

CORRECTION

1 Écrire des ensembles

Écrire les ensembles suivants :

1. Le plan (A, \vec{u}, \vec{v}) sous *forme sélectionnée*. \vec{u}, \vec{v} non-colinéaires.

correction :

$$(A, \vec{u}, \vec{v}) = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \alpha \vec{AM} + \beta \vec{u} + \gamma \vec{v} = \vec{0} \right\}.$$

2. Le plan passant par A et de normale \vec{n} sous *forme sélectionnée*.

$$\vec{n} \neq \vec{0}.$$

correction :

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \mid \vec{AM} \perp \vec{v} \right\}.$$

3. Le groupe unitaire sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}.$$

4. Le groupe unitaire sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\mathbb{U} = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in]-\pi, \pi] \right\}.$$

5. Le groupe des racines n -èmes de l'unité sous *forme sélectionnée*.

$$n \in \mathbb{N}^*.$$

correction :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in]-\pi, \pi] \right\}.$$

6. Le groupe des racines n -èmes de l'unité sous *forme paramétrée*.

$$n \in \mathbb{N}^*.$$

correction :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in]-\pi, \pi] \right\}.$$

7. L'ensemble sous *forme paramétrée* des solutions de $y' + A'y = 0$ sur I où $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.

correction : En résolvant l'équation différentielle linéaire homogène, on obtient :

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

8. L'ensemble des fonctions injective de E dans F sous *forme sélectionnée*, avec la condition écrite sous forme quantifiée.

correction :

$$\{ f : E \rightarrow F \mid \forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \}.$$

9. L'ensemble des fonctions surjective de E dans F sous *forme sélectionnée*, avec la condition écrite sous forme quantifiée.

correction :

$$\{ f : E \rightarrow F \mid \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y \}.$$

10. L'ensemble des points M du plan tels que ABM est rectangle en M sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\left\{ M \in \mathcal{P} \mid \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \right\}.$$

11. L'ensemble des points M du plan tels que ABM est rectangle en M sous *forme paramétrée* (on pourra noter $I(x_0, y_0)$ le milieu de $[AB]$ et $r = IA$).

correction : L'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$, c'est donc :

$$\{ M(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) : \theta \in \mathbb{R} \}.$$

12. L'ensemble des droites de l'espace contenue dans le plan \mathcal{P} sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{\mathcal{D} \text{ droite de l'espace} \mid \mathcal{D} \subset \mathcal{P}\}.$$

13. L'ensemble des couples de point et droite de l'espace tel que le point appartienne à la droite sous *forme sélectionnée*. On note \mathcal{U} l'ensemble des droites de l'espace.

correction :

$$\{(M, \mathcal{D}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \mid M \in \mathcal{D}\}.$$

14. Le domaine de définition de \tan sous forme de *complémentaire d'un ensemble sous forme paramétrée*.

correction :

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

15. L'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} : \theta \in]-\pi, \pi]\} = \mathbb{U}.$$

16. L'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \mathbb{U}.$$

17. L'ensemble des solutions de $x^2 > 2$ sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}.$$

18. L'ensemble des solutions de $x^2 > 2$ sous forme d'une *union d'ensembles*.

correction :

$$\left] -\infty, -\sqrt{2} \right[\cup \left] \sqrt{2}, +\infty \right[.$$

19. L'ensemble des parties à 3 éléments de \mathbb{R} sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \text{Card}(A) = 3\}.$$

20. L'ensemble des parties de \mathbb{N} qui contiennent leur nombre d'éléments sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \text{Card}(A) \in A\}.$$

21. L'ensemble des nombres entiers dont le carré est égal au cube d'un autre entier sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n^2 = k^3\}$$

22. L'ensemble des fonctions affines sur \mathbb{R} ; sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable deux fois} \mid f'' = 0\}.$$

23. L'ensemble des coordonnées des vecteurs orthogonaux à \vec{u} où $\text{Mat}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace; sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$

24. L'ensemble des couples (n, k) tels que $\binom{n}{k}$ soit pair sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\left\{ (n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{1}{2} \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \right\}.$$

25. L'ensemble des $\binom{n}{k}$ quand le couple (n, k) a une somme paire sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\left\{ \binom{n}{2p-n} : (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq n \leq 2p \leq 2n \right\}.$$

26. L'ensemble des nombres réels solutions de $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ sous *forme paramétrée*

correction :

$$\{1, 2, 3\}$$

27. L'ensemble des couples de droites parallèles du plan sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\left\{ ((A, \vec{u}), (B, \vec{u})) : \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}} \setminus \{\vec{0}\}, A \in \mathcal{P} \text{ et } B \in \mathcal{P} \setminus (A, \vec{u}) \right\}$$

28. L'ensemble des couples de droites sécantes (non-confondues) du plan sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\left\{ ((A, \vec{u}), (A, \vec{v})) : \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}} \setminus \{\vec{0}\}, A \in \mathcal{P} \text{ et } \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}} \setminus \{\lambda \vec{u} : \lambda \in \mathbb{R}\} \right\}$$

