

Épreuve de MODELISATION

Mercredi 28 mai 2025 : 15h30 - 17h30

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de quatre parties.

La partie I présente le système étudié dans ce sujet. Elle ne comporte aucune question.

Les parties II, III et IV sont indépendantes et doivent être rendues sur 3 copies différentes !

Si besoin, le candidat pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

Notations :

- Dans tout le sujet, la dérivée par rapport au temps d'une fonction w sera notée \dot{w} .
- La transformée de Laplace d'une fonction f sera désignée à l'aide de la lettre majuscule F .

GÉNÉRATION DE VAGUES DANS UN BASSIN

Les photos et schémas des parties I et II sont issus du site internet : <http://www.wowcompany.com>

PARTIE I - Présentation d'un dispositif de génération de vagues

L'entreprise Wow Company a développé et commercialise depuis les années 1990 un dispositif original de génération de vagues dans un bassin. Ce dispositif appelé « boule à vagues » est de forme globalement sphérique (**figure 1**) et contient un mécanisme équipé de capteurs et d'actionneurs permettant de créer et d'entretenir des vagues.



Figure 1 - Boule à vagues (avant mise à l'eau)

La boule à vagues peut être aussi bien utilisée dans une piscine ouverte au public pour une activité de loisirs (**figure 2.a**) que dans des piscines spécifiques pour l'entraînement au sauvetage en conditions difficiles (**figure 2.b**).



(a)



(b)

Figure 2 - Boule à vagues utilisée pour des loisirs (a) ou pour l'entraînement au sauvetage en mer (b)

La boule à vagues est constituée des éléments suivants qui sont représentés sur la **figure 3** :

- **une enveloppe externe** : de forme globalement sphérique, elle protège les constituants internes ;
- **une charge mobile** : le mouvement vertical de la charge permet de créer les vagues. Cette charge est mise en mouvement grâce à un système bielle-manivelle entraîné par le motoréducteur ;
- **un motoréducteur** : il est utilisé pour générer le mouvement ;
- **un ensemble de capteurs** : les capteurs sont utilisés notamment pour la régulation du moteur ;
- **un détecteur d'eau** : utilisé pour s'assurer que l'eau ne pénètre pas dans la boule à vagues ;
- **un boîtier électronique** : traite les signaux issus des capteurs pour générer la commande du moteur. Le boîtier contient également un accéléromètre ;
- **un câble ombilical** : l'énergie électrique nécessaire au fonctionnement de la boule à vagues transite par ce câble.

