2 = 6,0 \text{ V}$
- La pseudo-période des oscillations vaut :  $T = 30 \text{ ms}$

**Q35 :** Le graphique présente déjà 6 oscillations, mais étant donné le faible amortissement, on peut facilement envisager qu'il y aura au minimum 15 oscillations visibles, et donc que  $Q > 10$ . Dans ces conditions, la pseudo-période vaudra :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \simeq T_0$$

**Q36 :** Puisque  $L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$ , on en déduit donc la valeur de l'inductance de la bobine :

$$L \simeq \frac{(30 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 22 \cdot 10^{-6}} = \frac{90 \cdot 10^{-5}}{88 \times \pi^2 \times 10^{-6}} \simeq 1,0 \text{ H}$$

On obtient donc une valeur très proche de la donnée du constructeur.

**Q37 :** L'énergie électrique totale dans le circuit est **décroissante** puisque la résistance de la bobine réelle dissipe régulièrement de l'énergie sous forme de chaleur. Elle ne peut par ailleurs pas être périodique ni même pseudo-périodique puisqu'elle ne peut pas ré-augmenter, même de manière transitoire.

## 4<sup>ème</sup> Problème : Le toboggan de la piscine (≈ 1h15min)

### IV.A) Questions préliminaires

**Q38** : Les frottements ont deux origines différentes :

- **les frottements solides**, issus du contact de l'enfant avec le toboggan, qui sont ici minimisés grâce au filet d'eau qui cours au fond du tube, mais qui ne pourront jamais être annulés. **Astuce** : vous pouvez minimiser ces frottements en minimisant le contact corps/plastique, et surtout maillot de bain/plastique : soulevez les fesses !
- **les frottements fluides**, issus du déplacement relatif de l'enfant par rapport à l'air contenu dans le toboggan. Ils restent ici d'autant plus faibles que l'enfant n'ira pas trop vite et/ou qu'il restera allongé (plus faible maître-couple). Ce type de frottements pourrait théoriquement être annulé en créant un courant d'air au sein du tube, mais en pratique il faudrait adapter le débit du courant d'air à la vitesse de l'enfant : pas facile...

**Q39** : Le référentiel d'étude est le **référentiel terrestre local**, que l'on peut supposer galiléen du moment que la descente dure bien moins longtemps que la période de rotation propre de la Terre (24 h) : ça nous laisse un peu de marge...

**Q40** : D'après la définition de la pente :  $\tan \alpha = \frac{16}{100} = 0,16$

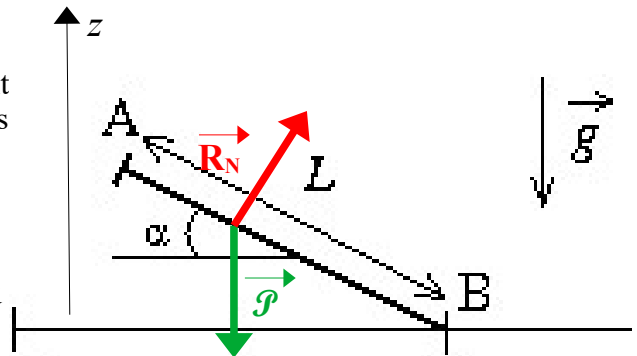
À l'aide de la table trigonométrique, on en déduit que :  $\alpha = 0,16 \text{ rad} = 9^\circ$

### IV.B) Étude de la première phase : [AB]

**Q41** : Lors de cette première phase, l'enfant glisse sagement au fond du tube, selon un **mouvement rectiligne (uniformément) accéléré**.

