

DS n°6

de PHYSIQUE-CHIMIE

durée : 4h

Consignes :

Calculatrice autorisée

- Rédiger votre devoir sur une **copie double**, avec une **marge en en-tête** et une **marge à gauche** de chaque page.
- Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
- Encadrer vos **expressions littérales** (EL) ; souligner les **applications numériques** (AN) avec un stylo de couleur bien visible.
- N'écrivez **rien au crayon de papier** sur votre copie.
- Ne rendez pas l'énoncé (ou une partie de l'énoncé) avec votre copie.

Conseils :

- Vérifier l'**homogénéité** de vos expressions littérales.
- Une AN sans unité ne vaut en général rien et dégrade l'humeur du correcteur...

1^{er} Problème : Expérience de Rüchardt ($\approx 1\text{h}30\text{min}$)

Ce sujet propose une étude de l'expérience de Rüchardt. Elle consiste à placer un gaz dans un récipient étanche muni d'un tube (figure 1). On ferme le tout par un piston qui peut librement coulisser dans le tube. Le diamètre du piston est du mieux possible égal à celui du tube, ce qui assure une étanchéité (pas de fuite de gaz).

Sous l'action de son poids, le piston commence à descendre. Ceci fait augmenter la pression dans le récipient, ce qui finit par arrêter la descente du piston, et par le faire remonter. Il s'en suit une série d'oscillations, comme on peut le voir sur la figure 2.

