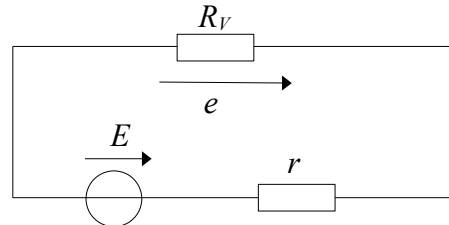


Correction du DS n°7

1^{er} Problème : Modélisation d'un pH-mètre et filtrage (CCS TSI 2021)

I.A) Modélisation du pH-mètre

Q1. Schéma équivalent du circuit de mesure :



On en déduit, grâce à un **pont diviseur de tension** que la tension mesurée vaut :

$$e = \frac{R_V}{r+R_V} E = \frac{E}{1+\frac{r}{R_V}} \quad \text{A.N. : } e = \frac{0,20 \text{ mV}}{1+\frac{10}{1,0}} = 0,018 \text{ mV} \ll E$$

On constate que le voltmètre a une résistance interne R_V inférieure à la résistance r (énorme ! Drôle de notation, du coup...) du pH-mètre, ce qui fait que la tension mesurée est très faible devant la f.é.m. du pH-mètre : la mesure perturbe énormément le circuit !

Q2. Pour commettre une erreur inférieure à 10 % sur la mesure e' de E , il faut que : $E - e' < 0,10 E$, soit :

$$E - \frac{R'_V}{r+R'_V} E < 0,10 E \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{r}{R'_V}} > 0,90 \Leftrightarrow 1+\frac{r}{R'_V} < \frac{1}{0,90} \Leftrightarrow \frac{R'_V}{r} > 9 \Leftrightarrow \boxed{R'_V > 9 r}$$

A.N. : $R'_V > 90 \text{ M}\Omega$: ce n'est pas donné à n'importe quel voltmètre !!!

Q3. Le signal de la figure 3 correspond à une fonction sinusoïdale de valeur moyenne égale à $E_0 = 0,20$ mV, d'amplitude $E_1 = 0,05$ mV, de période T telle que $7 T = 1,42 \text{ s}$, et donc de fréquence :

$f = \frac{1}{T} = \frac{7}{1,42 \text{ s}} = 4,9 \text{ Hz}$. On en déduit la décomposition spectrale suivante :



I.B) Filtrage linéaire

Q4. Étude asymptotique du filtre à basse fréquence : le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert, et donc : $u_2 = u_1$ car $u_R = 0$ en absence de courant. Ce filtre laisse donc passer les basses fréquences.

Étude asymptotique du filtre à haute fréquence : le condensateur se comporte alors comme un fil de connexion, et donc : $u_2 = 0$. Ce filtre ne laisse donc pas passer les hautes fréquences.

Il s’agit d’un filtre passe-bas, ce qui est adapté dans le cas présent puisqu’on souhaite mesurer la composante continue E_0 et donc se débarrasser de l’harmonique fondamentale à la fréquence $f = 4,9$ Hz.

Q5. La fonction de transfert du filtre vaut : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{Z_C}{Z_C + R}$ d’après la loi des ponts diviseurs de tension en RSF. On en déduit donc que : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_C}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$. Cette fonction de transfert

est donc bien de la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $H_0 = 1$ (gain statique) et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Q6. Par définition, le gain du filtre est : $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \left| \frac{1}{1 + jx} \right|$ soit : $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Et la phase est : $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg\left(\frac{1}{1 + jx}\right) = -\arg(1 + jx)$ soit $\varphi(x) = -\arctan(x)$

Q7. La pulsation réduite de coupure à -3 dB est telle que $G(x_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$

D’où : $x_C = 1$

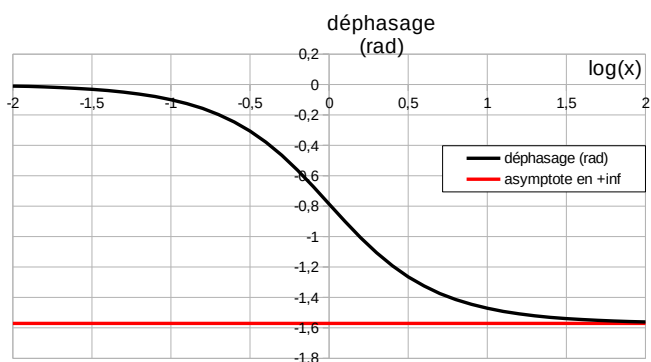
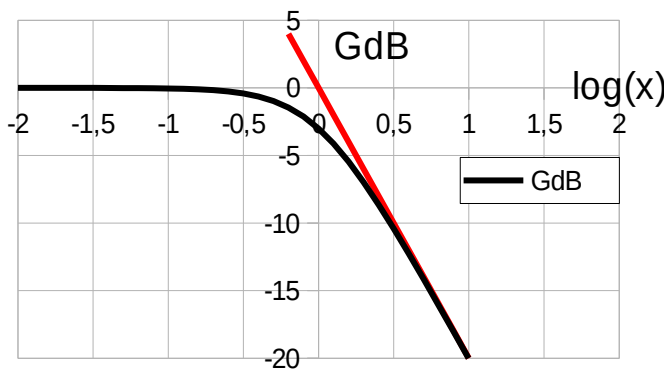
Q8. Le gain en décibels est par définition :

$$G_{dB}(x) = 20 \log G(x) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -10 \log(1+x^2)$$

