

# DS n°7

## de PHYSIQUE-CHIMIE

durée : 4h

### Consignes :

<b>Calculatrice autorisée</b>
-------------------------------

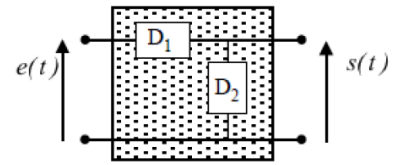
- Rédiger votre devoir sur une **copie double**, avec une **marge en en-tête** et une **marge à gauche** de chaque page.
- Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
- Encadrer vos **expressions littérales** (EL) ; souligner les **applications numériques** (AN) avec un stylo de couleur bien visible.
- N'écrivez **rien au crayon de papier** sur votre copie.
- Ne rendez pas l'énoncé (ou une partie de l'énoncé) avec votre copie.

### Conseils :

- Vérifier l'**homogénéité** de vos expressions littérales.
- Une AN sans unité ne vaut en général rien et dégrade l'humeur du correcteur...

### 1<sup>er</sup> Problème : Analyse d'un filtre

Un quadripôle est constitué de deux dipôles  $D_1$  et  $D_2$ , disposés comme l'indique la figure ci-contre. On sait que le constructeur a utilisé pour construire le filtre un seul résistor de résistance  $R$ , un seul condensateur (idéal) de capacité  $C$  et une seule bobine (idéale) d'inductance  $L$ . Ces trois dipôles ont été associés en série ou en parallèle de façon à former les dipôles  $D_1$  et  $D_2$ .

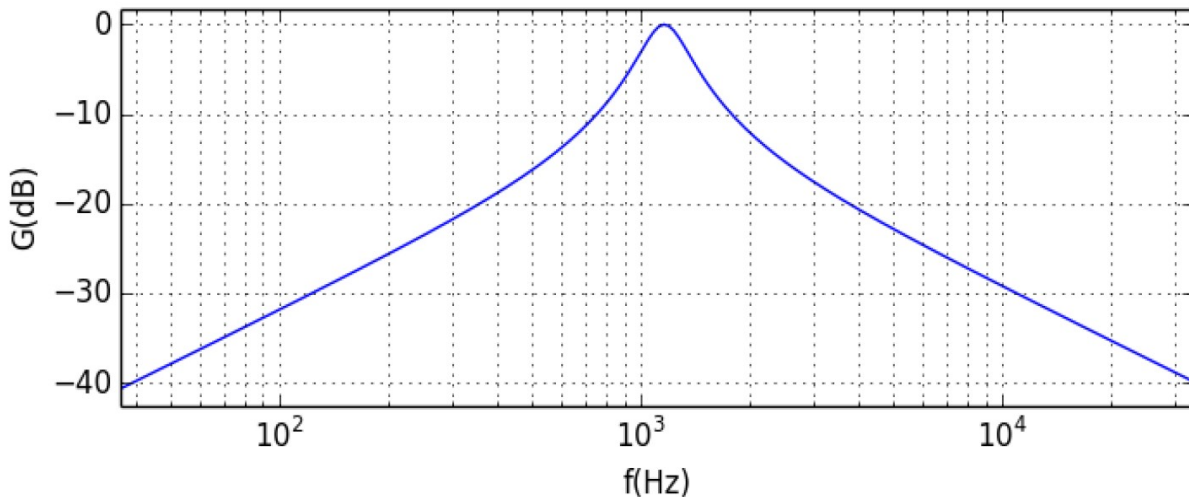


Seules les bornes d'entrée et de sortie sont accessibles à l'expérimentateur. Ce dernier alimente le filtre par une source idéale de tension alternative sinusoïdale de force électromotrice  $e(t) = E \cos(2\pi f t)$ , et effectue une étude en fréquence  $f$  de la réponse du filtre. Il réalise le diagramme de Bode fourni ci-dessous, qui a été modélisé à l'aide de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_{\max}}{1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec  $\omega$  la

pulsation de la source.



**Q1.** Rappeler les définitions de la pulsation de la source  $\omega$ , de la fonction de transfert du filtre  $\underline{H}$ , et du gain en décibel du filtre  $G_{dB}$ .

**Q2.** Préciser la nature du filtre étudié en justifiant votre réponse sans calcul exagéré.

**Q3.** Nommer les grandeurs  $H_{\max}$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ , et préciser ce qu'elles représentent pour le filtre.

**Q4.** Déterminer **graphiquement** les valeurs numériques de ces paramètres, **en détaillant clairement la démarche** suivie pour chacun des trois paramètres.

