

## Correction du DS n°6 de *PHYSIQUE-CHIMIE*

### 1<sup>ère</sup> Problème : *Expérience de Rüchardt* (EPITA\_IPSA\_ESME 2024)

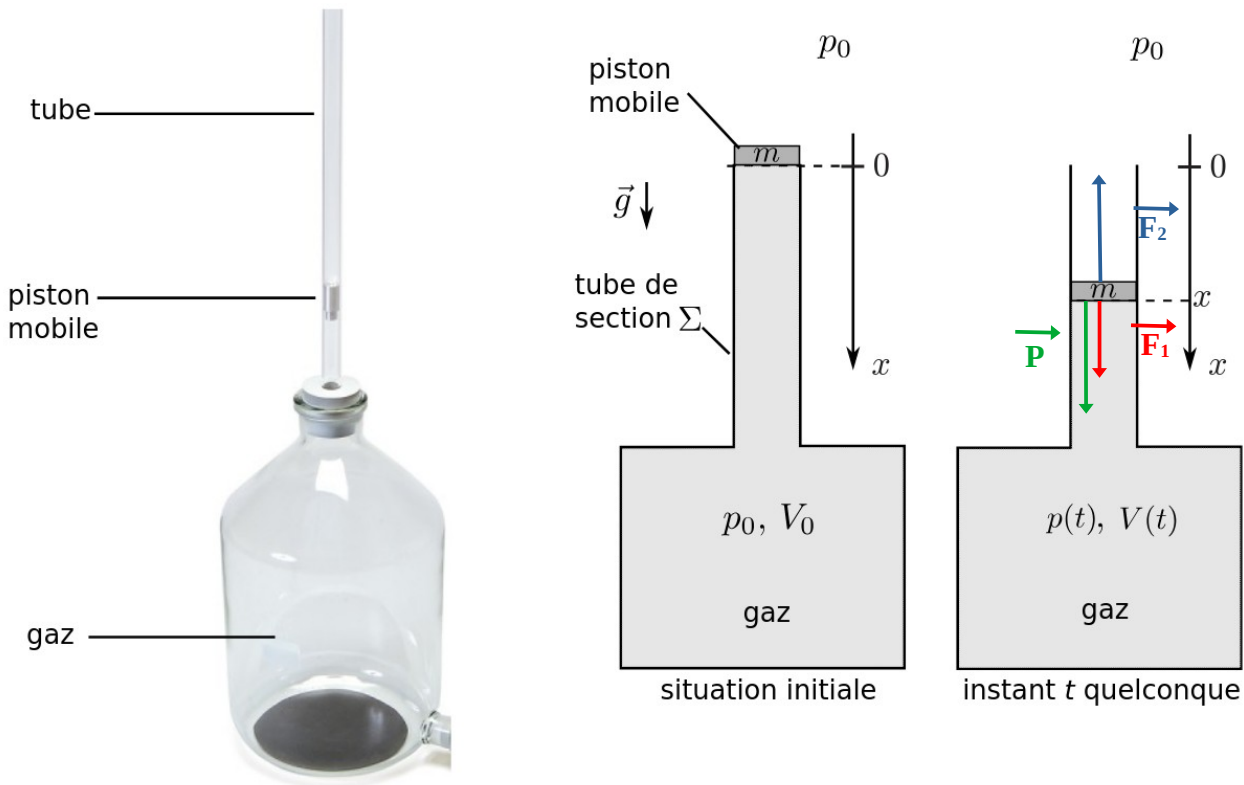


Figure 1 : photographie et schéma de l'expérience.

**Q1.** Deux forces pressantes s'exercent sur le système {piston mobile} :

- la force pressante exercée par l'atmosphère sur la face plane supérieure du piston. Puisque la pression  $y$  est homogène, cette force pressante s'écrit :  $\vec{F}_1 = p_0 \Sigma \vec{e}_x$  (orientée vers le bas)
- la force pressante exercée par le gaz contenu dans la bouteille sur la face plane inférieure du piston. Puisque la pression  $y$  est homogène, cette force pressante s'écrit :  $\vec{F}_2 = -p(t) \Sigma \vec{e}_x$  (orientée vers le haut, et de norme plus importante puisque  $p(t) > p_0$ ).