À basse fréquence : $x \rightarrow 0$, et donc $G_{dB} \rightarrow 0$: le gain en décibels a donc l’axe des abscisses comme asymptote horizontale.

À haute fréquence : $x \gg 1$, et donc $G_{dB}(x \gg 1) \simeq -10 \log(x^2) = -20 \log x$: le gain en décibels a donc une asymptote oblique de pente -20 dB/décade et d’ordonnée à l’origine nulle.

Q9. On obtient le diagramme de Bode suivant :



Q10. Puisque $G(x=0)=1$, alors $A_1 = E$: la composante continue n'est pas modifiée par le filtre.
 Par ailleurs, puisque le filtre est linéaire, il ne modifie pas la fréquence des harmoniques, donc : $\omega_2 = 10 \omega_0$ et donc $x_2 = 10$.

Enfin, par définition du gain : $G(x_2) = \frac{A_2}{E/4} = \frac{1}{\sqrt{1+10^2}} \Leftrightarrow A_2 \simeq \frac{E}{40}$

Et par définition de la phase : $\varphi(x_2) = \psi = -\arctan(10)$

A.N. : $A_1 = 0,20 \text{ mV}$; $A_2 = \frac{0,20 \text{ mV}}{40} \simeq 5,0 \mu\text{V}$ et $\psi \simeq -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Le filtre a donc fortement atténué le bruit parasite dû à l'agitation mécanique.

2^{ème} Problème : Le retour du sismographe (≈ 45 min)

II.A) Le sismographe simple

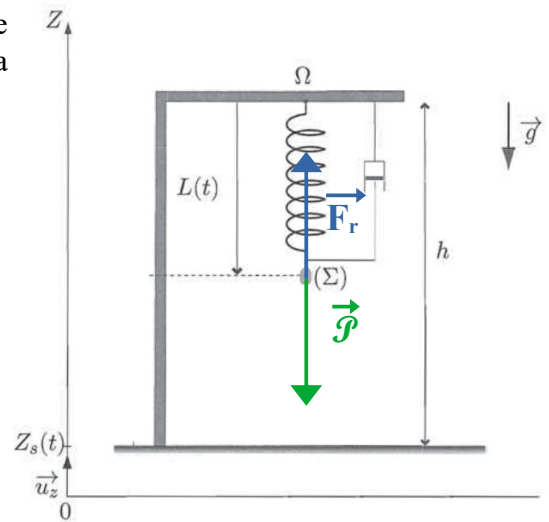
Q11. Le système {solide (Σ) de masse $m=cste$ } est à l'équilibre dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. D'après la première loi de Newton, il est donc pseudo-isolé.

Bilan des forces exercées à l'équilibre :

- Poids : $\vec{\mathcal{P}} = -mg \vec{u}_z$
- Force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = k(L_1 - L_0) \vec{u}_z$

$$\vec{\mathcal{P}} + \vec{F}_r = \vec{0} \Leftrightarrow -mg + k(L_1 - L_0) = 0$$

D'où : $L_1 = L_0 + \frac{mg}{k}$



Q12. On identifie les paramètres :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: la **pulsation propre de l'oscillateur harmonique**, c'est-à-dire la pulsation des oscillations qui auraient lieu en l'absence d'amortissement du système masse-ressort, et telle que : $[\omega_0] = T^{-1}$
- $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$: le **facteur de qualité**, qui caractérise l'amortissement des oscillations qui ont lieu en présence des frottements fluides, et tel que : $[Q] = 1$ (Q est un nombre sans dimension)

Q13. On cherche la **réponse en régime sinusoïdal forcé**. On travaille donc en **grandeurs complexes**, de telle sorte que $x(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ soit associé à la forme : $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Puisque x est une solution particulière de l'équation différentielle, alors :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 Z_0 e^{j\omega t} \Leftrightarrow \left[-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right] X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \omega^2 Z_0 e^{j\omega t}$$

On en déduit que :

$$\frac{X_0 e^{j\varphi}}{Z_0} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, et en passant au module, on obtient :

$$\boxed{\frac{X_0}{Z_0} = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}}$$

Q14. On détermine mathématiquement que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2}{\sqrt{u^4}} = 1$$

L'expression fournie à la question **Q13** est donc compatible, à haute et basse fréquence, avec l'allure du graphe.