Pour avoir une information supplémentaire sur la constitution du filtre, l'expérimentateur relie l'entrée du filtre à une source quasi-idéale de tension continue, de force électromotrice  $U_0 = 15 \text{ V}$ , la sortie étant ouverte. Il mesure, en régime établi, un courant d'entrée d'intensité  $I_0 = 15 \text{ mA}$ .

**Q5.** En déduire la disposition des trois composants (résistor, bobine et condensateur) dans le quadripôle. Le raisonnement devra être clairement détaillé.

**Q6.** Déterminer les valeurs numériques de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . Le raisonnement devra être clairement détaillé.

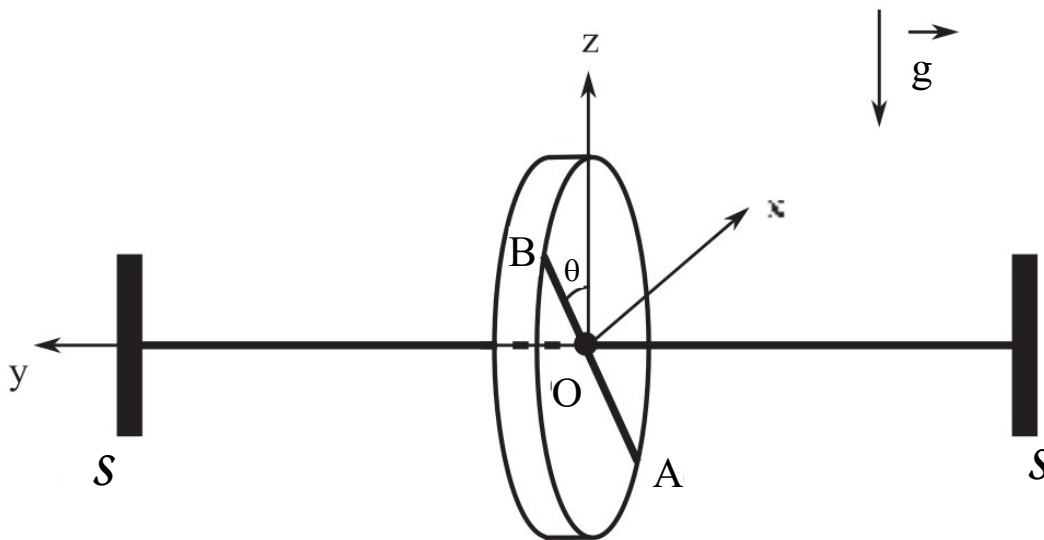
**Q7.** Discuter *a posteriori* du caractère idéal des dipôles utilisés.

## 2<sup>ème</sup> Problème : Mesure expérimentale du moment d'inertie d'une roue de vélo par rapport à son axe de rotation

Dans cette partie, on s'intéresse à un protocole expérimental permettant d'estimer le moment d'inertie d'une roue de vélo par rapport à son axe de rotation « naturel ».

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni du repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , la roue est reliée à un support  $\mathcal{S}$  fixe dans ce référentiel par un câble de torsion de constante  $C$ , comme indiqué sur la **Figure 1**. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur  $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ .

Le seul mouvement possible de la roue est un mouvement de rotation autour de l'axe orienté  $(O, \vec{u}_y)$ . Quand la roue est en équilibre, son diamètre  $AB$  est dirigé selon la verticale ascendante. Quand la roue est en mouvement, on repère sa position par l'angle orienté  $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{AB})$ . À l'équilibre,  $\theta = 0$ .



**Figure 1** : schéma du dispositif expérimental

Le moment du couple de rappel exercé par le câble sur la roue est proportionnel à la position angulaire du disque :  $\Gamma_{r,y} = \pm C \theta$ , couple qui tend à ramener la roue vers sa position d'équilibre.

**Q8.** Attribuer le signe correct à l'expression du couple de rappel, en justifiant votre choix.

On souhaite déterminer les caractéristiques mécaniques du pendule de torsion ainsi formé, à savoir le moment d'inertie  $J_y$  de la roue par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_y)$  et la constante de torsion  $C$  du câble, ces deux grandeurs étant supposées constantes. On réalise donc une première expérience dans laquelle la roue est écartée de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_0$ , puis abandonnée sans vitesse initiale. Dans l'air les frottements étant négligeables, la roue effectue alors des oscillations de période  $T_0$ .

