

DS n°7 de PHYSIQUE-CHIMIE

(durée : 4h ; Calculatrice **non autorisée**)

Consignes & conseils :

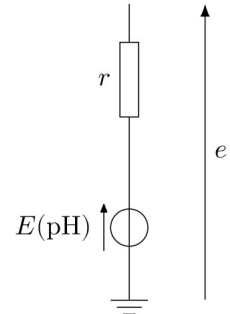
- Votre copie doit comprendre une marge horizontale en début de copie et une marge verticale à gauche de chaque page.
- Les résultats doivent être présentés sous la forme d'expressions littérales (EL) encadrées **en couleur** et d'applications numériques (AN) soulignées **en couleur** (et à la règle). Pensez également à **souligner les mots clés**.
- Les questions abordées doivent être clairement identifiées. Toute réponse doit être rédigée, justifiée, et lisible.
- Vérifiez que vos EL sont homogènes et que vos AN possèdent un nombre cohérent de chiffres significatifs, ainsi qu'une unité adaptée.

1^{er} Problème : Modélisation d'un pH-mètre et filtrage (≈ 50min)

De nombreux procédés industriels demandent une régulation du pH, dont la mesure se fait à l'aide d'un pH-mètre et d'une agitation mécanique.

I.A) Modélisation du pH-mètre

On modélise le pH-mètre comme une association en série d'un générateur de tension idéale de force électromotrice E (fonction du pH) avec une résistance électrique r (figure 1 ci-contre).



Q1. On souhaite mesurer la tension e à l'aide d'un voltmètre de résistance interne $R_V = 1,0 \text{ M}\Omega$. Exprimer la tension mesurée e en fonction de E , r et R_V . Calculer la valeur de e en prenant $r = 10 \text{ M}\Omega$ et $E = 0,20 \text{ mV}$ et conclure.

Q2. Quelle valeur minimale de résistance interne du voltmètre R'_V aurait-il fallu utiliser pour commettre une erreur inférieure à 10 % sur la mesure de E ?

Figure 1 Modélisation d'un pH-mètre

Pour s'affranchir des problèmes de mesures liés à la résistance interne r du pH-mètre, on utilise le montage de la figure 2 dans lequel l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire. La tension u_1 en sortie de ce montage, appelé « suiveur », vaut alors $u_1 = E$.

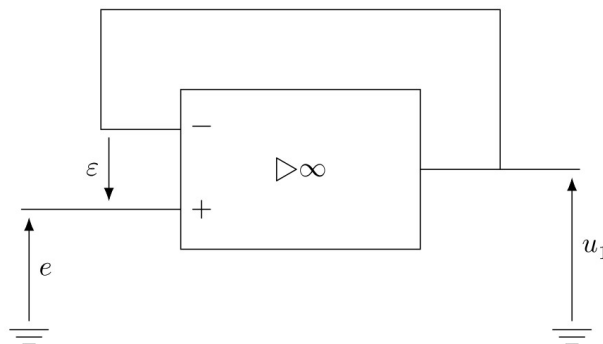


Figure 2

L'agitation mécanique nécessaire pour assurer l'homogénéité du milieu dont on mesure le pH provoque une perturbation électromagnétique du signal E . À un pH donné, l'évolution de E en fonction du temps t est représentée figure 3 :