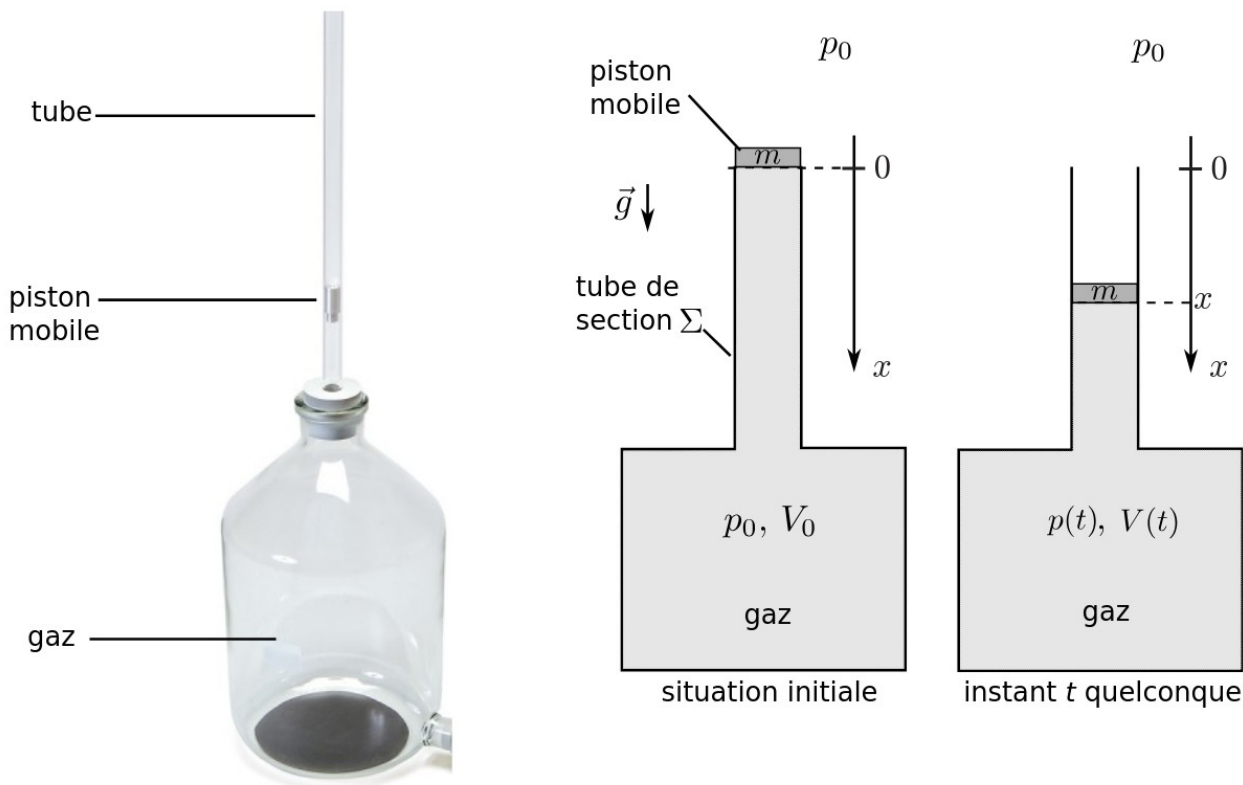


Figure 1 : photographie et schéma de l'expérience.

Proposée par Rüchardt en 1929, perfectionnée à plusieurs reprises, cette expérience et ses variantes ont permis des mesures extrêmement précises du coefficient adiabatique γ (gamma) de divers gaz (notion qui sera vue dans un futur cours de thermodynamique).

1.A) Étude préliminaire

On utilise les notations de la figure 1. En particulier :

- V_0 est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston).
- $V(t)$ est le volume de ce même gaz, mais à un instant t quelconque. Au même instant, la pression du gaz est notée $p(t)$ et sa température $T(t)$.
- La pression atmosphérique est p_0 . C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial.
- La section du tube est notée Σ .
- La masse du piston est notée m et l'intensité de la pesanteur est notée g et vaut $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- \vec{e}_x est un vecteur unitaire descendant.

Q1. Justifier que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston s'écrit :

$$\vec{F} = p_0 \Sigma \vec{e}_x - p(t) \Sigma \vec{e}_x$$

On peut démontrer, sous certaines conditions supposées vérifiées dans la suite de ce problème, que cette résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston a pour expression :

$$\vec{F} = -(\gamma K x) \vec{e}_x, \text{ avec } K = \frac{p_0 \Sigma^2}{V_0} \text{ une constante caractéristique du problème.}$$

Q2. En déduire la dimension du coefficient adiabatique γ .

I.B) Modélisation des oscillations sans frottements

I.B.1) Méthode de Rüchardt

Afin d'accéder à la valeur de γ , on s'intéresse à la période des oscillations observées. On considère pour cela que la seule autre force prise en compte comme agissant sur le piston est la force de pesanteur.

Q3. À l'aide d'une étude mécanique, établir l'équation différentielle portant sur $x(t)$.

Q4. Écrire cette équation différentielle sous une forme canonique afin d'identifier la pulsation propre ω_0 , et la valeur de x à l'équilibre x_{eq} et de les exprimer en fonction des paramètres de l'énoncé.

Q5. Établir l'expression des solutions $x(t)$ de cette équation différentielle, en fonction des paramètres ω_0 , t , et x_{eq} , ainsi que de deux constantes A et B qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Pour l'expérience considérée ici, $m/K = 4,01 \cdot 10^{-2} \text{ s}^2$. Le récipient étant rempli d'air, on mesure une période des oscillations $T_0 = 1,08 \text{ s}$.

Q6. Exprimer γ en fonction du rapport m/K et de T_0 , puis réaliser l'application numérique.

I.B.2) Méthode de Rinkel

Une seconde méthode pour accéder à la valeur de γ , exploitée par Rinkel en 1929, consiste à mesurer la distance maximale L parcourue par le piston avant qu'il ne remonte pour la première fois. Le piston est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale.

On utilise ici une méthode énergétique afin de déterminer l'expression de L .

Q7. Donner, en faisant intervenir les grandeurs m , g , x et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, les expressions de l'énergie cinétique E_c du piston et de son énergie potentielle de pesanteur $E_{p, \text{ pes}}$.

Q8. Prouver que la résultante des forces de pression $\vec{F} = -(\gamma K x) \vec{e}_x$ est conservative, en déterminant l'expression de son énergie potentielle associée.

