

## Corrigé de la Partie II de l'épreuve de MODELISATION

### II.1. Estimation du coefficient de frottement visqueux $\alpha$

**Q1.** Pour le système {boule} assimilé à un point matériel et étudié dans le référentiel terrestre local, supposé galiléen, le théorème de la puissance cinétique indique que la dérivée de l'énergie cinétique de la boule est égale à la somme des puissances des forces appliquées à la boule :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_k P(\vec{F}_k)$$

**Q2.** Par définition, la vitesse du centre de gravité  $G$  de la boule à vagues par rapport au bâti 0 est :

$$\vec{V}_{G,boule/0} = \frac{d\vec{AG}}{dt} = \frac{d(-d \vec{y})}{dt} = -d \frac{d(\vec{y})}{dt} = -d(-\dot{\theta} \vec{x}) \text{ soit : } \vec{V}_{G,boule/0} = d \dot{\theta} \vec{x}$$

On en déduit donc l'expression de l'énergie cinétique galiléenne (dans le référentiel galiléen) :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m (\vec{V}_{G,boule/0})^2 = \frac{1}{2} m d^2 (\dot{\theta})^2$$

**Q3.** La boule ne subit que 3 forces :

- son poids  $\vec{\mathcal{P}} = m \vec{g} = -m g \vec{y}_0$ , dont la puissance vaut :  $P(\vec{\mathcal{P}}) = \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{V}_{G,boule/0}$ , soit :  
 $\boxed{P(\vec{\mathcal{P}}) = -m g d \dot{\theta} \sin(\theta)}$  : le poids est tantôt résistant au mouvement (lorsque la boule remonte depuis  $\theta=0$ ), tantôt moteur (lorsque la boule redescend vers  $\theta=0$ ).
- la force de frottement  $\vec{F}_{frot} = -\alpha \vec{V}_{G,boule/0}$ , dont la puissance vaut :  
 $P(\vec{F}_{frot}) = \vec{F}_{frot} \cdot \vec{V}_{G,boule/0} = -\alpha (\vec{V}_{G,boule/0})^2$  soit :  $\boxed{P(\vec{F}_{frot}) = -\alpha d^2 (\dot{\theta})^2} \leq 0$  : la force de frottement est toujours résistante.
- la tension du câble  $\vec{T} = \|\vec{T}\| \vec{y}$ , toujours perpendiculaire à la vitesse de la boule, donc de puissance nulle :  $\boxed{P(\vec{T}) = 0}$  : la tension ne travaille jamais.

**Q4.** Le théorème de la puissance cinétique s'écrit donc :  $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = -m g d \sin(\theta) \dot{\theta} - \alpha d^2 (\dot{\theta})^2$ , soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m d^2 (\dot{\theta})^2 \right) = m d^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -m g d \sin(\theta) \dot{\theta} - \alpha d^2 (\dot{\theta})^2$$

Ce qui donne, puisque **la fonction  $\dot{\theta}$  n'est pas uniformément nulle**, l'équation différentielle :

$$\boxed{m d \ddot{\theta} = -m g \sin(\theta) - \alpha d \dot{\theta}}$$

**Q5.** D'après le développement limité à l'ordre 1 de  $\sin \theta$  en 0 :  $\sin(\theta) = \theta + o(\theta)$ , l'équation différentielle linéarisée du mouvement de la boule à vagues peut se mettre sous la forme :

$$m d \ddot{\theta} = -m g \theta - \alpha d \dot{\theta} \quad (1)$$

**Q6.** Équation caractéristique de l'équation différentielle (1) :  $\boxed{m d X^2 + \alpha d X + m g = 0}$

Expression de son discriminant :  $\boxed{\Delta = (\alpha d)^2 - 4 m^2 g d}$

**Q7.** On constate l'existence d'**oscillations amorties** sur le tracé de la **figure 5**, ce qui correspond donc à un **régime pseudo-périodique**. Le discriminant  $\Delta$  doit donc être **négatif**, ce qui correspond à une valeur

suffisamment faible de  $\alpha$ . Il faut en effet que :  $\Delta = (\alpha d)^2 - 4 m^2 g d < 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < \alpha_{max} = 2 m \sqrt{\frac{g}{d}}}$

**A.N. :**  $\alpha_{max} = 2 \times 160 \times \sqrt{\frac{9,81}{3,00}} = 579 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

**Q8.** Les deux solutions (complexes et conjuguées) de l'équation caractéristique sont :

$$X_{\pm} = \frac{-\alpha d \pm j \sqrt{-\Delta}}{2 m d} = -\frac{\alpha}{2 m} \pm j \sqrt{\frac{4 m^2 g d - \alpha^2 d^2}{4 m^2 d^2}} = \mu \pm j \omega$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{d} - \frac{\alpha^2}{4 m^2}} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{\alpha}{2 m}$$

Les solutions de l'équation différentielle (homogène) sont donc de la forme :

$$\theta(t) = \exp(\mu t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

On en déduit l'expression de la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta}(t) = \mu \exp(\mu t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + \exp(\mu t) [-A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t)]$$

La boule est lâchée sans vitesse initiale, donc sans vitesse angulaire initiale :

$$\dot{\theta}(t=0) = \mu \exp(0) [A \cos(0) + B \sin(0)] + \exp(0) [-A \omega \sin(0) + B \omega \cos(0)] = A \mu + B \omega = 0$$