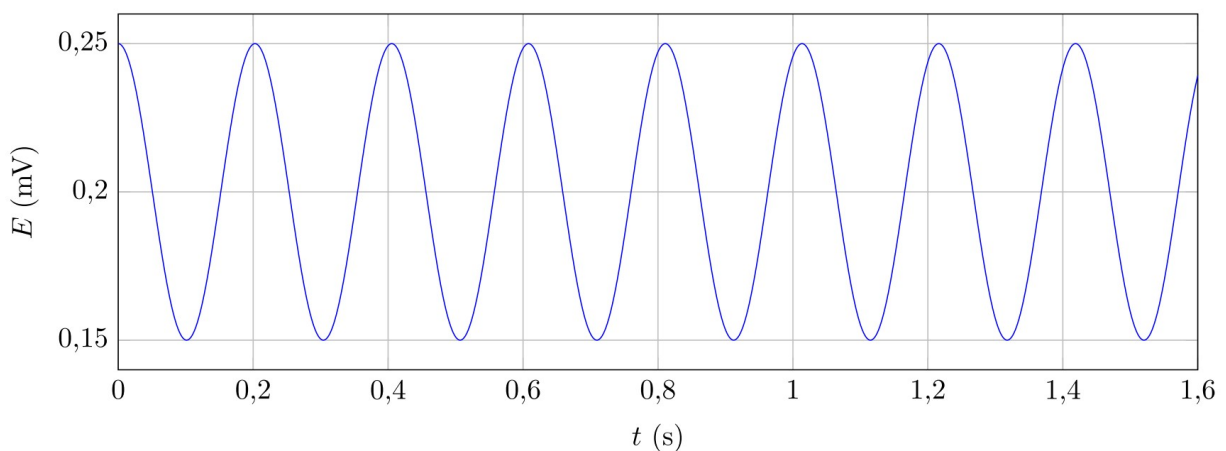


Figure 3

Q3. Représenter la décomposition spectrale du signal de la figure 3.

I.B) Filtrage linéaire

On envoie le signal $u_1(t)$ en entrée du filtre représenté figure 4.

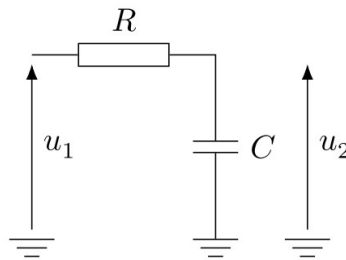


Figure 4

L'étude sera menée en régime sinusoïdal, ω désigne la pulsation du signal, ω_0 une pulsation caractéristique et x désigne la pulsation réduite : $x = \omega/\omega_0$.

Q4. Effectuer une analyse qualitative du filtre à basse et haute fréquence. En déduire la nature du filtre, et justifier de son intérêt dans le cas présent.

Q5. Exprimer la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ en identifiant les expressions des paramètres H_0 et ω_0 .

Q6. Exprimer le gain du filtre $G(x)$ et la phase $\varphi(x) = \arg(\underline{H})$.

Q7. Déterminer la valeur de la pulsation réduite de coupure x_c à -3 dB.

Q8. Exprimer le gain en décibels $G_{dB}(x)$ puis déterminer les équivalents à basse et haute fréquence.

Q9. Construire le diagramme de Bode, réponses en gain $G_{dB} = f(\log x)$ et en phase $\varphi = f(\log x)$.

On considère le signal d'entrée de la forme : $u_1(t) = E + E/4 \cos(10 \omega_0 t)$.

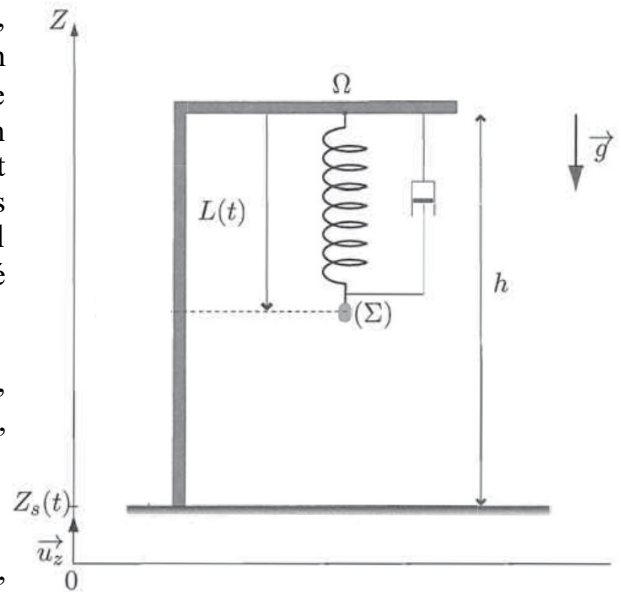
On cherche le signal de sortie $u_2(t)$ sous la forme : $u_2(t) = A_1 + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$.