**Q9.** Établir l'équation différentielle satisfaite par l'angle  $\theta$ , à l'aide d'un théorème adapté.

**Q10.** En déduire l'expression de la période  $T_0$  des oscillations en fonction des paramètres  $J_y$  et  $C$ .

On réalise ensuite une seconde expérience, dans laquelle la roue est plongée dans un fluide responsable d'un frottement non négligeable. La roue effectue alors un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période  $T_1$ . On admet que le moment du couple induit par le frottement est proportionnel à la vitesse angulaire de la roue :  $\Gamma_{f,y} = \pm \lambda \dot{\theta}$ , avec  $\lambda$  constante positive  $\dot{\theta} = \omega$  la vitesse angulaire de la roue.

**Q11.** Attribuer le signe correct à l'expression du couple induit par le frottement, en justifiant votre choix.

On enregistre au cours du temps l'évolution de la vitesse angulaire  $\omega$  en fonction du temps. Ces données sont stockées dans un fichier `data.txt` dans lequel la première colonne regroupe les instants d'enregistrement (en s) et la seconde colonne les valeurs mesurées de la vitesse angulaire (en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Les colonnes sont séparées par des espaces. Le cadre ci-contre illustre le contenu de ce fichier.

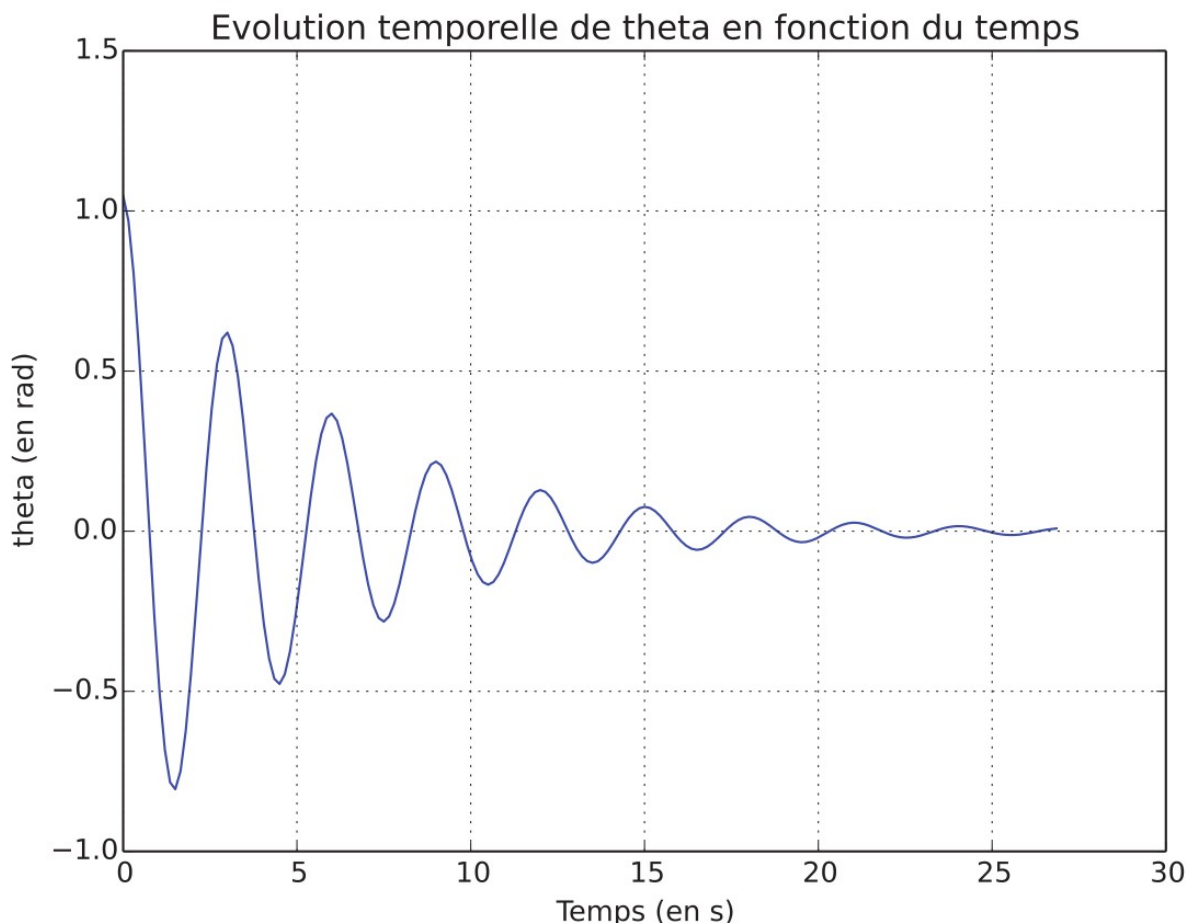
t (en s)	omega (en rad/s)
0.00	-0.183
0.15	-0.825
0.30	-1.356
...	