**Q42** : Avec les hypothèses du problème (et en négligeant la poussée d'Archimède de l'air), seules deux forces s'exercent sur l'enfant :

- son poids, vertical vers le bas :  $\vec{\mathcal{P}} = -mg \vec{u}_z$  ( $z$  : axe vertical ascendant)
- la réaction normale du support :  $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\| \vec{u}_Y$  (axe Y perpendiculaire au support, vers le haut)



**Q43** : Le travail du poids de l'enfant entre les points A et B vaut :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{\mathcal{P}}) = +mg (z_A - z_B) = +mg L \sin \alpha > 0 : \text{le poids est moteur lors de la descente.}$$

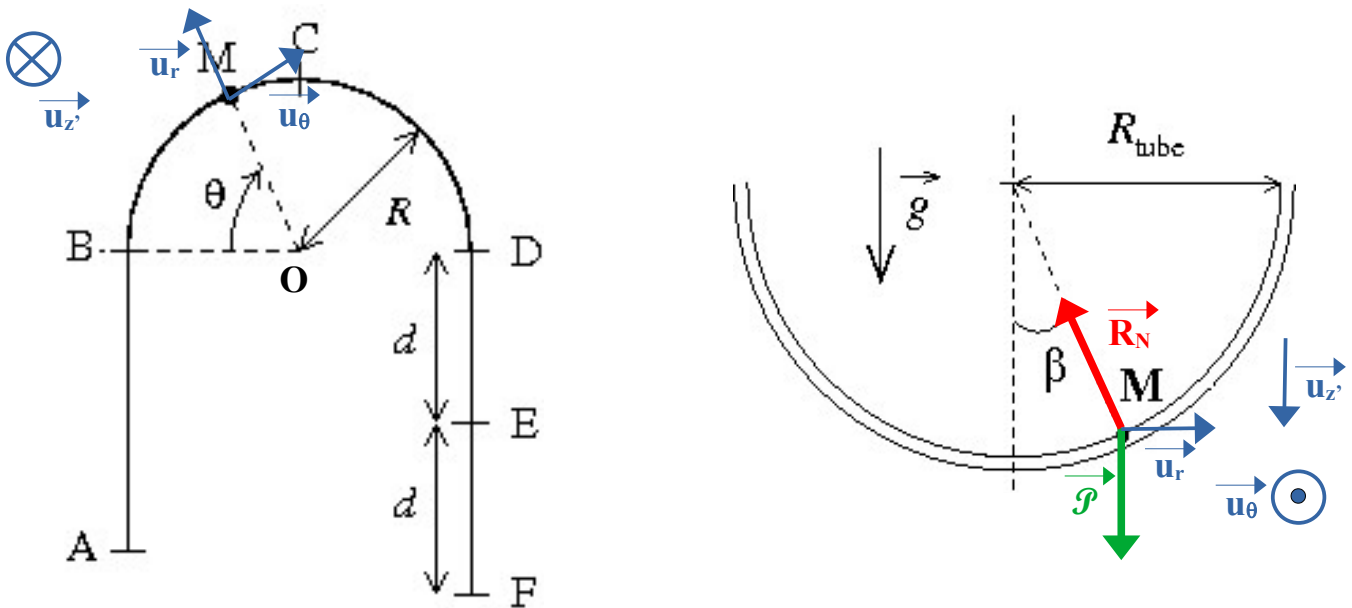
**Q44** : L'application du théorème de l'énergie cinétique au système {enfant de masse  $m$  constante} entre les points A et B s'écrit :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{A \rightarrow B}(\vec{\mathcal{P}}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N)$$

Par ailleurs, la réaction normale du support est constamment normale à la trajectoire et ne travaille donc pas :  $W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N) = 0$ . Et l'enfant part sans vitesse initiale, donc :  $v_A = 0$ . On en déduit donc que :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mg L \sin \alpha \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2 g L \sin \alpha} \text{ A.N. : } v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 5,0 \times 0,16} = \sqrt{16} = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$$

**IV.C) Étude de la seconde phase : [BCD]**



**Q45 :** Le système de coordonnées polaires est adapté pour étudier le mouvement circulaire, mais nous aurons également besoin de la troisième dimension pour exprimer les forces qui s'appliquent sur l'enfant. Il faut donc utiliser le système de **coordonnées cylindriques**, de centre O et de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , avec  $z'$  l'axe vertical descendant, cf. schémas ci-dessus.

