

Questions de cours

Rapide : limites et dérivées usuelles

Toutes les colles commencent par l'énoncé d'une limite et d'une dérivée :

- limite usuelles (limite des fonctions usuelles au bornes de leur domaine de définition),
- ou taux d'accroissement usuel ($\sin(x)/x$, $(\cos(x) - 1)/x$, $\ln(1+x)/x$, $(e^x - 1)/x$ et $(\cos(x) - 1)/x^2$).
- ou croissance comparée usuelle (ou généralisé) ($\ln(x)/x$ en $+\infty$, xe^x en $-\infty$, e^x/x en $+\infty$ et $x \ln(x)$ en 0).

et

- dérivées usuelles ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sqrt{\cdot}$, $\ln$, $\exp$, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \frac{1}{x}$) et sa forme composée $((\sin u)', (\cos u)', \dots)$.

Remarque aux examinateur·ices : *on ne s'attardera pas sur les domaines de dérivabilité, mais on sera attentif à ce qu'il n'y ait pas de confusion entre nombre et fonction.*

En cas de méconnaissance, jusqu'à 4 points peuvent être retirés de la note. On ne s'attardera pas sur cette exercice, quel que soit le niveau de l'élève.

Récitation

- Définition de a^x avec hypothèses. (Chap. 5D 3.1)
- Définition de la factorielle et des coefficients binomiaux. (Chap. 6B 1. et 2.)
- Graphes des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ ou¹ exponentielles de base $a : x \mapsto a^x$ pour différentes valeurs de α (resp. a). (Chap. 5D 3.4 et 3.3)

Démonstrations et exercices de cours.

- Exercice  7 feuille 5.2

Exercice 7 (Trivium I)

L'examineur·rice, dans un repère orthonormé, dessine un graphe de fonction quelconque (pas nécessairement continue, ni dérivable, peut avoir des tangentes verticales, des asymptotes, ...). Dessiner l'allure de sa dérivée là où elle est dérivable.

Remarque : les points d'inflexion n'ont pas été abordés.

- Exercice  9 ou¹ 10 feuille 5.3

Exercice 9 (Exponentielle et sa tangente en 0)

Étudier la fonction

$$x \mapsto e^x - 1 - x.$$

En déduire une inégalité valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 (Autre tangente)

Étudier la fonction

$$x \mapsto \ln(x+1) - x.$$

En déduire une inégalité valable sur un certain intervalle à préciser.

- Valeur et preuve par récurrence de l'expression de $\sum_{k=0}^n k$. (Chap. 6A 2.)

Méthodes à connaître et exercices élémentaires

- **New** Étude de fonction polynomiale de degré 3.
- **New** Dériver.
Note : on n'insistera pas sur la justification de la dérivabilité, mais on s'attachera à ce que l'élève identifie clairement la structure de la fonction étudiée et utilise les théorèmes idoines.
- **New** Calculer des limites par taux d'accroissement.
-  Déterminer un domaine de définition, en raisonnant par équivalence.

1. au choix du/de la colleur·euse

Enexo supplémentaire

- Calculer une limite indéterminée de fraction rationnelle en factorisant par le terme "le plus fort".
- Calculer une limite par les outils usuels (produit, somme, composée, ...).
Note : pas de taux d'accroissement à part les 5 dans le cours.
- Calculer une limite à l'aide du théorème de comparaison et d'encadrement.
- Montrer qu'une fonction est injective/surjective.
- Montrer une inclusion, montrer une égalité d'ensembles.
- Écrire mathématiquement des ensembles.

Chapitre 3 : Inégalités dans $\mathbb{R}$

- Intervalles.
- Règles de manipulations des inégalités (opposé, somme, produit, inverse, carré).
- Monotonie des fonctions (croissance, décroissance, stricte..).
- Partie entière.

Méthode de résolution d'inéquations.

Majorant, minorant, maximum, minimum.

Chapitre 4 : Ensembles et applications

- Ensemble défini par une proposition (ensemble sélectionné) et ensemble paramétré.
- Inclusion et égalité.
- Applications
- Composition
- Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Chapitre 5 : Étude de fonctions

Limites

- Limite.
- Continuité.
- Limites des fonctions usuelles.
- Taux d'accroissement usuels.
- Croissances comparées et croissances comparées généralisées ;
- Limite de polynômes.
- Limite de fractions rationnelles.
- Théorème d'encadrement.

Dérivation

- Taux d'accroissement.
- Nombre dérivé.
- Lien avec la monotonie.
- Équation de la tangente.
- Dérivées usuelles.
- Théorème de dérivation des fonctions composées.

Étude

- Parité, périodicité.
- Étude de fonctions.

Chapitre 6 : Entiers et récurrence

- Notations $\sum$, $\prod$
Note : pas encore d'outils de calcul (télescopage/changement d'indices)
- Somme des entiers
- Factorielle
- Coefficients binomiaux
- Triangle de Pascal
- Formule du binôme de Newton