Q10. Exprimer les constantes A_1 , A_2 , ω_2 et ψ_2 en fonction des paramètres E et ω_0 . Calculer, pour $E = 0,20$ mV, les valeurs de A_1 , A_2 et ψ_2 . Commenter l'effet de l'action du filtre sur le signal $u_1(t)$.

2^{ème} Problème : Le retour du sismographe (≈ 1h30min)

II.A) Le sismographe simple

Le sismographe vertical, représenté sur la figure ci-contre, est constitué d'un solide (Σ) de masse m suspendu à un ressort dont l'autre extrémité (Ω) est liée à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer le mouvement du solide par rapport au bâti. On souhaite que ce mouvement reproduise le plus fidèlement possible celui du sol par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. On appelle \mathcal{R}_s le référentiel lié au bâti rigide.



Le sol est supposé horizontal. Son mouvement vertical, lors d'une secousse sismique sinusoïdale de pulsation ω , est repéré par la cote, mesurée par rapport à \mathcal{R} :

$$Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$$

Le ressort, de masse négligeable, de constante de raideur k , de longueur au repos L_0 , a pour longueur $L(t)$ à l'instant t .

Un amortisseur, relié au ressort, exerce sur le solide une action mécanique modélisée par la force : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse du solide par rapport au référentiel \mathcal{R}_s .

On note L_1 la longueur du ressort quand le solide est à l'équilibre en l'absence de secousse sismique.

Q11. Retrouver la relation entre les grandeurs L_1 , L_0 , m et g .

En présence d'une secousse, la position du solide est repérée par la grandeur : $x(t) = L(t) - L_1$. Vous avez montré dans le DM5 que la grandeur $x(t)$ vérifiait l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique :

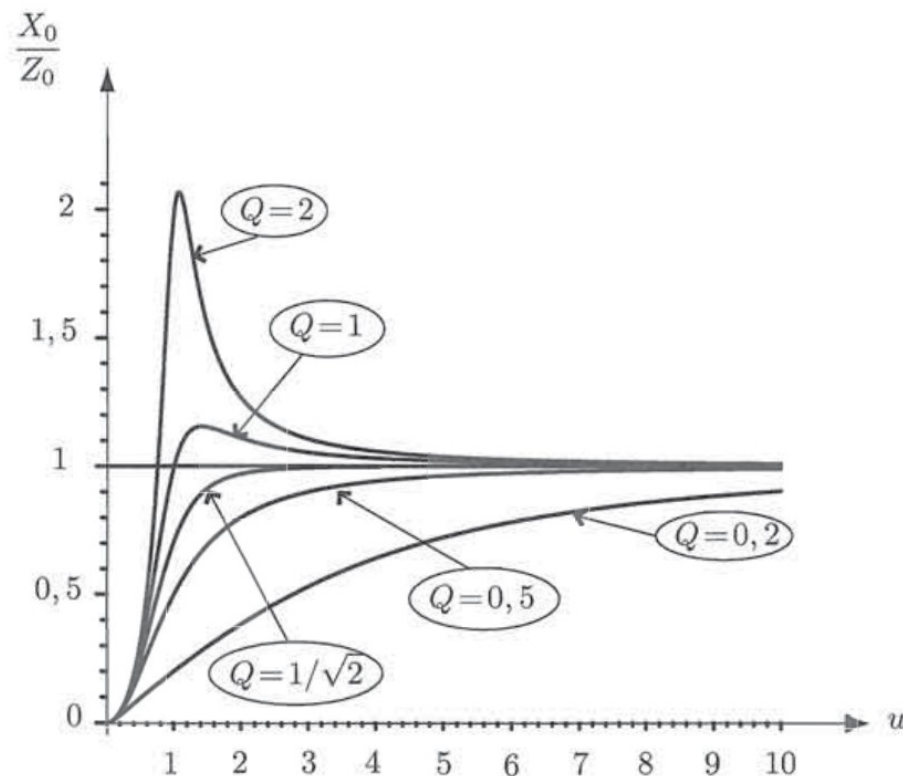
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