Et l'angle initial vaut :  $\theta(t=0) = \exp(0) [A \cos(0) + B \sin(0)] = A = \theta_0$

On en déduit donc la valeur de la constante  $B$  :  $B = -\theta_0 \frac{\mu}{\omega}$

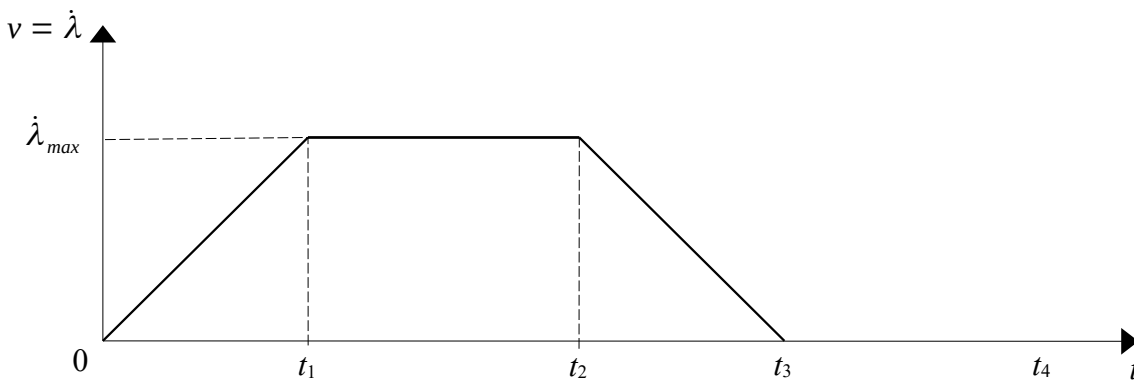
Et l'expression de l'angle  $\theta$ , solution de l'équation linéarisée (1) est donc :

$$\theta(t) = \theta_0 \exp(\mu t) \left[ \cos(\omega t) - \frac{\mu}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

**Q9.** L'écart (non négligeable) constaté entre les deux courbes (mesures et estimation par résolution de l'équation (1) dans laquelle la valeur de  $\alpha$  a été déterminée à partir de l'ajustement entre les valeurs expérimentales et la forme de la solution de l'équation (2) ci-dessus) se justifie par le fait que l'expérience ne se déroule pas « aux petits angles ». Remplacer  $\sin \theta$  par  $\theta$  dans l'équation différentielle ne se justifie pas dans ce cas !

## II.2. Vérification du critère d'amplitude maximale et détermination du temps de stabilisation

**Q10.** Le profil de la vitesse du chariot en fonction du temps est le suivant :



**Q11 & Q12.** En en déduit les expressions littérales de la vitesse et de l'accélération du chariot :

- pour la phase 1 :  $\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\lambda}_{max} \frac{t}{t_1}$  et donc  $\ddot{\lambda}_1 = \frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_1} = cste$
- pour la phase 2 :  $\dot{\lambda}_2(t) = \dot{\lambda}_{max} = cste$  et donc  $\ddot{\lambda}_2 = 0$
- pour la phase 3 :  $\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_1} (t - t_3)$  et donc  $\ddot{\lambda}_3 = -\frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_1} = -\ddot{\lambda}_1 = cste$
- pour la phase 4 :  $\dot{\lambda}_4(t) = 0$  et donc  $\ddot{\lambda}_4 = 0$  (c'est le cadre de l'étude réalisée au II.1) !

**Q16.** On constate quatre phases distinctes correspondant à des oscillations amorties autour de position d'équilibre distinctes :

- Phase 1 : Entre  $t=0$  et  $t_1 = 5,0 \text{ s}$  :  $\theta$  oscille autour de  $\theta_{eq,1} \simeq -5^\circ$
- Phase 2 : Entre  $t=t_1$  et  $t_2 = 15,0 \text{ s}$  :  $\theta$  oscille autour de  $\theta_{eq,2} = 0^\circ$
- Phase 3 : Entre  $t=t_2$  et  $t_3 = 20,0 \text{ s}$  :  $\theta$  oscille autour de  $\theta_{eq,3} \simeq 5^\circ$
- Phase 4 : Au-delà de  $t_3$  :  $\theta$  oscille autour de  $\theta_{eq,4} = 0^\circ$

**Q17.** Le critère d'angle maximal d'oscillation de  $5^\circ$  n'est donc pas vérifié puisqu'on atteint  $|\theta|_{max} \simeq 6,5^\circ \Rightarrow$  il va falloir (un peu) abaisser la valeur de  $\dot{\lambda}_{max}$  et/ou augmenter la valeur de  $t_1$  pour l'atteindre.

**Q18.** Une précision de la position de la boule à plus ou moins 10 cm se traduit par une précision sur l'angle  $\theta$  d'environ  $\Delta\theta \simeq \frac{10 \text{ cm}}{300 \text{ cm}} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,9^\circ$  (aux petits angles). Par lecture, il suffit

d'attendre **2,0 s après  $t_4$**  (donc une durée totale de 22,0 s) pour être sûr de ne pas dépasser cette valeur d'angle. Cela signifie que le temps que la boule descende jusqu'à l'eau (durée de la phase 5) devrait sans doute suffire à ce que les oscillations latérales s'estompent suffisamment !