Q15. On constate donc que le sismographe reproduit (fidèlement) les grandes fréquences, mais très mal les basses fréquences : il s'agit donc d'un **filtre passe-haut**.

Q16. Le phénomène de résonance en amplitude du sismographe correspond au passage par un maximum de l'amplitude de la réponse du sismographe. Elle a visiblement ici lieu pour les valeurs $Q=1$ et $Q=2$ lorsque $u \in]1,2[$. Dans le cas du sismographe, ce phénomène de résonance n'est pas du tout recherché puisqu'on désire reproduire fidèlement les oscillations du sol.

Q17. Avec les changements de variable proposés, on obtient :

$$Y(u) = \frac{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}{u^4} = \frac{1}{u^4} - \frac{2u^2}{u^4} + \frac{u^4}{u^4} + \frac{1}{u^2 Q^2} = \left(\frac{1}{u}\right)^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \left(\frac{1}{u}\right)^2 + 1$$

et donc : $Y(\xi) = \xi^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \xi^2 + 1$

Pour étudier cette fonction, on la dérive : $\frac{dY}{d\xi} = 4\xi^3 + 2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\xi = 4\xi\left(\xi^2 + \frac{1}{2Q^2} - 1\right)$

Pour $u > 0$, $\xi > 0$. Et donc lorsque $\frac{1}{2Q^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{Q < Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$, la dérivée de fonction Y ne s'annule

jamais sur \mathbb{R}^{+*} donc la fonction Y ne passe par aucun extremum sur \mathbb{R}^{+*} , tout comme la fonction X_0/Z_0 : il n'y a pas de résonance possible.

Q18. Pour obtenir un sismographe qui reproduit fidèlement les oscillations du sol, il faut choisir $u \gg 1$, et donc une pulsation propre du sismographe ω_0 beaucoup plus petite que la pulsation ω de la secousse sismique. Physiquement, cela correspond à avoir une masse m suffisamment grande pour que le système réagisse au mouvement et une constante de raideur k pas trop grande pour que le ressort se déforme facilement.

Q19. Pour la fidélité, il peut être intéressant de choisir $Q = Q_0$ puisque cela laisse une plus grande marge de valeurs de ω accessibles au sismographe, mais en terme de durée de régime transitoire, il est plus intéressant de choisir $Q = Q_c = 0,5$, valeur pour laquelle le régime transitoire (critique) est le plus court. Vous avez pu constater qu'on privilégie ce second argument dans le DM5 !

Q20. En choisissant $Q = 0,5$, alors il faut travailler avec $u > 10$ (valeur « large » pour faciliter le calcul) et donc $\omega_0 < \frac{\omega}{10} = \frac{2\pi}{10T}$. Dans ces conditions, l'allongement du ressort à l'équilibre doit valoir :

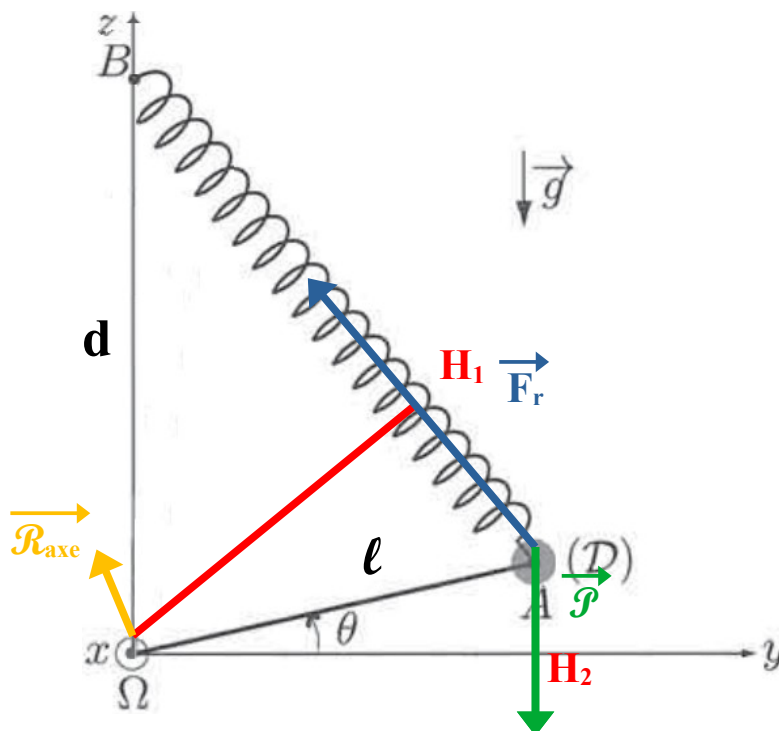
$$L_1 - L_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2} > \frac{10^2 g T^2}{4\pi^2}$$

$$\text{A.N. : } L_1 - L_0 \simeq \frac{10^2 \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times (1 \text{ s})^2}{4 \times 10} = \underline{3 \cdot 10^1 \text{ m}} !$$

On en déduit que ce type de sismographe n'est pas adapté pour l'étude des ondes sismiques de périodes un peu élevées.