**Q2.** D'après l'expression de la résultante des forces pressantes :

$$[\gamma] = \frac{[Force]}{[K][x]} = \frac{[Force]}{\frac{[p_0][\Sigma]^2}{[V_0]} \cdot L} = \frac{[Force/pression]}{\frac{(L^2)^2}{L^3} \cdot L} = \frac{[surface]}{L^2} = 1$$

Le coefficient adiabatique  $\gamma$  est donc **adimensionné** !

**Q3. Référentiel d'étude :** terrestre, local, supposé galiléen

**Système étudié :** {piston mobile, assimilé à un point matériel de masse  $m = cste$ }

**Cinématique** dans le repère cartésien à 1D :

vecteur position  $\vec{OM} = x \vec{e}_x$  ; vitesse :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x$  ; accélération :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$

**Bilan des forces :** \* Poids du système :  $\vec{P} = m g \vec{e}_x$  ;

\* Résultante des forces pressantes :  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -(\gamma K x) \vec{e}_x$  ;

\* on néglige les frottements (fluide et solide) ainsi que la poussée d'Archimède.

**Deuxième loi de Newton** :  $\vec{P} + \vec{F} = m \vec{a}$  soit, en projetant sur l'axe x :  $mg - \gamma K x = m \ddot{x}$ .

D'où l'équation différentielle :  $\ddot{x} + \frac{\gamma K}{m} x = g$

**Q4.** Forme canonique de cette équation différentielle caractéristique d'un **oscillateur harmonique** :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Avec, par identification :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma K}{m}}$  la pulsation propre et  $x_{eq} = \frac{mg}{\gamma K}$  la position à l'équilibre.

**Q5.** Les solutions de cette équation différentielle ont pour expression :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$$

**Q6.** D'après l'expression de la pulsation propre, et par définition de la période, on obtient :

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{m}{K} \quad \text{A.N. : } \gamma \equiv \frac{4\pi^2}{1,08^2} \times 4,01 \cdot 10^{-2} \equiv \underline{1,36}$$

I.A.2) Méthode de Rinkel

**Q7.** Expression de l'énergie cinétique  $E_c$  du piston :  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Expression de l'énergie potentielle de pesanteur du piston :  $E_{p, pes.} = -m g x$  en posant  $E_{p, pes.}(0) = 0$

**Attention au signe « - », dû au fait que l'axe x soit la verticale descendante !**

**Q8.** Le travail élémentaire de la résultante des forces de pression s'écrit :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (-\gamma K x \vec{e}_x) \cdot (dx \vec{e}_x) = -\gamma K x dx$$

Cette force est donc **conservative**, puisqu'il existe une fonction énergie potentielle  $E_{p, press.}$  telle que :

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_{p, press.} \Leftrightarrow \frac{dE_{p, press.}}{dx} = \gamma K x \Leftrightarrow E_{p, press.}(x) = \frac{1}{2} \gamma K x^2 \text{ en posant } E_{p, press.}(0) = 0$$

On notera l'analogie très forte avec la force de rappel et son énergie potentielle élastique associée !

**Q9.** Le **théorème de l'énergie mécanique** s'écrit dans le cadre d'un mouvement conservatif (frottements négligés) :  $E_m = cste$ , ce qui se traduit donc ici, entre l'instant initial pour lequel  $x(O) = 0$  et  $\dot{x}(O) = 0$ ,

et l'instant particulier pour lequel  $x(B) = L$  ;  $\dot{x}(B) = 0$  par la relation :

$$E_c(O) + E_{p, pes.}(O) + E_{p, press.}(O) = E_c(B) + E_{p, pes.}(B) + E_{p, press.}(B)$$

$$\text{soit : } 0 + 0 + 0 = 0 - mgL + \frac{1}{2} \gamma K L^2 \Leftrightarrow \gamma = \frac{2g}{L} \frac{m}{K}$$

**Q10.** A.N. :  $\gamma \equiv \frac{2 \times 9,81}{0,570} \times 4,01 \cdot 10^{-2} \equiv \underline{1,38}$  Valeur cohérente avec celle obtenue en **Q6** !