Q9. En utilisant les résultats des questions **Q7** et **Q8** précédentes, déterminer l'expression du coefficient γ en fonction des paramètres L , g , K et m .

Q10. Calculer la valeur numérique de γ obtenue par cette méthode sachant que $L = 57,0 \text{ cm}$. Conclure.

I.C) Étude mécanique avec frottements

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 2. L'amortissement des oscillations prouve qu'il y a présence de dissipation (frottements solides et/ou fluides, échanges thermiques entre le gaz et le récipient, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques, ...).

L'objectif de cette partie est de modéliser cette courbe, sans chercher à comprendre le détail du processus de dissipation.

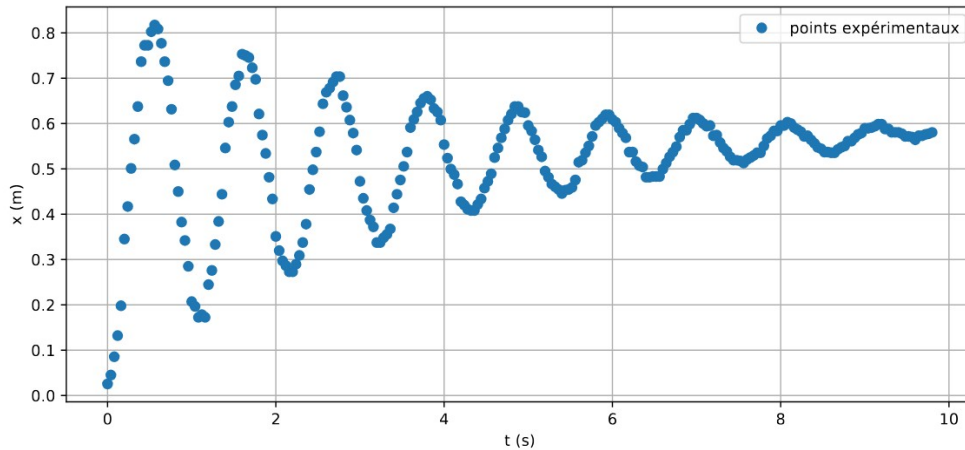


Figure 2 : données issues d'un pointage vidéo. L'échelle des x est approximative, celle des t est précise.

Nous supposons que l'équation du mouvement du piston s'écrit sous la forme suivante, et nous allons tester si cette modélisation permet une description correcte de l'enregistrement expérimental $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = g \quad (1)$$

La pulsation propre de ce système est ω_0 , son expression théorique reste la même que précédemment. Le facteur de qualité Q traduit la présence plus ou moins forte de dissipation. Le second membre g est constant.

Q11. En vous aidant de la figure 2, et sans faire de calcul démesuré, proposer une valeur approchée de Q , en justifiant votre réponse.

Q12. Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système ?

La forme générale des solutions de l'équation homogène est : $x_{EH}(t) = (A \cos(\Omega t) + B \sin \Omega t) e^{-\mu t}$

Q13. Établir les expressions de Ω et de μ en fonction des paramètres ω_0 et Q .

Q14. Donner la forme générale des solutions $x(t)$ de l'équation (1).

On suppose que la masse est lâchée en $x = 0$ sans vitesse initiale.

Q15. Déterminer alors les expressions des constantes A et B en fonction de Ω , μ , ω_0 et g .

Q16. Tracer l'allure de la solution $x(t)$. On fera apparaître sur le graphique : la position initiale $x(0)$, la position d'équilibre $x_{\text{éqb}}$, et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$.

Q17. Y a-t-il une différence significative entre la période propre T_0 et la pseudo-période T ? Justifier.

Q18. Un modèle des données est représenté figure 3. En utilisant une de vos expressions précédentes, et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de Q .