II.B) Le sismographe de Lacoste

Q21. Dans le référentiel d'étude, le référentiel terrestre local, supposé galiléen, le disque est à l'équilibre en rotation lorsque la somme (algébrique) des moments des forces exercées sur le système {disque \mathcal{D} + tige ΩA } par rapport à l'axe Ωx est nulle.



Bilan des actions mécaniques sur le système :

- poids, principalement dû au disque, de moment : $\mathcal{M}_{\Omega x}(\vec{\mathcal{P}}_{\mathcal{D}}) = -mg \times l \cos \theta$
- réaction de l'axe, de moment nul car sa droite d'action coupe l'axe : $\mathcal{M}_{\Omega x}(\vec{\mathcal{R}}_{axe}) = 0$
- force de rappel du ressort, de moment : $\mathcal{M}_{\Omega x}(\vec{F}_r) = +\|\vec{F}_r\| \times \Omega H_1 = k AB \times \Omega H_1$ avec AB la longueur, donc l'allongement algébrique du ressort, de longueur à vide considérée comme nulle et ΩH_1 le **bras de levier** de cette force.

$$\text{Et d'après la question Q45. : } AB \times \Omega H_1 = 2 \mathbf{a}_{AB\Omega} = \Omega B \times \Omega H_2 = d \times l \cos \theta$$

Ainsi, la condition d'équilibre du disque (en rotation) s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\Omega x}(\vec{\mathcal{P}}_{\mathcal{D}}) + \mathcal{M}_{\Omega x}(\vec{\mathcal{R}}_{axe}) + \mathcal{M}_{\Omega x}(\vec{F}_r) = 0 \Leftrightarrow -mg l \cos \theta + k d l \cos \theta = 0$$

Et puisque $l \neq 0$, cette condition peut s'écrire : $\boxed{(k d - mg) \cos \theta = 0}$

Q22. $\theta = 0$ est une position d'équilibre à condition que : $k d = m g$

Mais dans ces conditions, n'importe quelle valeur de θ correspond à une valeur d'équilibre. On appelle ce type d'équilibre un **équilibre indifférent**.

Q23. L'énergie potentielle élastique associée au système disque-ressort est par définition, et en considérant l'énergie potentielle nulle lorsque le ressort n'est pas étiré, c-à-d pour $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow AB = 0$:

$$E_p^{elast.}(AB) = \frac{1}{2} k AB^2$$

Or, d'après le théorème d'Al Kashi (cf. **Q46.**) : $AB^2 = \Omega A^2 + \Omega B^2 - 2 \Omega A \Omega B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)$

Donc : $E_p^{elast.}(\theta) = \frac{1}{2} k [\ell^2 + d^2 - 2 \ell d \sin(\theta + \alpha)]$

Q24. Par ailleurs, l'énergie potentielle de pesanteur du disque vaut, en considérant l'altitude $z = 0$ (donc l'angle $\theta = 0$) comme origine de cette énergie potentielle : $E_p^{pes.}(z) = +m g z$, soit :

$$E_p^{pes.}(\theta) = m g \ell \sin \theta$$

Q25. Le système étant conservatif (la réaction de l'axe ne travaille pas dans le mouvement de rotation), on aura une position d'équilibre lorsque l'énergie potentielle du système passe par une valeur extrême,

donc lorsque : $\frac{dE_p^{tot}}{d\theta} = 0$, avec $E_p^{tot} = E_p^{elast.} + E_p^{pes.}$, ce qui correspond donc à la condition :

$$-k \ell d \cos(\theta + \alpha) + m g \ell \cos \theta = 0 \Leftrightarrow m g \cos \theta = k d \cos(\theta + \alpha)$$

Ainsi, pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre (stable) pour le disque, il est nécessaire

que : $\cos \alpha = \frac{m g}{k d}$

Q26. On retrouve l'équation différentielle associée au mouvement du disque autour de la position d'équilibre $\theta = 0$ grâce à l'intégrale première du mouvement : $E_m = E_c + E_p^{tot} = cste$,

avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2$ puisque l'essentiel de la masse du système est concentrée dans le disque.