Q12. Donner les expressions, les significations physiques et les dimensions des paramètres ω_0 et Q .

On cherche la réponse sous la forme : $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Q13. En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, prouver que : $\frac{X_0}{Z_0} = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$

Le graphe représentant les évolutions de X_0/Z_0 en fonction de u pour différentes valeurs de Q est précisé ci-dessous :



Q14. Vérifier que l'allure de ce graphe est compatible, à haute et basse fréquence, avec l'expression fournie à la question **Q13**.

Q15. Qualifier la nature du filtre correspondant à ce sismographe.

Q16. Définir la notion de résonance en amplitude du sismographe. Préciser, si, dans le cas du sismographe, ce phénomène de résonance est recherché ou pas.

Q17. En posant $Y = \left(\frac{Z_0}{X_0}\right)^2$ et $\xi = \frac{1}{u}$, et réalisant une étude (complète) de la fonction $Y(\xi)$, montrer qu'il ne peut pas y avoir résonance si Q est inférieur à une valeur limite Q_0 à déterminer.

Q18. Comment faut-il choisir la pulsation ω_0 par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ? Justifier physiquement ce résultat.

Q19. Préciser le meilleur choix de la valeur de Q pour le sismographe, en terme de fidélité de réponse et de durée de régime transitoire.

Q20. Déterminer l'ordre de grandeur de l'allongement du ressort à l'équilibre d'un sismographe optimisé pour détecter des ondes sismiques dont la période est proche de la seconde. Commenter la valeur obtenue.

II.B) Le sismographe de Lacoste

Pour enregistrer fidèlement des secousses de périodes plus grandes, un autre modèle de sismographe, appelé sismographe de Lacoste, est utilisé. Comme le sismographe simple, le sismographe de Lacoste, schématisé sur la figure ci-après, est solidaire d'un bâti.

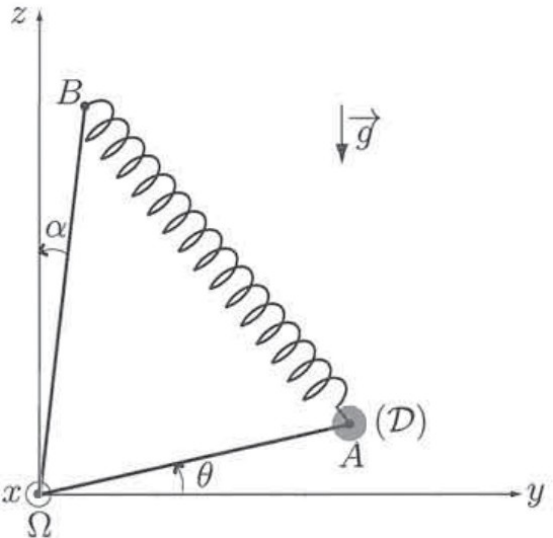
Une tige métallique ΩA , de masse négligeable, peut tourner librement autour de l'axe Ωx . À l'extrémité A de cette tige est accroché un disque (\mathcal{D}) de masse m assimilé à un point matériel.

Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k , de longueur à vide nulle, relie l'extrémité A de la tige à l'extrémité B d'une autre tige métallique ΩB , immobile par rapport au bâti.

L'angle **fixe** entre la tige ΩB et la verticale ascendante Ωz est noté α . Le ressort AB est toujours rectiligne.