**I.B) Étude mécanique avec frottements**

**Q11.** On repère environ  $N=9$  oscillations sur la figure 2 avant de parvenir à un état d'équilibre final. Le facteur de qualité est donc suffisamment grand pour pouvoir considérer que :  $Q \simeq \frac{N}{1,5} = 6$

**Q12.** Le régime transitoire étudié est un **régime pseudo-périodique**.

**Q13.** L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène est :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

Le discriminant du polynôme du second degré est donc :  $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4 \omega_0^2 < 0$  puisqu'on observe des oscillations. Et les solutions de l'équation caractéristique sont donc complexes et conjuguées :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\mu \pm j \Omega \text{ avec les notations de l'énoncé.}$$

On en déduit donc, par identification :  $\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

**Q14.** Ainsi, la forme générale des solutions de l'équation (1) est :

$$x(t) = x_{EH}(t) + x_{part} = (A \cos(\Omega t) + B \sin \Omega t) e^{-\mu t} + \frac{g}{\omega_0^2}$$

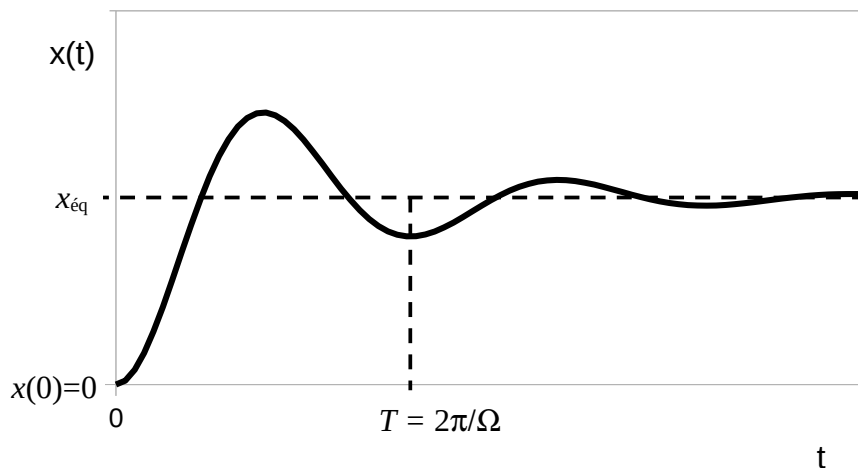
**N.B. :**  $\frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{\gamma K} = x_{eq}$  ; la position d'équilibre ne dépend pas de la prise en compte des frottements !

**Q15.** Traduisons les conditions initiales :  $x(t=0) = 0 = (A + 0) e^0 + \frac{g}{\omega_0^2} \Leftrightarrow A = -\frac{g}{\omega_0^2}$

Par ailleurs :  $\dot{x}(t) = (-A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos \Omega t) e^{-\mu t} + (A \cos(\Omega t) + B \sin \Omega t)(-\mu) e^{-\mu t}$

Et donc :  $\dot{x}(t=0) = 0 = (0 + B \Omega) e^0 - \mu (A + 0) e^0 \Leftrightarrow B = \frac{\mu A}{\Omega} = -\frac{\mu g}{\Omega \omega_0^2}$

**Q16.** L'allure du graphe de la solution est donc :



**Q17.** Puisque  $Q > 3$ , on peut facilement considérer que  $\Omega \simeq \omega_0$  et donc  $T \simeq T_0$

**Remarque :**  $\sqrt{1 - \frac{1}{4 \times 6^2}} = 0,997$  !!!

**Q18.** D’après le modèle des données représenté figure 3, et puisque  $\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\mu} \simeq \frac{\Omega}{2\mu}$ , on peut

en déduire que :  $Q \simeq \frac{5,83}{2 \times 0,30} \simeq 9,7$

**Q19.** L’existence du terme supplémentaire en  $D \times t$  (nommé « dérive ») provient d’une hypothèse trop forte du modèle mécanique retenu, notamment le fait qu’il n’y ait pas d’échanges thermiques entre le gaz à l’intérieur de la bouteille et le milieu extérieur. Ce phénomène intervient notamment sur les temps longs, et pas aux temps plus courts.

**2<sup>ème</sup> Problème : Modélisation d’un oscillateur**

**II.A) Étude énergétique d’un oscillateur**

**Q20.** Une force est dite conservative lorsque son travail ne dépend que de l’état initial et de l’état final, mais pas du trajet pour réaliser le déplacement.

L’énergie potentielle associée est alors une fonction de la position qui vérifie la relation finie : vérifie alors à une force conservative  $-\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ .