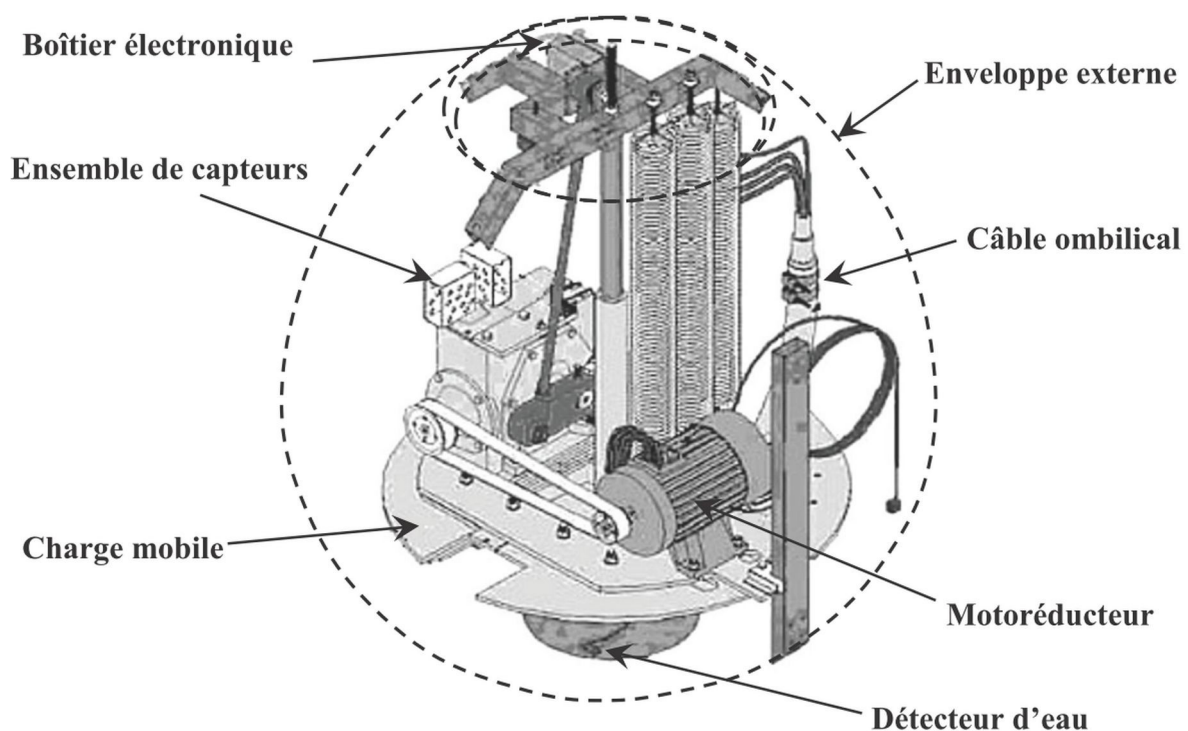


Figure 3 - Principaux constituants de la boule à vagues

Ce sujet porte sur l'étude des conditions optimales de fonctionnement de la boule à vagues. Ainsi, la seconde partie porte sur la mise à l'eau de la boule à vagues. La troisième partie porte sur l'estimation du temps réel d'utilisation de la boule à vagues. La quatrième partie s'intéresse à la réalisation de la commande de la boule.

PARTIE II - Étude de la phase précédant la mise à l'eau de la boule à vagues

Selon la configuration adoptée, notamment dans les piscines destinées aux loisirs, la boule à vagues peut être un équipement qui n'est pas installé à demeure dans la piscine. Il est donc nécessaire, avant et après utilisation, de déplacer la boule à vagues hors de l'eau. La **figure 4** présente une installation où la boule à vagues est déplacée au-dessus de la piscine à l'aide d'un câble relié à un chariot (non visible sur cette figure), lui-même mobile par rapport à la charpente de la piscine.



Figure 4 - Boule à vagues en attente avant sa mise en position dans le bassin

Lors de la mise en place de la boule, deux conditions doivent être vérifiées :

- l'amplitude maximale des oscillations de la boule lors de son déplacement doit être inférieure à 5° ;
- la position horizontale finale de la boule sur le bassin doit être précise à plus ou moins 10 cm.

L'objectif de cette partie est de vérifier ces deux points.

La boule est suspendue par un câble à un treuil. Le treuil est fixé sur un chariot qui peut se déplacer en translation par rapport à la charpente au-dessus du bassin.

Lors du mouvement de la boule au-dessus du bassin pour sa mise en place, le treuil n'est pas actif.

Le chariot et le treuil forment donc un unique ensemble indéformable dans cette phase.

Dans cette partie, l'étude du comportement de la boule sera faite en considérant les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : le câble est inextensible et reste tendu en permanence.

Hypothèse 2 : la boule à vagues évolue en permanence dans un même plan, immobile par rapport au référentiel galiléen.

Hypothèse 3 : l'ensemble {câble ; boule à vagues} est considéré comme indéformable et uniquement en mouvement de rotation par rapport à l'ensemble {chariot ; treuil}.

Hypothèse 4 : l'ensemble des frottements dans ce mécanisme n'est pas négligeable. On considère que ces frottements sont uniquement de type visqueux linéaire.

Hypothèse 5 : la boule peut être considérée comme une masse ponctuelle. La masse du câble est négligée devant la masse de la boule.

Hypothèse 6 : le référentiel terrestre est supposé galiléen.

Les caractéristiques de la boule utilisées dans cette partie sont regroupées dans le **tableau 1**.

<i>Données</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur numérique</i>
Masse de la boule	m	160 kg
Coefficient de frottement visqueux ramené à l'axe de rotation du câble	α	À déterminer dans la partie II.1.
Longueur du câble	d	3,00 m

Tableau 1 - données pour l'étude de la mise à l'eau de la boule à vagues

On notera $\lambda(t)$ le déplacement du chariot par rapport au sol et $\theta(t)$ l'angle de rotation de l'ensemble {câble ; boule à vagues} par rapport au chariot.