Les longueurs des tiges sont notées : $\Omega B = d$ et $\Omega A = \ell$

L'angle θ entre l'axe Ωy et la tige ΩA peut varier entre dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2 - \alpha]$.



Dans un premier temps, on suppose $\alpha = 0$.

Q21. Établir la condition d'équilibre du disque et montrer que cette condition peut s'écrire : $(kd - mg) \cos \theta = 0$

NDFG : Une annexe de géométrie est fournie en fin de sujet.

Q22. Déterminer la condition nécessaire pour que la position $\theta = 0$ corresponde à une position d'équilibre. Comment qualifier cet équilibre ?

Dans la pratique, la condition précédente ne peut jamais être exactement réalisée et le dispositif se stabilise en $\theta = \pm \pi/2$. Pour remédier à cela, la tige ΩB est inclinée d'un angle α .

Q23. Déterminer l'énergie potentielle élastique associée au système disque-ressort en fonction de θ .

NDFG : L'annexe de géométrie est toujours présente en fin de sujet.

Q24. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du disque en fonction de θ .

Q25. Montrer que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable pour le disque à condition que $\cos \alpha = \frac{mg}{kd}$. Par la suite, cette condition est supposée vérifiée.

Q26. Établir l'équation différentielle associée au mouvement du disque autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

Q27. Montrer que la pulsation des oscillations de petite amplitude du disque s'exprime sous la forme :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{\ell}}$$

Le dispositif est soumis à une secousse sismique au cours de laquelle le mouvement vertical du sol est toujours décrit par une vibration de la forme : $Z_S(t) = Z_0 \cos(\omega t)$

On admet qu'en présence d'un dispositif amortisseur semblable à celui du sismographe simple, l'équation différentielle associée au mouvement du disque peut s'écrire, en posant $z = \ell \theta$, sous la forme :

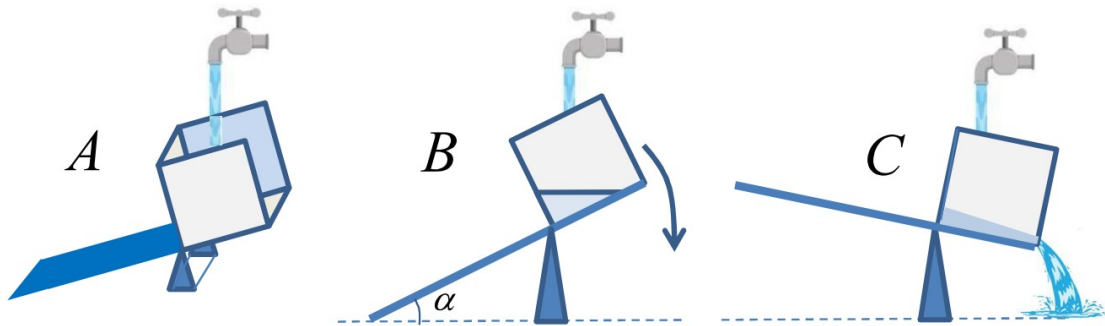
$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_1^2 z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

Q28. Expliquer l'intérêt de ce dispositif par rapport au sismographe simple. Proposer des valeurs pertinentes de l'angle α et de la longueur ℓ pour étudier des ondes sismiques de période 10 s.