**Q21.** Pour une force de rappel élastique :  $E_{p,elast.}(x) = \frac{1}{2} k x^2$ , avec  $k$  la constante de raideur du ressort,  $x$  l’allongement algébrique donc l’écart à la position du ressort à vide, et en prenant l’origine de l’énergie potentielle (définie à une constante près) en  $x=0$ .

**Q22.** En supposant (évidemment) que **le référentiel d’étude est galiléen**, on peut affirmer que :

- la position d’abscisse  $y=Y_0$  est une **position d’équilibre** car  $\frac{dE_p}{dy}(y) = 2 \alpha (y - Y_0)$ , et donc :

$$\left( \frac{dE_p}{dy} \right)_{(y=Y_0)} = 0$$

- cette position d’équilibre est **stable** car :  $\frac{d^2E_p}{dy^2}(y) = 2 \alpha$  et donc  $\left( \frac{d^2E_p}{dy^2} \right)_{(y=Y_0)} > 0$

**Autre argument (géométrique) :** le graphe de la courbe  $E_p(y)$  correspond à une **parabole** avec le sommet d’abscisse  $Y_0$  orienté vers le bas. On a donc un **creux d’énergie potentielle** au niveau de  $y=Y_0$  !

**Q23.** Puisque le **système est conservatif** :  $E_m = cste$ .

Or, par définition :  $E_m = E_c + E_p$  et  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$ , et donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = m \dot{y} \ddot{y} + 2\alpha (y - Y_0) \dot{y} = 0$$

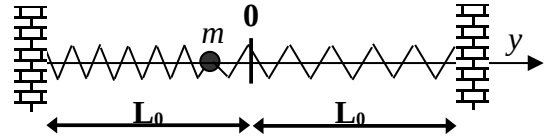
Puisque le système est en mouvement, alors  $\dot{y}$  n’est pas la fonction identiquement nulle, ce qui permet d’obtenir l’équation différentielle du mouvement :  $m \ddot{y} + 2\alpha (y - Y_0) = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 Y_0$

On en déduit qu’il s’agit d’oscillations harmoniques (autour de la position d’équilibre stable située en

$y=Y_0$ ), dont la période vaut :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{2m}{\alpha}}$

**Application :**

**Q24.** L'origine de l'axe  $y$  se situe au centre du schéma, puisque c'est à cet unique endroit qu'aucun des deux ressorts n'exerce de force de rappel :  $y$  désigne alors l'écart à la position d'équilibre.



**Q25.** Par symétrie, les deux ressorts ont **un allongement algébrique opposé** :  $y$  pour l'un et  $-y$  pour l'autre, ce qui revient à avoir comme énergie potentielle globale :  $E_p(y) = \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k (-y)^2 = k y^2$

**Q26.** On se retrouve donc exactement dans la situation précédente, avec  $\alpha = k$ . Il n'y a plus qu'à faire une application numérique :  $T_0 = \pi \sqrt{\frac{2 \times 0,200 \text{ kg}}{40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,31 \text{ s}$

**Q27.** D'après l'expression de la force de frottement (modèle linéaire) :  $[\beta] = \frac{[Force]}{[m][v]} = \frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-1}}$

D'où :  $[\beta] = \text{T}^{-1}$  : l'USI de  $\beta$  est la  $\text{s}^{-1}$ .

**Q28.** L'équation différentielle du mouvement peut s'obtenir par le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_f) \Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = m \dot{y} \ddot{y} + 2k y \dot{y} = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -\beta m v^2 = -\beta m (\dot{y})^2$$

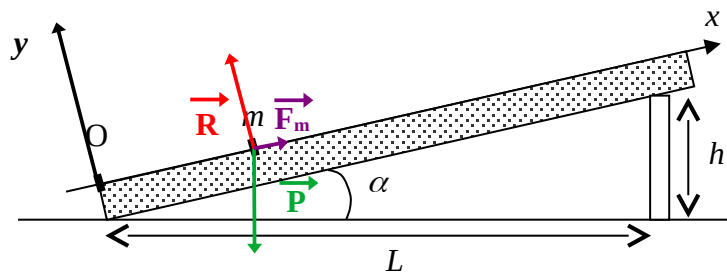
Puisque  $\dot{y} \neq 0$  (fonction nulle), on en déduit la nouvelle équation différentielle du mouvement :

$$m \ddot{y} + 2k y = -\beta m \dot{y} \Leftrightarrow \ddot{y} + \beta \dot{y} + \frac{2k}{m} y = 0$$