L'angle θ caractérise l'orientation du câble par rapport à la verticale. Lorsque que la boule est en équilibre, c'est-à-dire lorsque le câble est vertical, l'angle θ est nul.

II.1. Estimation du coefficient de frottement visqueux α

Pour vérifier que l'amplitude des oscillations reste acceptable et déterminer le temps d'attente nécessaire à la stabilisation de la boule à vagues avant la mise à l'eau, il est nécessaire de connaître les valeurs numériques de tous les paramètres, notamment le coefficient de frottement visqueux b , difficile à estimer *a priori*.

Afin d'en obtenir une valeur réaliste, un essai a été réalisé : alors que le chariot est immobile, la boule est décalée de sa position d'équilibre (position verticale) d'un angle $\theta_0 = 30^\circ$ puis lâchée sans vitesse initiale.

La figure 5 représente l'évolution (en degrés) de la mesure de l'angle θ de la boule au cours du temps. Ce tracé est issu de résultats expérimentaux. La mesure a été faite sur une durée de 12 secondes.

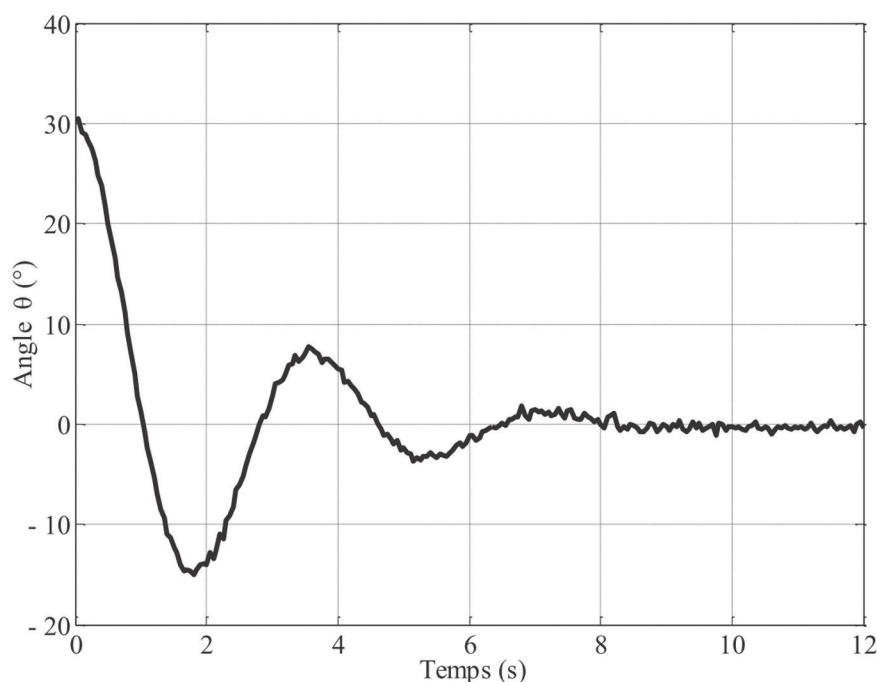


Figure 5 - Évolution de l'angle d'oscillation de la boule à vagues pendant un essai

Le modèle adopté pour l'étude du comportement lors de cet essai est présenté figure 6. Dans ce modèle, l'ensemble rigide {câble ; boule à vagues}, de centre de gravité G, est en rotation d'axe (A, z₀) par rapport au référentiel galiléen. Les vecteurs x₀, y₀ et z₀ forment une base orthonormée directe liée au référentiel galiléen.