**Q46 :** Puisque le mouvement a lieu dans le plan polaire, on a  $z' = 0$ , d'où l'expression du vecteur position :  $\vec{OM}(t) = R \vec{u}_r + z' \vec{u}_z = R \vec{u}_r$ , puis de la vitesse  $\vec{v}(t) = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ , et enfin de

l'accélération :

$$\vec{a}(t) = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R (\dot{\theta})^2 \vec{u}_r = \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Q47 :** Les deux seules forces qui s'exercent sur l'enfant sont les mêmes, mais leurs coordonnées dans la base de projection change :

- le poids, vertical vers le bas :  $\vec{P} = mg \vec{u}_z$ ,
- la réaction normale du support : Si l'enfant restait au fond du tube, on aurait tout simplement:  $\vec{R}_N = -\|\vec{R}_N\| \vec{u}_z$ , mais cela mènerait à une incohérence au niveau de la seconde loi de Newton :

$$m \vec{a} = m \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \neq 0 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\|\vec{R}_N\| \end{pmatrix} \Rightarrow \text{problème !}$$

Il est donc indispensable que l'enfant soit **déporté vers l'extérieur** du tube, d'un certain angle,

noté  $\beta$ , de telle sorte que :  $\vec{R}_N = \begin{pmatrix} -\|\vec{R}_N\| \sin \beta \\ 0 \\ -\|\vec{R}_N\| \cos \beta \end{pmatrix}$

La seconde loi de Newton s'écrit alors :  $m \vec{a} = m \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{R}_N\| \sin \beta \\ 0 \\ -\|\vec{R}_N\| \cos \beta \end{pmatrix}$

**N.B. :** C'est la composante radiale de la réaction normale du support qui permet l'existence du mouvement circulaire.

Par ailleurs, la projection de la relation vectorielle selon  $\vec{u}_\theta$  mène à :  $\boxed{\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = cste}$ , ce qui caractérise l'**uniformité du mouvement circulaire**. La vitesse de l'enfant reste constante **en norme**, et égale à  $v_B = R\dot{\theta} = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$

**Q48 :** Les autres projections de la seconde loi de Newton mène à :  $\|\vec{R}_N\| = \frac{mg}{\cos\beta} = \frac{mR(\dot{\theta})^2}{\sin\beta} = \frac{m(v_B)^2}{R \sin\beta}$

Soit :  $\boxed{\tan\beta = \frac{(v_B)^2}{Rg}}$       **A.N. :**  $\tan\beta = \frac{4,0^2}{4,0 \times 10} = 0,40$  et donc  $\beta = \underline{22^\circ}$

**Q49 :** La trajectoire est bien circulaire, mais le rayon du cercle est très légèrement différent de R puisque l'enfant est déporté vers l'extérieur. Le rayon réel du mouvement circulaire est :  $R' = R + R_{\text{tube}} \sin\beta$ . Les plus courageux pourront résoudre avec l'outil numérique la véritable équation menant à la valeur de  $\beta$  :

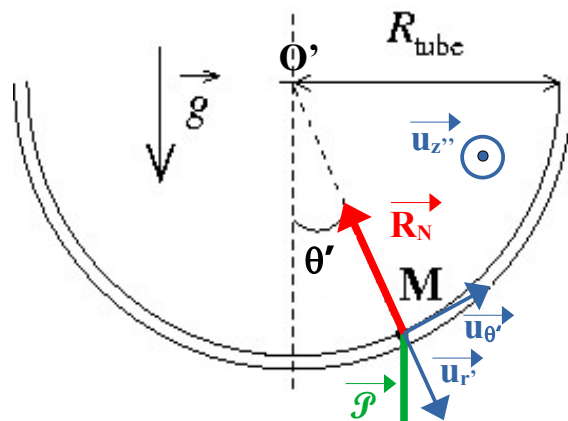
$$\tan\beta = \frac{(v_B)^2}{(R + R_{\text{tube}} \sin\beta)g} \quad (\dots)$$

Les plus "économiques" diront que la valeur de  $R_{\text{tube}} \sin\beta = 0,5 \times 0,37 \approx 0,2 \text{ m}$  est négligeable devant celle de  $R = 4 \text{ m}$  : l'hypothèse de l'énoncé est donc tout à fait acceptable !