On en déduit donc que : $\frac{dE_m}{dt} = 0 = m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - k \ell d \cos(\theta + \alpha) \dot{\theta} + m g \ell \cos \theta \dot{\theta}$

Cette équation se réécrit, puisque la fonction vitesse angulaire n'est pas identiquement nulle :

$$m \ell \ddot{\theta} - k d [\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha] + m g \cos \theta = 0$$

Soit : $m \ell \ddot{\theta} + (m g - k d \cos \alpha) \cos \theta + k d \sin \theta \sin \alpha = 0$

Et puisque $m g = k d \cos \alpha$, cette expression se simplifie donc en : $\ddot{\theta} + \frac{k d \sin \alpha}{m \ell} \sin \theta = 0$

Q27. Pour des oscillations de petite amplitude autour de $\theta = 0$, on peut faire l'**approximation des petits angles** et considérer que $\sin \theta \simeq \theta$. On retrouve dans ce cas l'équation différentielle d'un **oscillateur**

harmonique de pulsation propre : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k d \sin \alpha}{m \ell}} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\cos \alpha \ell}} = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{\ell}}$

Le dispositif est soumis à une secousse sismique au cours de laquelle le mouvement vertical du sol est toujours décrit par une vibration de la forme :

On admet qu'en présence d'un dispositif amortisseur semblable à celui du sismographe simple, l'équation différentielle associée au mouvement du disque peut s'écrire, en posant $z = \ell \theta$, sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_1^2 z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

Q28. L'équation différentielle sur laquelle on retombe est tout à fait similaire à celle du sismographe verticale, ce qui permet d'en déduire un comportement analogue. La principale différence réside dans le fait qu'on peut ajuster à notre guise la valeur de la pulsation propre de l'oscillateur, notamment en jouant sur les paramètres α et ℓ .

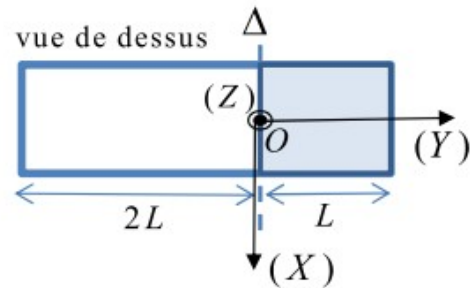
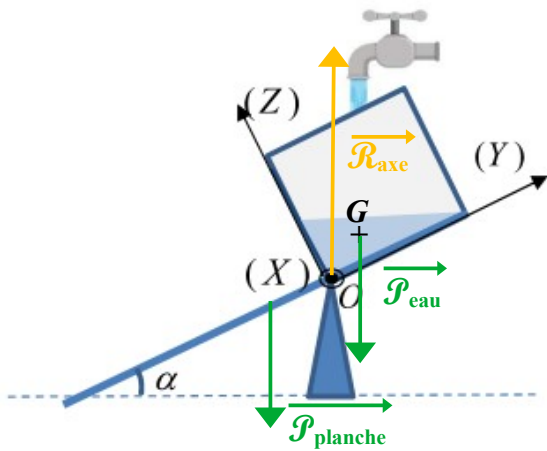
Ainsi, pour étudier des ondes sismiques de période 10 s, il faudra que : $\omega_1 < \frac{\omega}{10} = \frac{2\pi}{10T}$

3^{ème} Problème : Étude d'oscillateurs de relaxation

III.A) La bascule à eau : un oscillateur de relaxation mécanique

Q29. Le poids de la planche s'applique au centre de gravité de la planche, situé au centre de la planche donc à une distance $\frac{L}{2}$ de O. Le bras de levier de cette force vaut donc $d = \frac{L}{2} \cos \alpha$, et son moment

par rapport à l'axe Δ est : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{\text{planche}}) = +M g \frac{L}{2} \cos \alpha$



Q30. La masse m_{tot} de l'eau contenue dans le récipient vaut : $m_{\text{tot}} = \rho \times \frac{L \times L \tan \alpha}{2} \times L = \frac{1}{2} \rho L^3 \tan \alpha$

Q30. La projection du poids de l'eau dans le repère $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ est : $\vec{\mathcal{P}}_{\text{eau}} \begin{pmatrix} 0 \\ -m_{\text{tot}} g \sin \alpha \\ -m_{\text{tot}} g \cos \alpha \end{pmatrix}$

Le moment du poids de l'eau par rapport à l'axe D vaut donc : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{\text{eau}}) = (\vec{OG} \wedge \vec{\mathcal{P}}_{\text{eau}}) \cdot \vec{u}_X$, soit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{\text{eau}}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ L/3 \\ L/3 \tan \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m_{\text{tot}} g \sin \alpha \\ -m_{\text{tot}} g \cos \alpha \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{u}_X = -\frac{L}{3} m_{\text{tot}} g [\cos \alpha - \sin \alpha \tan \alpha]$$

$$D'o\grave{u} : \mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{eau}) = -\frac{1}{6} L^4 \rho g \sin \alpha [1 - \tan^2 \alpha]$$