3^{ème} Problème : Étude d'oscillateurs de relaxation (≈ 1h30min)

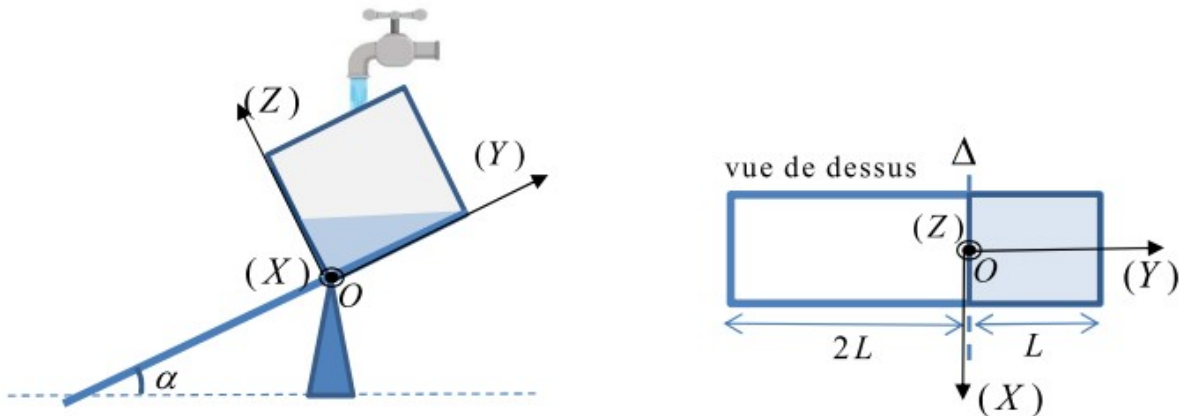
III.A) La bascule à eau : un oscillateur de relaxation mécanique

Le système ci-dessous constitue un premier exemple d'oscillateur de relaxation. Un robinet alimente régulièrement un récipient posé sur le côté droit d'une balançoire initialement inclinée à gauche (schéma A). Le poids de l'eau finit par faire basculer la planche (schéma B) et le récipient se déverse sur la droite (schéma C), puis remonte et retrouve sa position initiale A. Dans cet exercice nous allons déterminer à quelle condition un tel basculement est possible.



La bascule est constituée d'une planche rectangulaire homogène de masse M , de largeur L et de longueur $3L$. Cette planche est initialement inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Elle peut pivoter sans frottement autour d'un axe horizontal Δ parallèle à son petit côté et passant aux $2/3$ de sa longueur (schéma ci-dessous). Le récipient a la forme d'un cube de côté L (ouvert sur le haut et sur le côté droit). Sa masse est négligeable.

Q29. Exprimer $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{\text{planche}})$ le moment du poids de la planche par rapport à l'axe Δ en fonction de M , g , L et α dans la position A. On conviendra que l'axe Δ est orienté vers le lecteur, c'est-à-dire dans la direction (X) du schéma ci-dessous.



On suppose pour l'instant que l'eau est montée jusqu'au bord droit du cube sans que la planche ne pivote, comme indiqué sur le schéma.

Q30. Exprimer la masse m_{tot} de l'eau contenue dans le récipient en fonction de sa masse volumique ρ , de L et de α .

On admet que dans le repère $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ orthonormé direct lié à la planche de la balançoire (voir schéma ci-dessus), les coordonnées du centre de masse G de l'eau contenue dans le récipient valent :