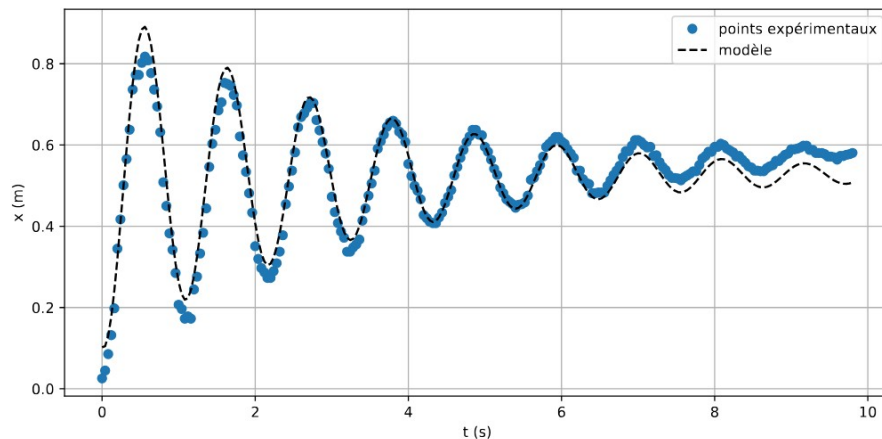


Figure 3 : données et modèle du type $C + (A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t)) \cdot \exp(-\mu t)$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.83$, $\mu = 0.30$, $A = -0.43$, $B = -0.059$, $C = 0.53$.

Q19. Un second modèle, présenté figure 4, est en meilleur accord avec les données. Proposer une cause physique possible à l'existence du terme supplémentaire en $D \times t$.

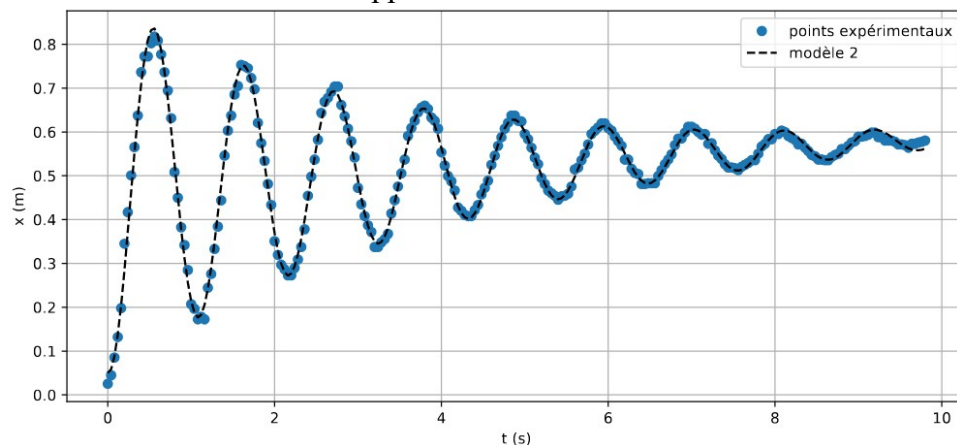


Figure 4 : données et modèle du type

$C + (A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t)) \cdot \exp(-\mu t) + D \cdot t$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.82$, $\mu = 0.29$, $A = -0.42$, $B = -0.037$, $C = 0.47$, $D = 0.011$.

2^{ème} Problème : Modélisation d'un oscillateur ($\approx 1h20min$)

II.A) Étude énergétique d'un oscillateur

Q20. Rappeler la définition d'une force conservative, ainsi que de son énergie potentielle associée.

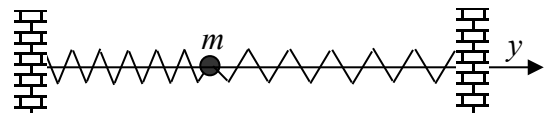
Q21. Pour une force de rappel élastique de constante de raideur k , rappeler (sans démonstration) l'expression de son énergie potentielle $E_{p,elast.}(x)$ en fonction de l'écart x à la position du ressort à vide.