**Q29.** Pour pouvoir obtenir des oscillations, il faut avoir un régime transitoire pseudo-périodique, donc que :  $\Delta = \beta^2 - 8 \frac{k}{m} < 0 \Leftrightarrow \beta < \beta_{\max} = 2 \sqrt{\frac{2k}{m}}$

**A.N. :**  $\beta_{\max} = 2 \sqrt{\frac{2 \times 40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}{0,200 \text{ kg}}} = 40 \text{ s}^{-1}$

**II.B) Modélisation d'un dispositif expérimental**



**Q30.** À l'équilibre, le système {aimant mobile de masse  $m = \text{cste}$ } est soumis aux forces suivantes :

- **Poids :**  $\vec{P} \begin{pmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix}$  dans la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$
- **Réaction du support,** normale au support car sans frottements solides :  $\vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{R}\| \end{pmatrix}$

- **Force magnétique** (répulsive) :  $\vec{F}_m \begin{pmatrix} C \left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n \\ 0 \end{pmatrix}$

**Q31.** À l'équilibre, les forces se compensent, d'après la **première loi de Newton** :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_m = \vec{0}$

La projection de cette relation sur l'axe  $x$  donne :  $C \left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n = mg \sin \alpha$

Par ailleurs, dans le cas des petits angles, on a :  $\sin \alpha \simeq \tan \alpha = \frac{h}{L}$

D'où la relation :  $C \left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n = \frac{mgh}{L} \Leftrightarrow \boxed{x_e = x_0 \left(\frac{LC}{mgh}\right)^{1/n}}$

**Q32.** Dans l'hypothèse de la loi de force (2), alors :

$$n \ln \left(\frac{x_e}{x_0}\right) = \ln \left(\frac{LC}{mgh}\right) = \ln \left(\frac{LC}{mg}\right) - \ln(h) \Leftrightarrow \ln(h) = \ln \left(\frac{LC}{mg}\right) - n \ln \left(\frac{x_e}{x_0}\right)$$

Cela signifie que la représentation graphique de  $Y = \ln(h)$  en fonction de  $X = \ln \left(\frac{x_e}{x_0}\right)$  doit donner une **droite de pente négative**, ce qui est donc tout à fait cohérent avec le graphique présenté.

**Q33.** Une régression linéaire (calculatrice autorisée...) mène à :

- la pente de la droite :  $-n = -4,06 \Leftrightarrow \boxed{n = 4,06}$  (en réalité,  $n$  est un entier  $\Rightarrow 4$ )
- l'ordonnée à l'origine :  $\ln \left(\frac{LC}{mg}\right) = -13,6 \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{mg}{L} e^{-13,6} \text{ (m)}}$

**A.N. :**  $C \equiv \frac{0,189 \times 9,81}{1,20} e^{-13,6} \equiv \underline{2,0 \cdot 10^{-6} \text{ N}}$

- pour la petite histoire :  $r^2 = 0,995$

**Q34.** Il y a deux contributions à l'énergie potentielle totale  $E_p(x)$  du système :

- l'énergie potentielle de pesanteur :  $E_{p,\text{pes.}}(x) = mgZ = mg \sin \alpha x \simeq \frac{mgh}{L} x$
- l'énergie potentielle associée à la force magnétique, telle que :

$$dE_{p,m} = -\delta W(\vec{F}_m) = -\left(C \left(\frac{x_0}{x}\right)^n \vec{e}_x\right) \cdot (dx \vec{e}_x) \Leftrightarrow \frac{dE_{p,m}}{dx} = -C \left(\frac{x_0}{x}\right)^n$$

On intègre pour obtenir :  $E_{p,m}(x) = \frac{C}{n-1} \frac{(x_0)^n}{x^{n-1}}$

D'où l'expression :  $\boxed{E_p(x) = \frac{mgh}{L} x + \frac{C}{n-1} \frac{(x_0)^n}{x^{n-1}}}$

Mais puisque  $\frac{mgh}{L} = C \left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n$ , alors :  $\boxed{E_p(x) = C (x_0)^n \left(\frac{x}{(x_e)^n} + \frac{1}{(n-1) x^{n-1}}\right)}$  (+ cste...)