Un programme Python (*cf.* annexe présente en fin de sujet) permet de récupérer dans la variable `temps` la liste des différents instants et dans la variable `omega_exp` la liste des vitesses angulaires instantanées. Les éléments des deux listes seront de type float.

**Q12.** Écrire, en langage Python, une fonction `angle(theta_0, temps, vit_ang)` prenant en arguments la valeur initiale de l'angle  $\theta$ , une liste de valeurs de temps, et une liste des vitesses angulaires instantanées associées, et qui retourne une liste des valeurs de l'angle  $\theta$  aux différents instants correspondant aux éléments de la liste `temps`.

La fonction `angle` précédente est utilisée sur les données lues dans le fichier `data.txt` et le retour de cette dernière est stocké dans une variable nommée `theta`.

**Q13.** Écrire les lignes de code Python permettant d'obtenir le graphe de la **Figure 2**.



**Figure 2 :** Evolution temporelle de l'angle  $\theta$  au cours de la seconde expérience

**Q14.** Retrouver graphiquement les conditions initiales de cette seconde expérience.

**Q15 :** Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par  $\theta$  et la mettre sous sa forme canonique habituelle :  $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  , en exprimant les grandeurs  $\omega_0$  (pulsation propre) et  $Q$  (facteur de qualité) en fonction de  $J_y$ ,  $\lambda$  et  $C$ .

La forme générale de la solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$\theta(t) = \theta_m \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\Omega t + \Phi)$$

**Q16.** Montrer que les paramètres  $\tau$  et  $\Omega$  sont reliés à la pulsation propre  $\omega_0$  et au facteur de qualité  $Q$  par les relations suivantes :  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  et  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  .

**Q17.** À l'aide du graphe précédent, proposer une première estimation de la valeur de  $Q$ , et en déduire une approximation raisonnable à proposer à ce stade.

Afin de déterminer plus précisément les valeurs de  $\tau$  et donc de  $Q$ , on utilise le décrement logarithmique défini comme  $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T_1)}\right)$  , avec  $T_1$  la pseudo-période du mouvement.

**Q18.** Exprimer le facteur de qualité  $Q$  en fonction du décrement logarithmique  $\delta$  dans le cadre de l'approximation formulée à la question **Q17**.

**Q19.** Donner une estimation plus précise de la valeur numérique de  $Q$  après avoir déterminé graphiquement la valeur du décrement logarithmique.

La première expérience (dans l'air) a conduit à la valeur :  $T_0 = 3,0 \pm 0,2$  s. Une expérience complémentaire a permis de déterminer la valeur  $\lambda = 5,1 \cdot 10^{-3}$  SI.

**Q20.** Préciser l'unité SI du coefficient de frottement  $\lambda$ .

**Q21.** Déterminer les valeurs numériques de  $J_y$  et  $C$  .

### 3<sup>ème</sup> Problème : Étude des haut-parleurs au sein d'une patinoire

Les enceintes acoustiques d'une patinoire comportent chacune plusieurs haut-parleurs pour restituer toutes les plages de fréquences audibles de manière optimale. Le schéma d'un haut-parleur est donné en **Figure 3**. Il est constitué :

- d'un aimant fixe d'axe  $Oz$  créant un champ magnétique radial stationnaire  $\vec{B} = B \vec{u}_r$  (**Figure 4**) où  $B$  est la norme du champ magnétique, supposée constante en tout point de l'entrefer et  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire dirigé selon le rayon de la bobine mobile et perpendiculaire à l'axe  $Oz$  ;
- d'une bobine d'axe  $Oz$  comportant  $N$  spires de rayon  $a$  et située dans l'entrefer de l'aimant. La longueur totale du bobinage est notée  $l$  ;
- d'une membrane solidaire de la bobine.