Le vecteur AG est de même direction que le vecteur y et de longueur d : AG = -d y

Le passage de la base (x₀, y₀, z₀) à la base (x, y, z) se fait par une rotation d'angle : θ = (x₀, x) = (y₀, y)

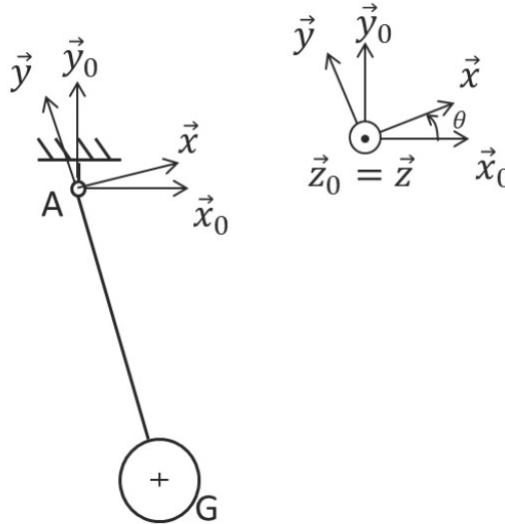


Figure 6 - Modèle de la boule à vagues pour l'estimation du coefficient de frottement visqueux

D'après le modèle choisi de frottements de type visqueux, ceux-ci engendrent une force de frottement \vec{F}_{frot} sur la boule, telle que $\vec{F}_{frot} = -\alpha \vec{V}_{G,boule/0}$ où le coefficient de frottement visqueux α est une constante positive et $\vec{V}_{G,boule/0}$ la vitesse du centre de gravité G de la boule à vagues par rapport au bâti 0. Le champ de pesanteur \vec{g} est tel que $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Q1. Énoncer le théorème de la puissance cinétique appliquée à la boule (aucun calcul n'est attendu à cette question).

Q2. Exprimer la vitesse $\vec{V}_{G,boule/0}$ du centre de gravité G de la boule à vagues par rapport au bâti 0 en fonction de d et θ, puis son énergie cinétique galiléenne \mathcal{E}_c .

Q3. Exprimer les puissances mises en jeu.

Q4. Déterminer l'équation différentielle décrivant l'évolution temporelle de l'angle θ. On admettra que les conditions d'utilisation de la boule sont telles que $\theta \in [-\pi/2 ; \pi/2]$ et que θ est une fonction du temps de classe C² au moins sur l'intervalle de temps considéré.

Q5. En utilisant un développement limité à l'ordre 1 de sin θ en 0, montrer que l'équation différentielle linéarisée du mouvement de la boule à vagues peut se mettre sous la forme :

$$m d \ddot{\theta} = -m g \theta - \alpha d \dot{\theta} \quad (1)$$

On admettra que les solutions de ces deux équations différentielles ont les mêmes propriétés.

Q6. Donner l'équation caractéristique de l'équation différentielle (1) et l'expression de son discriminant.

Q7. À partir du tracé de la **figure 5**, et en utilisant les résultats du cours sur la forme de la solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, que peut-on dire du signe de ce discriminant ? Aucun calcul n'est demandé ici. En déduire la valeur maximale que peut prendre le coefficient de frottement visqueux α (expression littérale en fonction de m, d, et g et valeur numérique).

Q8. En tenant compte des conditions initiales, déterminer l’expression de l’angle θ , solution de l’équation linéarisée (1). L’expression sera donnée en fonction de θ_0 , de ω et de μ où :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d} - \frac{\alpha^2}{4 m^2}} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{\alpha}{2m}$$

À partir du tracé expérimental de la **figure 5** et de l’expression de θ obtenue à l’aide de l’équation différentielle (1), il est possible d’estimer par traitement informatique la valeur du coefficient de frottement visqueux α .

Ce traitement informatique permet d’obtenir comme valeur estimée du coefficient de frottement visqueux $\alpha = 167$ USI. La **figure 7** permet de comparer les résultats expérimentaux et ceux du modèle obtenu avec cette valeur de α . Cette figure montre que les deux courbes, bien que proches, ne sont pas parfaitement superposées et ce, malgré l’utilisation d’un algorithme efficace pour l’estimation du seul paramètre inconnu.