Q31. Puisque $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{planche}) > 0$ et que la 3^{ème} force qui intervient, la réaction de l'axe sur la planche, n'a pas d'impact sur la rotation (sa droite d'action coupe l'axe), alors il faut nécessairement, pour que la bascule ait lieu, que :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{eau}) < 0 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha < 1 \Leftrightarrow \tan \alpha < 1, \text{ donc que } \alpha < 45^\circ$$

Précision pour M Pillet : puisque $\alpha \in]0, \pi/2[$, alors $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$ et $\tan \alpha > 0$!

Interprétation géométrique simple : au-delà de $\alpha = 45^\circ$ (et donc si la cale est trop haute) le centre de gravité de la masse d'eau passe à gauche de O , et son moment ne permet pas de faire de bascule.

Q32. La condition $\alpha < 45^\circ$ étant remplie, pour avoir la bascule, il faut que :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{planche}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}_{eau}) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} L^4 \rho g \sin \alpha [1 - \tan^2 \alpha] > M g \frac{L}{2} \cos \alpha$$

$$\text{Soit : } M < M_{max} = \frac{1}{3} L^3 \rho \tan \alpha [1 - \tan^2 \alpha]$$

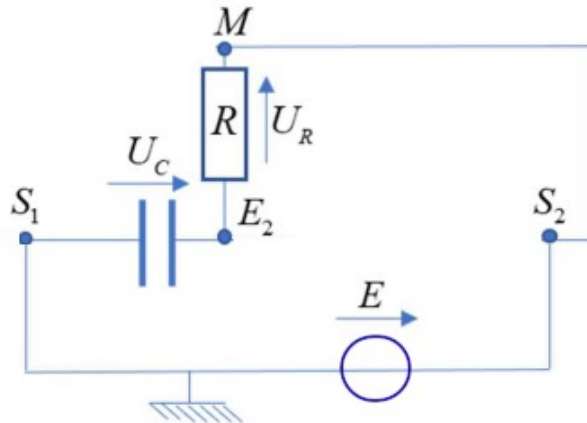
A.N. :

$$M_{max} = \frac{1}{3} \times (5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m})^3 \times 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \tan(30^\circ) \times [1 - \tan^2(30^\circ)] = \frac{125}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$\underline{M_{max} = \frac{125}{9} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ kg} \approx 16 \text{ kg}}$$

III.B) Un oscillateur de relaxation électronique

Q33. Les courants d'entrée étant nuls, on peut enlever les branches correspondantes. Par ailleurs, $U_{S2S1} = V_{S2} - V_{S1} = U_{S2} - U_{S1} = E - 0$. D'où le circuit électrique équivalent dans l'état initial :



Q34. On reconnaît un circuit de charge classique de condensateur, pour lequel la tension $U_C(t) = U_{E2}(t)$ va augmenter progressivement de $U_C = 0$ (condensateur déchargé) vers E .

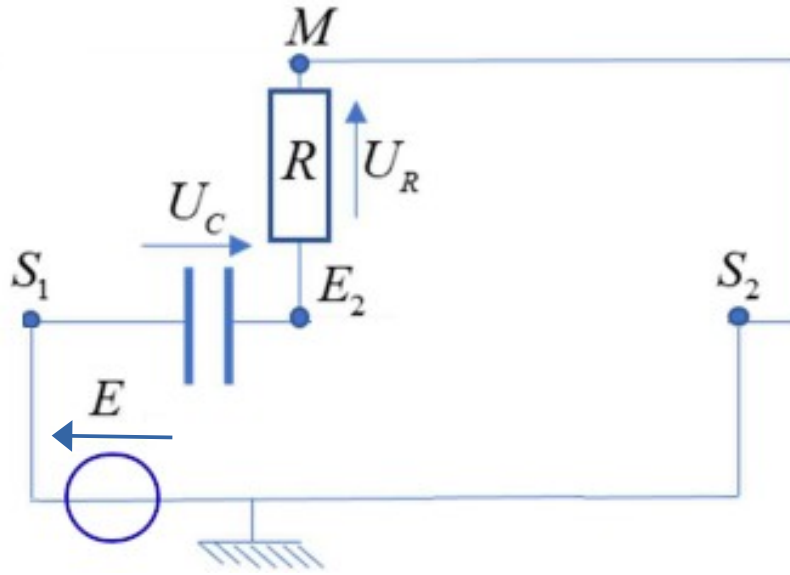
Cette phase s'achève lorsque U_{E2} atteint V_B et cet instant est choisi comme origine des temps. À $t = 0^-$ (c'est-à-dire juste avant le basculement), on a donc $U_{S2} = U_{E1} = E$; $U_{S1} = 0$ et $U_{E2} = V_B$. La porte P_2 bascule.