**Q35.** Par identification des deux formules fournies par l'énoncé :  $K = \left( \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=x_e}$

Il faut donc calculer :  $\frac{dE_p}{dx} = C (x_0)^n \left( \frac{1}{(x_e)^n} - \frac{1}{x^n} \right)$  (qui est bien nul en  $x=x_e$  : position d'équilibre !), puis

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = \frac{n C (x_0)^n}{x^{n+1}} \text{ (qui est bien } > 0 \text{ au voisinage de la position d'équilibre : équilibre stable !)}$$

Ainsi : 
$$K = \frac{n C (x_0)^n}{(x_e)^{n+1}}$$

**Q36.** Puisque la forme de l'énergie potentielle du système au voisinage de la position d'équilibre est de la forme de celle d'une force de rappel élastique, tout se passe comme si le système était soumis à une force de rappel de constante de raideur égale à  $K$ .

**Q37.** Par analogie avec le cours sur l'oscillateur mécanique harmonique, la période des petites oscillations autour de l'équilibre est donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(x_e)^{n+1}}{n C (x_0)^n}} \propto (x_e)^{\frac{n+1}{2}} \propto h^{-\frac{(n+1)}{2n}}$$

Pour déterminer  $n$ , on peut donc mesurer la période  $T$  pour différentes hauteurs connues  $h$  puis tracer  $\ln(T)$  en fonction de  $\ln(h)$  : on devrait obtenir une droite de pente égale à  $-\frac{(n+1)}{2n} \simeq -0,625$  et donc accéder à la valeur de  $n$  !

**3<sup>ème</sup> Problème : Notions de mécanique du vol**

**Q38.** Origine des forces :

- Le poids a pour origine l'**interaction gravitationnelle** entre le système et la Terre.
- La traction correspond à la propulsion induite par une hélice ou un turboréacteur, et qui repose sur une **résultante de forces de pression**.
- La traînée correspond à la **force de frottement fluide** relative au mouvement relatif de l'avion par rapport à l'air.
- La portance correspond à la **résultante des forces pressantes** sur les ailes de l'avion (cf. TSI2...) : la pression exercée par l'air sous l'aile est supérieure à celle au dessus.

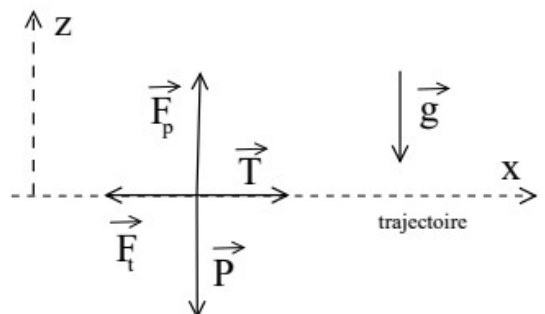
**Q39.** 
$$[C_a] = \frac{[\text{Force}]}{[\rho][v^2][S]} = \frac{\text{M.L.T}^{-2}}{\text{M.L}^{-3} \cdot (\text{L.T}^{-1})^2 \cdot \text{L}^2} = 1$$
 : pas de dimension pour un coef. aérodynamique

**Q40.** Le mouvement étant rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen, les forces se compensent d'après la **première loi de Newton** : 
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_t + \vec{F}_p = \vec{0}$$

**Q41.** La relation précédente projetée selon les axes horizontal ( $x$  dans le sens du mouvement) et vertical ( $z$  vers le haut)

s'écrit : 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\|\vec{P}\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|\vec{T}\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{F}_t\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{F}_p\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{T}\| = \|\vec{F}_t\| \\ \|\vec{P}\| = \|\vec{F}_p\| \end{cases} \text{ D'où : } G_h = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\|\vec{P}\|} = 1$$

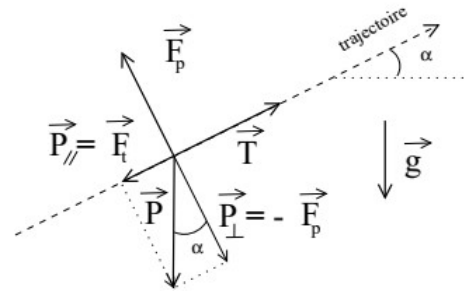


**Q42.** On a toujours un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen, donc la relation vectorielle entre les forces n'est donc pas modifiée : on a toujours  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_t + \vec{F}_p = \vec{0}$