$$X_G = 0 ; Y_G = \frac{L}{3} \text{ et } Z_G = \frac{L}{3} \tan \alpha$$

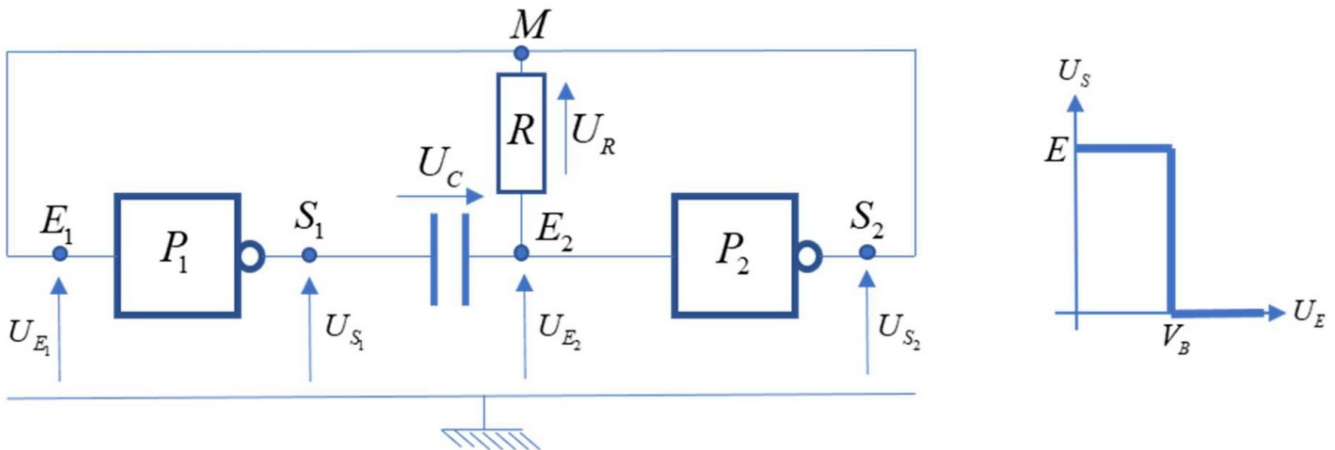
Q31. Exprimer en fonction de m_{tot} , g et α les coordonnées dans ce même repère du vecteur $\vec{\mathcal{P}}_{eau}$ poids de l'eau dans le récipient. En déduire $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{eau})$, le moment du poids de l'eau par rapport à l'axe de rotation.

Q32. En déduire qu'une première condition nécessaire pour le basculement de la planche est : $\alpha < 45^\circ$. En donner une interprétation géométrique simple.

Q33. La condition $\alpha < 45^\circ$ étant remplie, déterminer la valeur maximale M_{max} de la masse M de la planche qui autorise un basculement au cours du remplissage du réservoir. Calculer M_{max} pour : $\alpha = 30^\circ$, $\rho = 1,0 \text{ kg.L}^{-1}$ et $L = 50 \text{ cm}$.

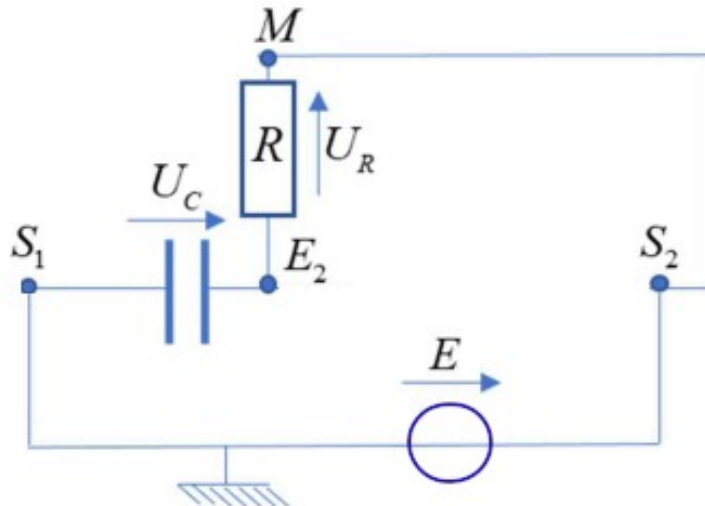
III.B) Un oscillateur de relaxation électronique

Les portes logiques P_1 et P_2 utilisées dans le montage ci-dessous sont des composants actifs, qui ont leur propre alimentation. Ce sont des inverseurs : leur caractéristique est indiquée sur le schéma ci-dessous à droite : pour une tension d'entrée U_E inférieure à la tension de basculement V_B , la tension de sortie U_S vaut E (avec $E > V_B$). Lorsque la tension d'entrée U_E passe au-dessus de V_B , la sortie U_S passe de E à 0 . L'impédance d'entrée des portes est considérée comme infinie, ce qui signifie que les courants d'entrée (à gauche des portes) sont nuls. Par contre leur courant de sortie est *a priori* quelconque. Nous allons déterminer la période des oscillations du potentiel des points du circuit.