On considère le mouvement conservatif d'un point matériel de masse constante m sur un axe horizontal Oy , et possédant l'énergie potentielle $E_p(y) = E_0 + \alpha (y - Y_0)^2$, où α est une constante positive.

Q22. Justifier que la position d'abscisse $y = Y_0$ est une position d'équilibre stable pour le système.

Q23. Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire qu'il s'agit d'oscillations harmoniques dont on précisera l'expression de la période.

Application : Dans le dispositif **horizontal** explicité sur la figure ci-contre, les ressorts sont identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 , tandis que les points d'attache sont distants de $2L_0$.



Q24. Préciser l'origine de l'axe y si y désigne l'écart à la position d'équilibre.

Q25. Préciser l'expression de $E_p(y)$.

Q26. Calculer la valeur de la période T_0 des oscillations du système si $m = 200$ g et $k = 40$ N.m⁻¹.

On envisage désormais, pour le même dispositif, l'existence d'un frottement fluide d'intensité proportionnelle à la vitesse du système par rapport à l'axe du mouvement : $\vec{F}_f = -\beta m \vec{v}$ où β est une constante positive.

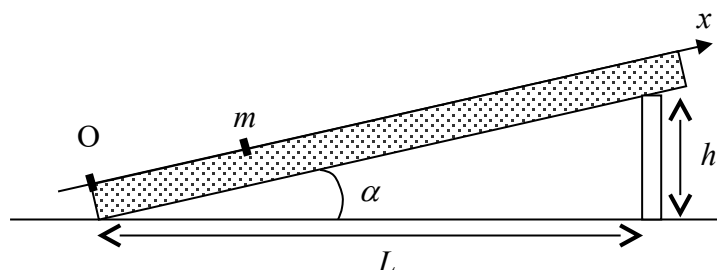
Q27. Donner la dimension ou l'unité SI de β .

Q28. Établir l'équation différentielle du mouvement.

Q29. Préciser la valeur numérique maximale de β permettant les oscillations du système.

II.B) Modélisation d'un dispositif expérimental

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle α par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O , et un autre aimant, de masse m , est fixé sur un palet mobile sans frottement :



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force magnétique notée \vec{F}_m , prépondérante lorsque les aimants sont proches, et son poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

Q30. Réaliser un bilan des forces à l'équilibre et les représenter sur un schéma **cohérent**.

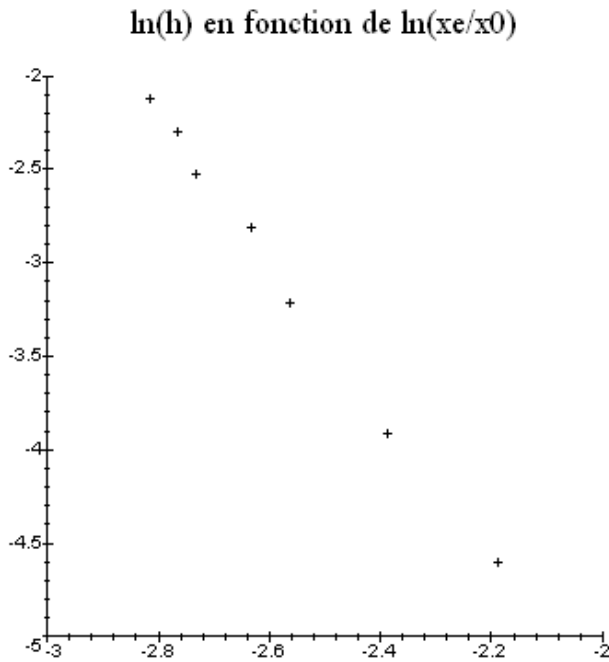
Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme :

$$\vec{F}_m(x) = C \left(\frac{x_0}{x} \right)^n \vec{e}_x, \text{ avec } C > 0, x_0 = 1 \text{ m, et } n \text{ entier naturel} \quad (2)$$

Q31. Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_e en fonction des paramètres : x_0, C, m, g, L, h et n dans le cas des petits angles ($h \ll L$).