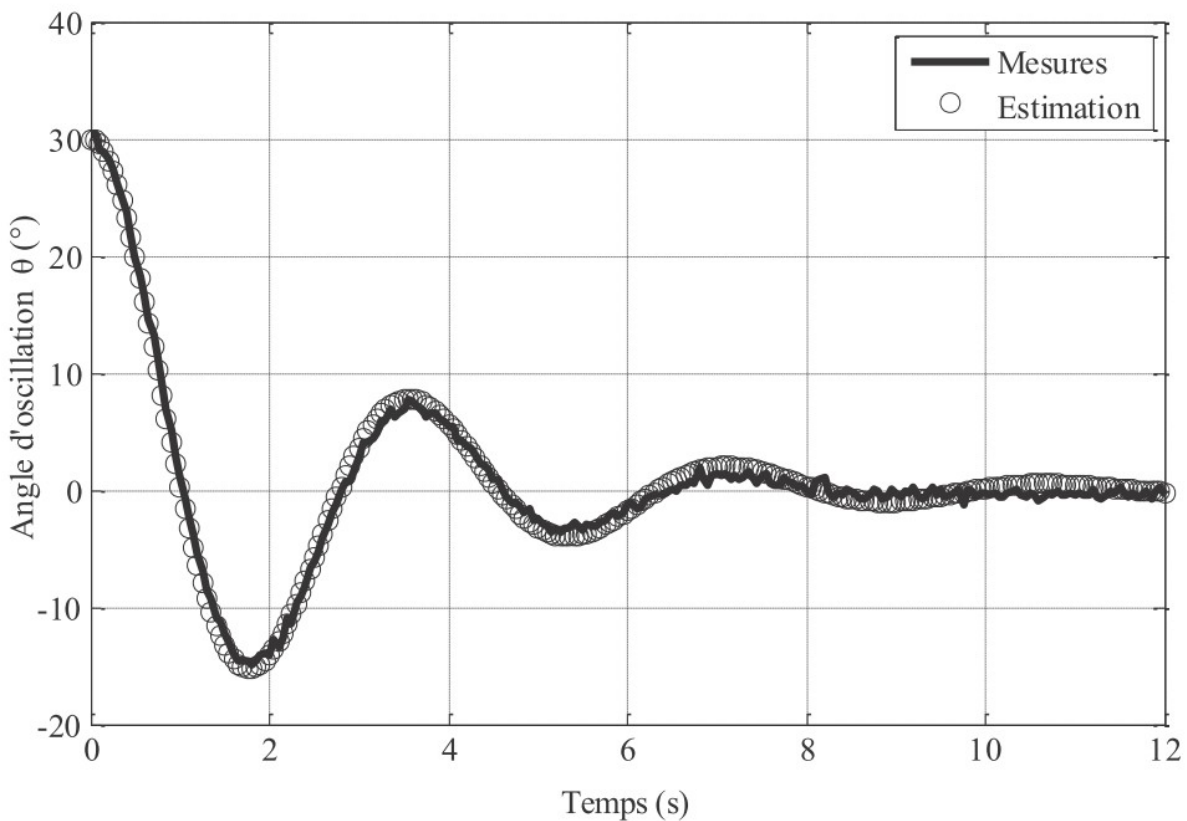


Figure 7 - Comparaison des résultats expérimentaux et du modèle

Q9. Après avoir observé les valeurs prises par l’angle θ , justifier la présence d’un écart entre les deux courbes.

II.2. Vérification du critère d’amplitude maximale et détermination du temps de stabilisation

L’équation différentielle régissant le comportement de la boule à vagues lors des déplacements du chariot est :

$$m d \ddot{\theta} + m g \sin(\theta) + \alpha d \dot{\theta} = -m \ddot{\lambda} \cos(\theta) \quad (2)$$

où $\ddot{\lambda}$ représente l’accélération du chariot dans son mouvement par rapport à la structure fixe de la piscine.

La mise à l'eau se déroule en cinq phases :

- en phase 1, pour $t \in [0 ; t_1]$, on impose une accélération constante au chariot (la vitesse évolue donc de manière affine) d'une vitesse nulle à la vitesse maximale $\dot{\lambda}_{max}$;
- en phase 2, pour $t \in [t_1 ; t_2]$, on impose une vitesse constante ;
- en phase 3, pour $t \in [t_2 ; t_3]$, on impose une décélération constante de $\dot{\lambda}_{max}$ à une vitesse nulle. La durée de la phase 3 est identique à celle de la phase 1, cela se traduit par $t_3 - t_2 = t_1$;
- en phase 4, le chariot est immobile, la boule se stabilise au-dessus de la position prévue pour sa descente dans l'eau ;
- en phase 5, non étudiée dans ce sujet, la boule est descendue dans l'eau.