**Q43.** En revanche, désormais, le poids et la portance ne se compensent plus (cf. schéma ci-contre).

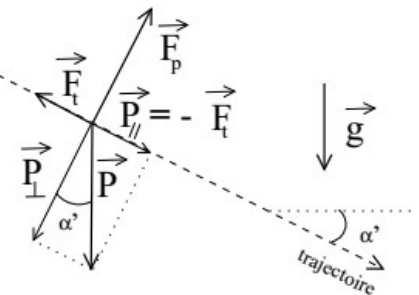
**Q44.** La portance ne compense désormais que la composante du poids selon la direction perpendiculaire à la trajectoire :

$$\|\vec{F}_p\| = \|\vec{P}_\perp\| = \|\vec{P}\| \cos \alpha \quad \text{D'où : } G_m = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\|\vec{P}\|} = \cos \alpha$$



**Q45.** Sans moteur,  $\|\vec{T}\| = \vec{0}$ . Pour avoir un mouvement rectiligne et uniforme, il faut donc désormais que  $\vec{P} + \vec{F}_t + \vec{F}_p = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_p = -(\vec{P} + \vec{F}_t)$ . Puisque  $\vec{P}$  est vertical et  $\vec{F}_t$  est dans la direction de la trajectoire,  $\vec{F}_p$  ne peut pas être verticale, donc la trajectoire ne peut pas être horizontale, et doit nécessairement être orientée vers le bas (cf. schéma ci-contre).

**Q46.**



**Q47.** De même que précédemment,  $\|\vec{F}_p\| = \|\vec{P}_\perp\| = \|\vec{P}\| \cos \alpha'$

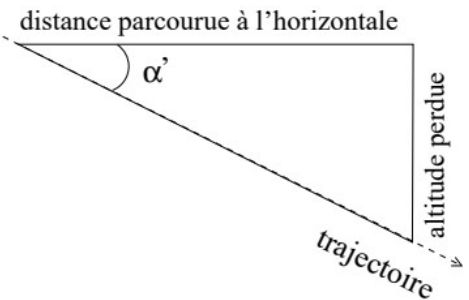
D'où :  $G_d = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\|\vec{P}\|} = \cos \alpha'$

**Q48.** Par définition de la finesse, et grâce au schéma ci-contre :

$$\tan \alpha'_{\min} = \frac{\text{altitude perdue}}{\text{distance parcourue à l'horizontale}} = \frac{1}{f_{\max}}$$

**Q49.** Par ailleurs, d'après le schéma de **Q46**, on constate que

$$\tan \alpha'_{\min} = \frac{\|\vec{F}_t\|}{\|\vec{F}_p\|} = \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_x}{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_z} = \frac{C_x}{C_z}$$



On en déduit donc les relations proposées par l'énoncé :

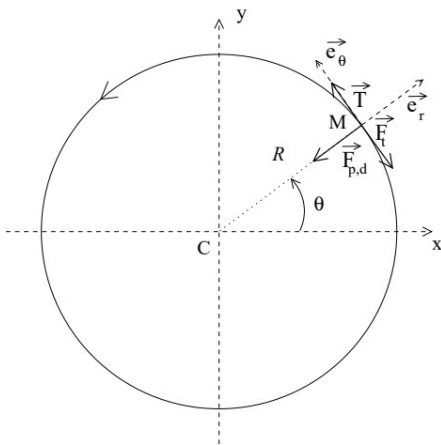
$$f_{\max} = \frac{1}{\tan \alpha'_{\min}} = \frac{C_z}{C_x}$$

**Q50.** Or, d'après **Q46**,  $\cos \alpha'_{\min} = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_z}{mg}$

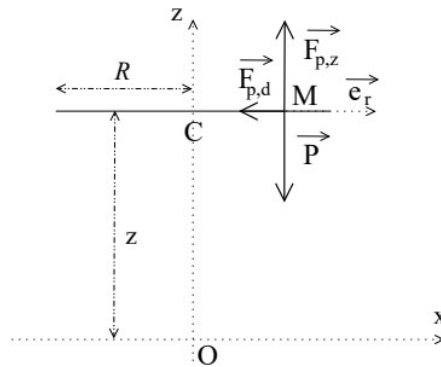
Donc :  $C_z = \frac{2 mg \cos(\arctan(1/f_{\max}))}{\rho v^2 S}$