NB : cette approximation sera toujours utilisée dans la suite.

On mesure x_e pour différentes cales, puis on représente $\ln(h)$ en fonction de $\ln(x_e/x_0)$.



valeurs correspondantes :

$\ln(h)$	$\ln(x_e/x_0)$
-2,19	-4,61
-2,39	-3,91
-2,56	-3,22
-2,63	-2,81
-2,73	-2,53
-2,76	-2,30
-2,81	-2,12

Q32. Les résultats obtenus permettent-ils de valider l'hypothèse de la loi de force (2) envisagée ?

Q33. Le cas échéant, déduire les valeurs de n et de C des mesures expérimentales. On donne : $L = 120 \text{ cm}$; $m = 189 \text{ g}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Q34. Exprimer littéralement l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ du système (à une constante additive près), en fonction des paramètres x, x_0, k, m, g, L, h et n , puis en fonction de x, x_0, x_e, C et n uniquement.

Lorsqu'on se limite à des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, on rappelle qu'on peut utiliser pour la fonction énergie potentielle un développement de Taylor d'ordre 2 :

$$E_p(x \simeq x_e) \simeq E_p(x = x_e) + \frac{1}{2} (x - x_e)^2 \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=x_e}$$

Q35. En déduire une expression de $E_p(x \simeq x_e)$ sous la forme : $\frac{1}{2} K (x - x_e)^2 + cste$; le détail de la constante additive n'est pas demandé, mais on exprimera la constante K en fonction de x_e, x_0, C et n .

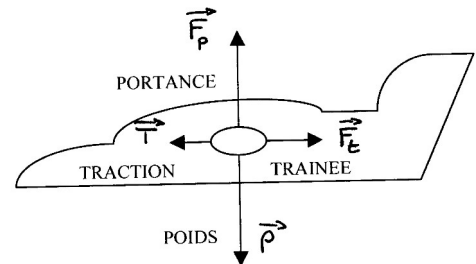
Q36. Justifier qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente.

Q37. Toutes choses égales par ailleurs, montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera ; en déduire une méthode de mesure de n que l'on décrira succinctement.

3^{ème} Problème : Notions de mécanique du vol (≈1h10min)

On étudie dans ce problème un système mécanique {avion + pilote}, assimilé à un point matériel, dans le référentiel terrestre local supposé galiléen. L'étude se focalisera sur deux grandeurs caractéristiques du vol, notamment :

- la **force aérodynamique**, dont la norme peut être modélisée par la relation $F_{aéro} = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_a$, où S est l'aire projetée du système perpendiculairement à la direction de l'écoulement, ρ la masse volumique de l'air, v la vitesse du système (relative par rapport à l'air...) et C_a le coefficient aérodynamique qui dépend de la forme de l'objet. Cette force aérodynamique est elle-même décomposée en deux forces : la portance \vec{F}_p (composante perpendiculaire à l'écoulement, donc aux ailes) et la traînée \vec{F}_t (composante parallèle à l'écoulement).



- le **facteur de charge** (ou nombre de G), égal au rapport de la norme de la portance par celle du poids : $G = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\|\vec{P}\|}$, qui traduit la contrainte mécanique imposée aux ailes.

On adopte les notations suivantes pour les vecteurs forces appliqués à l'avion :

Poids	Portance	Traînée	Traction
\vec{P}	\vec{F}_p	\vec{F}_t	\vec{T}

III.A) Questions préliminaires

- Q38. Préciser l'origine physique des différentes forces.
- Q39. Déterminer la dimension du coefficient aérodynamique (C_a).

III.B) Cas d'un avion motorisé en vol horizontal rectiligne à vitesse constante

- Q40. Quelle est la relation qui lie les forces (\vec{P} , \vec{F}_p , \vec{F}_t et \vec{T}) s'exerçant sur le système ?
- Q41. En déduire la valeur du facteur de charge G_h infligé au système dans ce cas.