Q35. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $U_C(t=0^-) = U_C(t=0^+) = V_B$.

Puisque la porte P_2 bascule, on a $U_{S2}(t=0^+) = 0$. Mais puisque $U_{S2} = U_{E1} (= U_M)$, alors $U_{E1}(t=0^+) = 0$, ce qui signifie que la porte P_1 a donc également basculé et que $U_{S1}(t=0^+) = E$.

On en déduit enfin par additivité des tensions que $U_{E2}(t=0^+) = U_{S1}(t=0^+) + U_C(t=0^+) = E + V_B$.

Q36. Pour $t = 0^+$, on a $U_{S1S2} = V_{S1} - V_{S2} = U_{S1} - U_{S2} = E - 0$. D'où le circuit électrique équivalent pour la phase suivante (jusqu'à la future bascule) :



La loi des mailles s'écrit désormais :
$$-E = U_C + U_R = U_C + Ri = U_C + RC \frac{dU_C}{dt}$$

Q37. Les solutions de cette équation sont, pour $t > 0$: $U_C(t) = A \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) - E$

La continuité de la tension aux bornes du condensateur permet d'affirmer que :

$$U_C(t=0^+) = A \exp^{(0)} - E = U_C(t=0^-) = V_B \Leftrightarrow A = E + V_B$$

D'où l'expression de la tension aux bornes du condensateur :
$$U_C(t) = (E + V_B) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) - E$$

Et celle de $U_{E2}(t) = U_{S1} + U_C(t) = E + U_C(t)$ soit :
$$U_{E2}(t) = (E + V_B) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

Désormais, U_{E2} va diminuer, de la valeur $E + V_B$ vers V_B . Cette phase s'achève à l'instant T_B pour lequel U_{E2} atteint de nouveau V_B .

Q38. On résout l'équation : $U_{E2}(t=T_B) = (E + V_B) \exp\left(\frac{-T_B}{RC}\right) = V_B \Leftrightarrow \frac{V_B + E}{V_B} = \exp\left(\frac{T_B}{RC}\right)$

D'où :
$$T_B = RC \ln\left(\frac{V_B + E}{V_B}\right)$$

Q39. Juste avant la nouvelle bascule de la porte P_2 , on a :
$$U_C(t=T_B^-) = U_{E2}(t=T_B^-) - U_{S1} = V_B - E$$

Après la bascule de la porte P_2 , on a à nouveau $U_{S2}(t=T_B^+) = U_{E1}(t=T_B^+) = E$, ce qui permet

d'affirmer que la porte P_1 bascule également, avec $U_{S1}(t=T_B^+) = 0$. On est donc revenu au circuit

équivalent de la question **Q33.**, mais désormais la tension aux bornes du condensateur vaut par continuité : $U_C(t=T_B^+) = U_C(t=T_B^-) = V_B - E < 0$. Enfin, $U_{E2}(t=T_B^+) = U_C(t=T_B^+) = V_B - E$.

Q40. Le condensateur reprend donc sa charge, avec une tension qui va tendre vers E , mais en partant d'une tension « initiale » négative. La tension du condensateur vérifie désormais l'équation différentielle :

$$E = U_C + RC \frac{dU_C}{dt} \text{ dont les solutions sont de la forme } U_C(t) = B \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E$$

La condition « initiale » permet d'obtenir la constante B , telle que :

$$U_C(t=T_B^+) = B \exp\left(-\frac{T_B}{RC}\right) + E = V_B - E \Leftrightarrow B = (V_B - 2E) \exp\left(\frac{T_B}{RC}\right)$$

d'où l'expression de la tension aux bornes du condensateur : $U_C(t) = (V_B - 2E) \exp\left(-\frac{t-T_B}{RC}\right) + E$, qui est

également celle de $U_{E2}(t)$! D'où :
$$U_{E2}(t) = E + (V_B - 2E) \exp\left(-\frac{t-T_B}{RC}\right)$$

Q41. On obtient l'instant T du nouveau basculement en résolvant l'équation :

$$U_{E2}(t=T) = E + (V_B - 2E) \exp\left(-\frac{T-T_B}{RC}\right) = V_B \Leftrightarrow T - T_B = T_H = RC \ln\left(\frac{2E - V_B}{E - V_B}\right)$$