On suppose que le système se trouve initialement dans l'état suivant : $U_{S2} = U_{E1} = E$; $U_{S1} = 0$ et $U_C = 0$ (le condensateur de capacité C est déchargé).

Q34. Prouver que le circuit électrique équivalent dans l'état initial est le suivant :



Q35. Justifier sans calcul que la tension U_{E2} va varier. Va-t-elle diminuer ou augmenter ?

Cette phase s'achève lorsque U_{E2} atteint V_B et nous choisirons cet instant comme origine des temps. À $t = 0^-$ (c'est-à-dire juste avant le basculement), on a donc $U_{S2} = U_{E1} = E$; $U_{S1} = 0$ et $U_{E2} = V_B$. La porte P_2 bascule.

Q36. Que valent ces tensions à l'instant $t = 0^+$, juste après le basculement de la porte 2 ? Justifier (**NDFG** : on pourra notamment prouver que la porte P_1 bascule également...).

Q37. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur dans la phase qui suit.

Q38. En déduire l'expression de $U_C(t)$ en fonction de E, V_B, R, C et t , puis celle de $U_{E2}(t)$ pendant cette phase.

Cette phase s'achève à l'instant T_B pour lequel U_{E2} atteint de nouveau V_B .

Q39. Vérifier que : $T_B = RC \ln\left(\frac{V_B + E}{V_B}\right)$.

Q40. Que vaut la tension $U_C(t)$ à $t = T_B^-$ (juste avant T_B) ? Que valent les tensions $U_{S2}, U_{E1}, U_{S1}, U_{E2}$ et U_C à $t = T_B^+$ (juste après T_B) ?

Q41. Montrer que dans la phase qui suit : $U_{E2}(t) = E + (V_B - 2E) \exp\left(-\frac{(t-T_B)}{RC}\right)$.

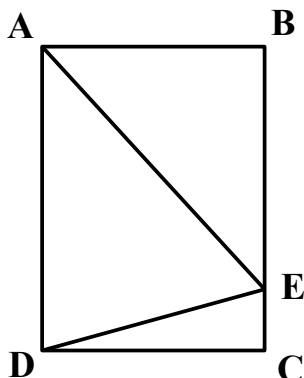
Q42. Un nouveau basculement se produit à l'instant $T = T_B + T_H$. Établir l'expression de T_H et de T en fonction de R, C, E et V_B .

Q43. Justifier que T peut être qualifiée de *période des oscillations*.

Q44. Estimer la valeur numérique de T lorsque : $R = 100 \text{ k}\Omega, C = 10 \text{ nF}, E = 10 \text{ V}, V_B = 5 \text{ V}$.

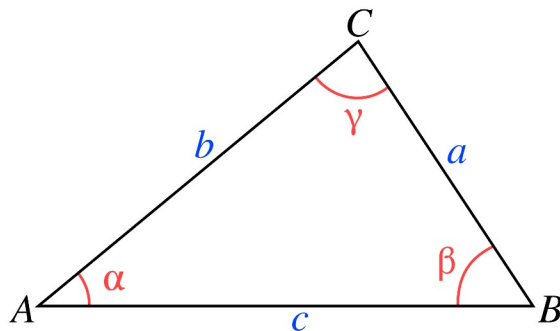
ANNEXE : Rappels de géométrie (< 10 min)

Q45. Prouver que l'aire du triangle (quelconque) AED est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD :



N.B. : cette question est intimement liée à la question **Q21**.

Q46. Théorème d'Al-Kashi (ou loi des cosinus) : Prouver que dans le triangle quelconque ABC suivant, on a (entre autres) : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.



N.B. : cette question est intimement liée à la question **Q23**.

Fin de l'épreuve