III.C) Cas d'un avion motorisé en montée rectiligne à vitesse constante

On note $\alpha > 0$ l'angle de l'axe longitudinal de l'avion avec l'horizontale.

- Q42. La relation précédente qui lie les forces est-elle modifiée ? Justifier.
- Q43. Faire un schéma **cohérent** des forces en précisant la direction de la verticale.
- Q44. Exprimer dans ce cas le facteur de charge G_m en fonction de l'angle α .

III.D) Cas d'un avion moteur arrêté en descente rectiligne à vitesse constante

Lors d'une panne de moteur, l'avion peut se mettre à planer afin de se poser au mieux possible.

Q45. Justifier qu'un vol plané rectiligne ne peut pas avoir lieu à vitesse constante sans que l'avion ne pique du nez. On notera par la suite α' l'angle entre la trajectoire et l'horizontale.

Q46. Faire un schéma cohérent des forces en précisant la direction de la verticale.

Q47. Quel est le facteur de charge G_d infligé aux ailes dans ce cas ?

La conception des avions est telle que l'on cherche à obtenir la meilleure finesse, notée f_{max} , caractéristique fondamentale correspondant au rapport de la distance maximale horizontale que peut parcourir un « planeur » (ou avion en panne moteur...) par l'altitude perdue pour parcourir cette distance.

Q48. Prouver que $f_{max} = 1/\tan \alpha'_{min}$, où α'_{min} est l'angle minimal permettant de maintenir un mouvement rectiligne et uniforme en l'absence de moteur.

Q49. En déduire que la finesse maximale d'un appareil est égale au rapport des coefficients aérodynamiques de portance et de traînée (respectivement notés C_z et C_x) : $f_{max} = C_z/C_x$.

On considère un avion léger d'une masse totale $m = 900$ kg, dont la finesse maximale vaut 6 pour une vitesse de déplacement en planant de 150 km.h^{-1} . Sa section transverse (maître-couple) vaut $S = 10 \text{ m}^2$ et on considère que l'air dans lequel il évolue a pour masse volumique $\rho = 1,3 \text{ g.L}^{-1}$. On prendra pour norme du champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Q50. Calculer dans ces conditions les valeurs de C_x , et de C_z .

III.E) Cas d'un virage circulaire horizontal uniforme

Q51. Représenter la trajectoire de l'avion sur votre feuille, à l'aide de 3 schémas différents : le premier en vue de dessus, le second en vue de côté et le troisième en 3D, faisant apparaître le système de coordonnées cylindriques adapté à l'étude. On notera R le rayon de la trajectoire, θ l'angle associé au mouvement de rotation et z l'altitude de l'avion.

A l'aide des précédents schémas, correctement annotés :

Q52. Exprimer le vecteur vitesse de l'avion dans la base cylindrique, en fonction des grandeurs R et $\dot{\theta}$.

Q53. Exprimer le vecteur accélération de l'avion dans la base cylindrique, en fonction de la vitesse v de l'avion et du rayon R .

Q54. Projeter chacune des forces s'exerçant sur l'avion dans la base cylindrique.

N.B. : On pourra décomposer la portance \vec{F}_p selon sa composante verticale, appelée **sustentation** \vec{F}_{pz} , et sa composante horizontale, appelée **force déviatrice** \vec{F}_{pd} . On notera φ le gîte de l'avion : angle de la portance \vec{F}_p avec la verticale (cf. schéma ci-contre).

Par application de la deuxième loi de Newton :

Q55. Exprimer le facteur de charge G_{vh} correspondant à ce mouvement en fonction de φ .

Q56. Exprimer le rayon R de la trajectoire en fonction de la vitesse en virage horizontal stabilisé v , de la norme de l'accélération de la pesanteur g , et du gîte φ .

Q57. A.N. : Pour une vitesse en virage horizontal stabilisé de 160 km.h^{-1} , calculer le rayon R de la trajectoire et le facteur de charge G_{vh} dans le cas d'un gîte de 45° , puis de 60° . Conclure.