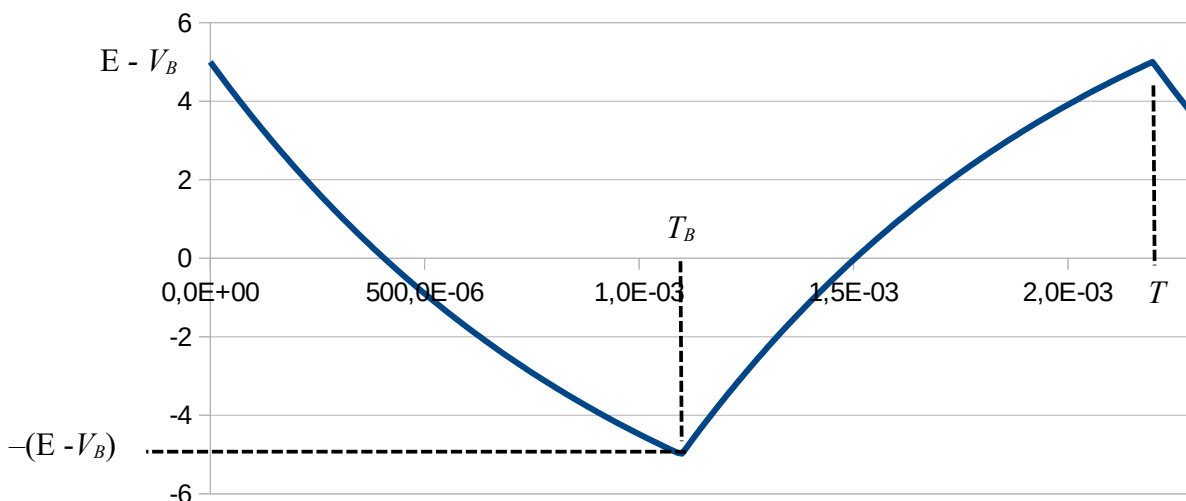
D'où l'expression de T :
$$T = T_B + T_H = RC \ln\left(\frac{(V_B + E)(2E - V_B)}{V_B(E - V_B)}\right)$$

Q42. À l'instant T , on est revenu à la même situation qu'à l'instant $t=0$. Les mêmes bascules des portes vont donc se reproduire avec les mêmes écarts temporels. T est donc bien la *période des oscillations*.

Q43. A.N. :

$$T \approx 100 \cdot 10^3 \times 10 \cdot 10^{-9} \times \ln \frac{(5+10)(2 \times 10 - 5)}{5 \times (10 - 5)} = 1,0 \cdot 10^{-3} \times \ln \frac{15^2}{5^2} = 1,0 \cdot 10^{-3} \times 2 \ln 3 \approx 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2,2 \text{ ms}$$

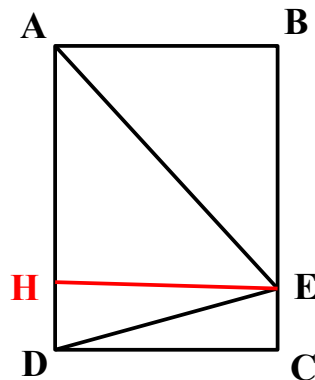
Evolution de la tension aux bornes du condensateur



NB : avec les données de l'énoncé, $T_B = T_H$, mais il est possible de modifier le rapport T_B/T_H en modifiant les valeurs relatives de E et V_B .

Annexe géométrique :

Q45. Première méthode, graphique, en traçant la hauteur issue de E dans le triangle AED :

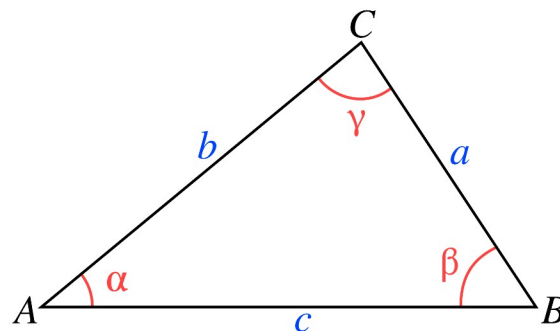


Dans ces conditions, l'aire de HDE est la moitié de celle de HECD, et celle de HAE est la moitié de celle de ABEH. Puisque l'aire du triangle AED = aire de HDE + aire de HAE, et que l'aire du rectangle ABCD = aire de HECD + aire de ABEH, alors l'aire de AED = la moitié de l'aire de ABCD.

Deuxième méthode, à partir de la formule de l'aire d'un triangle :

$$\text{aire de AED} = 1/2 \text{ AD (base) } \times \text{HE (hauteur)} = 1/2 \text{ AD } \times \text{BC} = 1/2 \text{ aire du rectangle ABCD.}$$

Q46. Théorème d'Al-Kashi (ou loi des cosinus) :



La relation demandée découle directement de la **définition et des propriétés du produit scalaire** :

$$a^2 = BC^2 = (\vec{BC})^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \vec{BA} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

Soit : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha}$