**A.N. :**  $C_z = \frac{2 \times 900 \times 9,8 \times \cos(\arctan(1/6))}{1,3 \times (150 \times 10^3 / 3600)^2 \times 10} \approx 0,77$  et donc  $C_x = \frac{C_z}{f_{\max}} = \frac{0,77}{6} \approx 0,13$

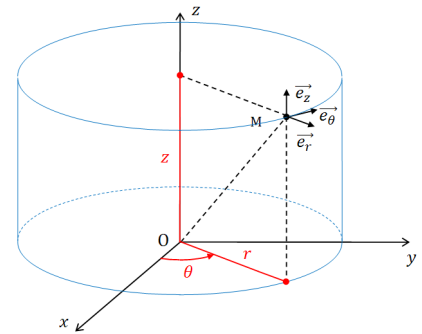
**Q51. vue de dessus**



**vue de côté**



**3D**



**Q52.** On note O le centre du repère cylindrique, C le centre de la trajectoire circulaire, donc le projeté orthogonal du point matériel M sur l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut. Dans la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , le vecteur position s'écrit :  $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = R \vec{e}_r + z \vec{e}_z$  avec  $z = \text{cste}$  puisque la trajectoire est dans un plan horizontal.

D'où l'expression de la vitesse de l'avion :  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \vec{0} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  soit :  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ R \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce vecteur varie en direction, mais pas en sens (toujours celui de  $\vec{e}_\theta$ , donc du mouvement), ni en norme, puisque le mouvement est circulaire et uniforme, donc  $\dot{\theta} = \text{cste}$ .

**Q53.** Puis l'expression de l'accélération :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = R \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r) = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$  soit :

$\vec{a} \begin{pmatrix} -\frac{v^2}{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  : on retrouve l'**accélération centripète** du mouvement circulaire et uniforme.

**Q54.** Les projections des forces dans la base cylindrique sont les suivantes :

Poids :  $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \|\vec{g}\| \end{pmatrix}$  Traction :  $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{T}\| \\ 0 \end{pmatrix}$  Traînée :  $\vec{F}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\vec{F}_t\| \\ 0 \end{pmatrix}$  Portance :  $\vec{F}_p = \begin{pmatrix} -\|\vec{F}_{p,d}\| \\ 0 \\ \|\vec{F}_{p,z}\| \end{pmatrix}$

**Q55.** D'après la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$ , soit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \|\vec{g}\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{T}\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\vec{F}_t\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{F}_{p,d}\| \\ 0 \\ \|\vec{F}_{p,z}\| \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\frac{v^2}{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

- que la sustentation compense le poids :  $\|\vec{F}_{p,z}\| = \|\vec{P}\| = m \|\vec{g}\|$
- que la traction compense la traînée :  $\|\vec{T}\| = \|\vec{F}_t\|$  (permet le mouvement uniforme)
- que la force déviatrice permet le mouvement de rotation :  $\|\vec{F}_{p,d}\| = \frac{mv^2}{R}$

Par ailleurs, d'après le schéma :  $\cos \varphi = \frac{\|\vec{F}_{p,z}\|}{\|\vec{F}_p\|}$  donc  $G_{vh} = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{1}{\cos \varphi} > 1$

Q56. De même, d'après le schéma :  $\tan \varphi = \frac{\|\vec{F}_{p,d}\|}{\|\vec{F}_{p,z}\|} = \frac{m v^2 / R}{m \|\vec{g}\|}$  donc  $R = \frac{v^2}{\|\vec{g}\| \tan \varphi}$

Q57. A.N. :

**Pour  $\varphi = 45^\circ$  :**  $G_{vh} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \approx 1,4$   $R = \frac{(160/3,6)^2}{9,8 \tan 45^\circ} \approx 0,20 \text{ km}$

**Pour  $\varphi = 60^\circ$  :**  $G_{vh} = \frac{1}{\cos 60^\circ} \approx 2,0$   $R = \frac{(160/3,6)^2}{9,8 \tan 60^\circ} \approx 0,12 \text{ km}$

**Conclusion :** un virage plus serré se paye en une contrainte plus forte sur les ailes (attention à la casse...).