La vitesse maximale atteinte par le chariot pendant l'ensemble de son cycle est : $\dot{\lambda}_{max} = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q10. Construire une représentation graphique de cette vitesse.

Q11. Exprimer littéralement la vitesse du chariot $\dot{\lambda}$ pour chacune des quatre premières phases en fonction de la vitesse maximale atteinte $\dot{\lambda}_{max}$ et des temps caractéristiques t_k .

Q12. En déduire l'expression de l'accélération $\ddot{\lambda}$ qui intervient pour chacune des quatre premières phases dans le second membre de l'équation différentielle (2).

Les valeurs numériques de chacun des paramètres étant connues, il est désormais possible de résoudre l'équation différentielle. Mais ne cherchez pas les questions **Q13** à **Q15** : elles n'existent pas dans ce sujet !

La **figure 8** présente cette évolution de l'angle θ obtenue en résolvant l'équation (2).

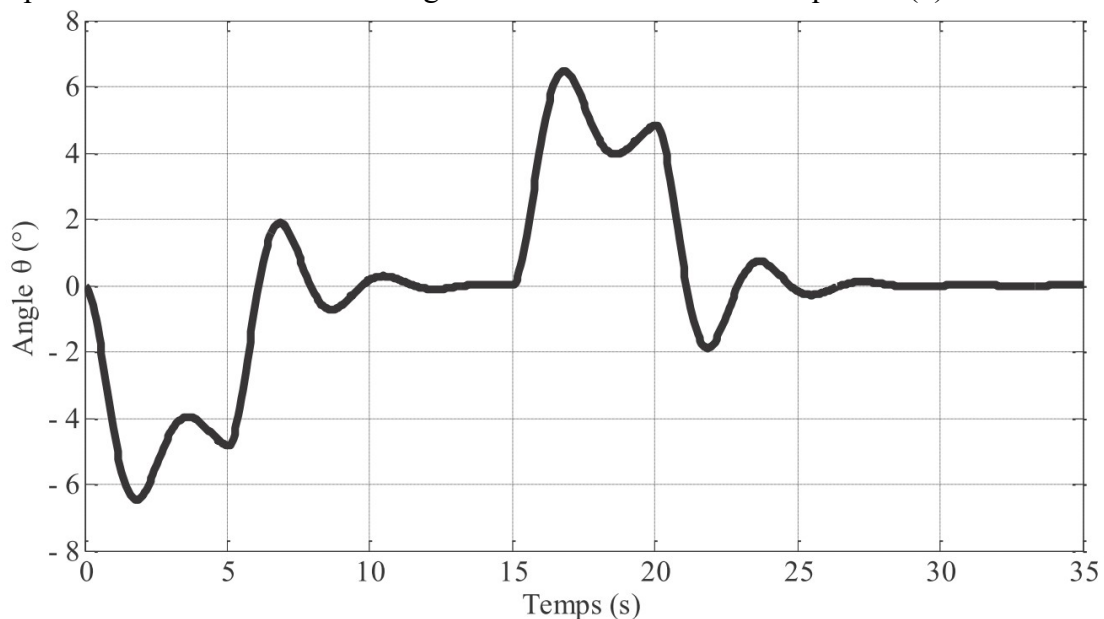


Figure 8 - Évolution de l'angle d'oscillation de la boule à vagues au cours de la mise à l'eau

Q16. À partir de la **figure 8**, identifier les quatre phases de la mise à l'eau en précisant les valeurs des temps t_1 , t_2 et t_3 .

Q17. Le critère d'angle maximal d'oscillation de 5° est-il vérifié ? Si non, comment le respecter ?

Q18. Combien de temps faut-il attendre avant de descendre la boule dans l'eau pour assurer une mise en place précise ? **Rappel** : la position de la boule sur le bassin doit être précise à plus ou moins 10 cm. La réponse devra être justifiée.