29. L'ensemble des couples de droites sécantes (non-confondues) du plan sous *forme sélectionnée*.

correction :

$$\{(d, d') \mid d, d' \text{ droites}, d \neq d', \text{Card}(d \cap d') = 1\}$$

30. 🦋 L'ensemble des droites de l'espace contenue dans le plan \mathcal{P} sous *forme paramétrée*.

correction : Soit A un point fixé de \mathcal{P} et (\vec{u}, \vec{v}) une base de \mathcal{P} . Alors l'ensemble recherché est :

$$\{(A, \cos(\theta)\vec{u} + \sin(\theta)\vec{v}) : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

31. 🦋 L'ensemble des nombres entiers dont le carré est égal au cube d'un autre entier sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\{u^3 : u \in \mathbb{N}\}$$

32. 🦋 L'ensemble des parties de \mathbb{N} qui contiennent leur nombre d'éléments sous *forme paramétrée*.

correction :

$$\{\{c\} \cup F : c \in \mathbb{N}^*, F \in \mathcal{P}_{c-1}(\mathbb{N} \setminus \{c\})\}$$

2 Donner des éléments

1. Donner un élément de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Z}^3$.

correction : (π, π, π) , $(2, \pi, 3)$. Il ne faut pas que les 3 soient entiers.

2. Donner un élément de $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^3$.

correction : (π, π, π) . Aucun des trois n'a le droit d'être entier.

3. Donner un élément de $(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Z}^3) \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^3$.

correction : $(0, 0, \sqrt{2})$.

4. On note $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donner un élément de

$$E \times E \times \mathbb{Z} \cup E \times \mathbb{Z} \times E \cup \mathbb{Z} \times E \times E.$$

correction : $(\pi, \sqrt{2}, 3)$.

5. Donner un élément de $\mathbb{C}^2 \cap \mathbb{R}^2$.

correction : $(1, 2, \pi)$. C'est juste un élément de \mathbb{R}^2 .

6. Donner un élément de $\mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{C}^2$.

correction : $(1, 2)$, $(i, \sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$. Ce sont des éléments de \mathbb{C}^2 de toute façon.

7. Donner un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

correction : $\{\}$ ou $\{\pi\}$ ou \mathbb{Q} ou $]1, 2[\cup \{-3\}$.

8. Donner un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
correction : $\{\}$ ou $\{\{\}\}$ ou $\{\{1\}, \{2\}\}$ ou $\{P, I\}$ avec $P = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ et $I = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$.
9. Donner un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$.
correction : $(\{1, 2, 3\}, 5)$ ou $(\{\}, 0)$ ou $(\mathbb{N}, 42)$.
10. Donner deux éléments de l'ensemble $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ dérivable et } f' = f\}$.
correction : $x \mapsto 0$, $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto -3e^x$.
11. Donner un élément de l'ensemble $\mathbb{U} \cap \mathbb{R}$.
correction : 1 ou -1 (ce sont les seuls éléments).
12. Donner un élément de l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.
correction : $(0, 0, 0)$ ou $(1, 0, 1)$ ou $(0, 1, 2)$.
13. Donner un élément de l'ensemble $\{ax^2 + bx + c : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
correction : $2x^2 + x + 1$ ou 0 ou $x - 2$.
14. Donner un élément de l'ensemble $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ injective}\}$.
correction : $x \mapsto x$ ou $x \mapsto 4x - 5$ ou $x \mapsto \arctan(5x) + 2$.
15. Donner un élément de l'ensemble $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ non-injective}\}$.
correction : \cos ou $x \mapsto x^2$.
16. Donner un élément de l'ensemble $\{\{1, 2\} \cup A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
correction : $\{1, 2\}$ ou $\{1, 2, 3\}$ ou $\{1, 2, 5, 10\}$ ou \mathbb{N} .
17. Donner un élément de l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n]$.
correction : 0 ou 21 ou -3 , etc. (tout réel convient).
18. Donner un élément de l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n]$.
correction : $0, 1$, (tout élément de $[-1, 1]$).
19. Donner un élément de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
correction : 1 ou $e^{i\pi/4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
20. Donner un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\{\})$.
correction : $\{\}$.
21. Donner un élément de l'ensemble $\mathcal{P}_3(\mathbb{N}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \operatorname{Card}(A) = 3\}$.
correction : $\{0, 1, 2\}$ ou $\{5, 10, 15\}$ ou $\{1, 100, 1000\}$.
22. Donner un élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1\}$.
correction : 1 ou 3 ou 5 ou 9999 , etc. (tout entier impair).
23. ☛ Donner un élément de l'ensemble $\{\} \times \mathbb{R}$.
correction : Il n'existe pas d'élément (l'ensemble est vide car le produit cartésien avec l'ensemble vide est vide).
24. Donner un élément de l'ensemble $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.
correction : \cos , \exp

25. Donner un élément de l'ensemble
 $\{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\{\}\} \mid F \text{ fini et } \max(F) < \text{Card}(F)\}.$

correction : $\{0, 1, 2, 3\}.$