**IV.D) Étude de la troisième phase : [DE]**

**Q50 :** Au cours de cette troisième phase, il n'y a, comme dans la question précédente, aucune accélération dans la direction de l'axe du tube, car aucune force n'est appliquée dans la direction horizontale. On peut donc s'attendre à garder un déplacement uniforme selon la direction du tube (**DE**). En revanche, puisque l'enfant est sur le bord du tube à l'instant "initial", en **D**, il va fatalement retomber vers le fond du tube. Mais sans frottement, il dépassera forcément le fond pour remonter de l'autre côté... C'est une sensation de balancement que l'on ressent très bien lorsque l'on fait l'expérience...

**Q51 :** On utilise à nouveau un **système de coordonnées cylindriques**, d'origine **O'** prise au niveau de **D**, au centre du tube, et de base de projection  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , avec l'axe  $z'$  horizontal, dans le sens du déplacement, cf. schéma. La distance à l'axe reste constante et égale à  $R_{\text{tube}}$  :



**Q52 :** On continue de ne travailler qu'avec le poids et la réaction normale du support, mais attention aux

projections :  $\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cos\theta' \\ -mg \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{R}_N \begin{pmatrix} -\|\vec{R}_N\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par ailleurs, l'expression du vecteur position dans la base de projection du nouveau repère cylindrique est :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -R_{\text{tube}}(\dot{\theta}')^2 \\ R_{\text{tube}}\ddot{\theta}' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Et donc, la 2<sup>ème</sup> loi de Newton s'écrit :

$$m \vec{a} = m \begin{pmatrix} -R_{\text{tube}}(\dot{\theta}')^2 \\ R_{\text{tube}}\ddot{\theta}' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta' \\ -mg \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{R}_N\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selon  $\vec{u}_{z'}$ , on reconnaît un mouvement rectiligne uniforme, à la vitesse :  $z'' = cste = v_B$

Selon  $\vec{u}_{\theta'}$ , on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique !

On a donc bien la composition d'un mouvement rectiligne uniforme dans l'axe du tube et d'un mouvement oscillatoire latéral.

**Q53 :** La valeur maximale de  $\theta'$  est  $\beta = 22^\circ$ . On constate sur la table trigonométrique que même pour cet angle, l'approximation  $\sin \theta' \simeq \theta'$  reste encore largement valable (lorsque  $\theta'$  est exprimé en radian...).

L'équation différentielle régissant le mouvement oscillatoire  $m R_{\text{tube}} \ddot{\theta}' = -mg \sin \theta'$  peut donc se ré-écrire :  $\ddot{\theta}' + \frac{g}{R_{\text{tube}}} \theta' = 0$

La période des oscillations vaut donc :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\text{tube}}}{g}}$

**A.N. :**  $T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{0,5}{10}} \simeq \frac{6,3}{\sqrt{20}} \simeq \frac{6,3}{4,5} \simeq 1,4 \text{ s}$  : valeur cohérente avec l'expérience !

#### IV.E) Fin du parcours

**Q54 :** Ce sont les **frottements fluides avec l'eau** (et non pas l'air...) qui permettent l'arrêt de l'enfant sur la quatrième phase [EF] : c'est plutôt efficace...

**Q55 :** L'étude de la première phase par les lois de Newton permettraient de déterminer la durée de cette première phase :  $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}$  (je vous laisse faire : c'est du mouvement rectiligne uniformément accéléré...).

Il faut ensuite déterminer la durée nécessaire pour parcourir le trajet BCDE à la vitesse constante  $v_B$  :  $t_2 = \frac{\pi R + d}{v_B}$ . Et pour finir, on néglige la durée de l'arrêt après le point E.

On obtient donc la durée totale :  $t_{\text{tot}} \simeq \sqrt{\frac{2 \times 5,0}{10 \times 0,16}} + \frac{3,1 \times 4,0 + 3,0}{4,0} \simeq \frac{\sqrt{100} + 15}{4} \simeq 6,2 \text{ s}$