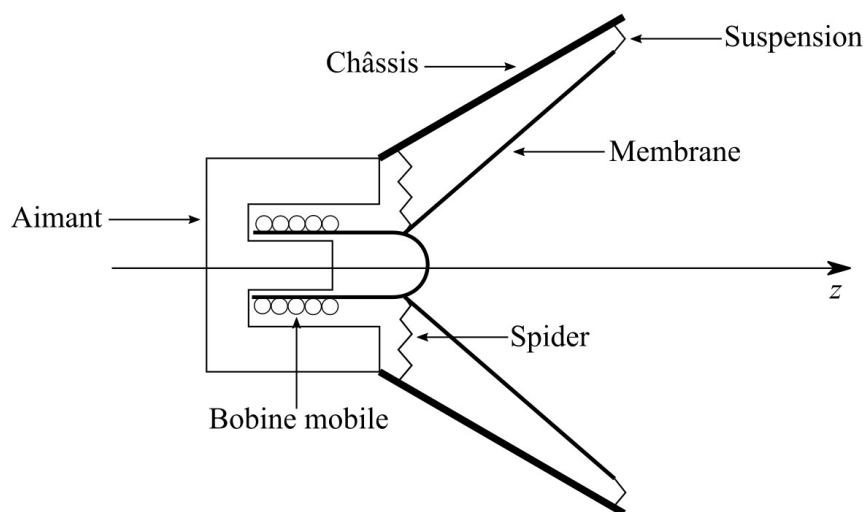
L'ensemble {bobine + membrane} est un solide de masse  $m$ , mobile en translation selon l'axe  $Oz$ .

Le spider et la suspension exercent sur cet ensemble une force de rappel élastique vers la position d'équilibre  $z = 0$  :  $\vec{F}_e = -k z \vec{u}_z$

L'ensemble {bobine + membrane} est également soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'air de la forme :  $\vec{F} = -\lambda \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$

Les paramètres  $k$  et  $\lambda$  sont des constantes, et le vecteur  $\vec{u}_z$  est un vecteur unitaire dirigé selon l'axe  $Oz$  et orienté dans le sens des  $z$  positifs.

La bobine est par ailleurs alimentée par un générateur extérieur délivrant la tension  $u(t)$ . Il apparaît alors (par induction) un courant d'intensité  $i(t)$  dans la bobine orienté dans le sens indiqué sur la **Figure 4**.



**Figure 3** : Schéma en coupe d'un haut-parleur

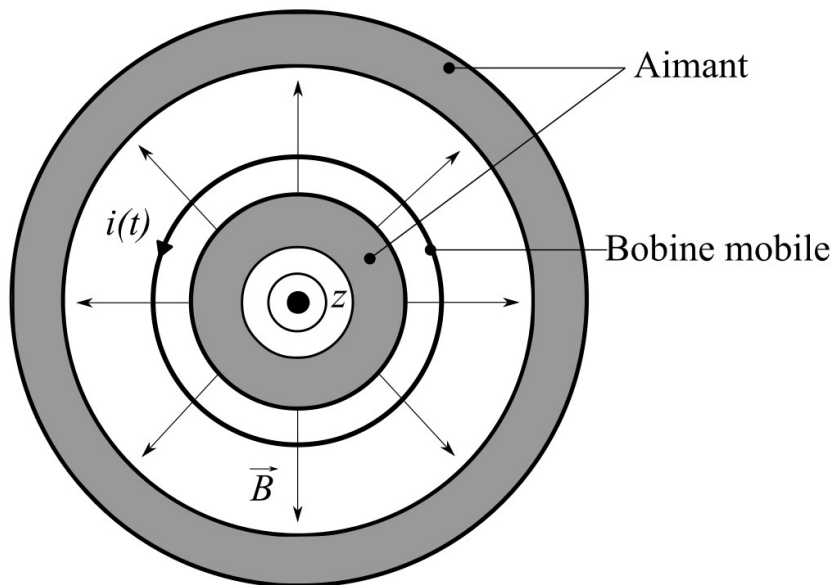


Figure 4 : Vue de face du système bobine - aimant

Q22. Expliquer, sans aucun calcul, le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique.

Q23. Justifier l'expression de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur la bobine en fonction des paramètres du problème :  $\vec{F}_L = -2\pi i(t) N a B \vec{u}_z$

Q24. Appliquer le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe Oz pour en déduire l'équation différentielle régissant le déplacement mécanique. Cette équation est notée (1).

Les lois de l'induction permettent de prouver (cf. futur cours I3...) que le mouvement de la bobine animée d'une vitesse algébrique  $\dot{z}$  au sein du champ magnétique stationnaire se traduit par l'apparition au sein du circuit électrique d'une force électromotrice d'expression :  $e(t) = 2\pi N a B \dot{z}$

Q25. Prouver que l'expression fournie est correctement dimensionnée.

L'ensemble du circuit électrique mobile possède une résistance électrique R et une inductance propre L, de telle sorte que le schéma électrique équivalent du circuit mobile est celui de la Figure 5.

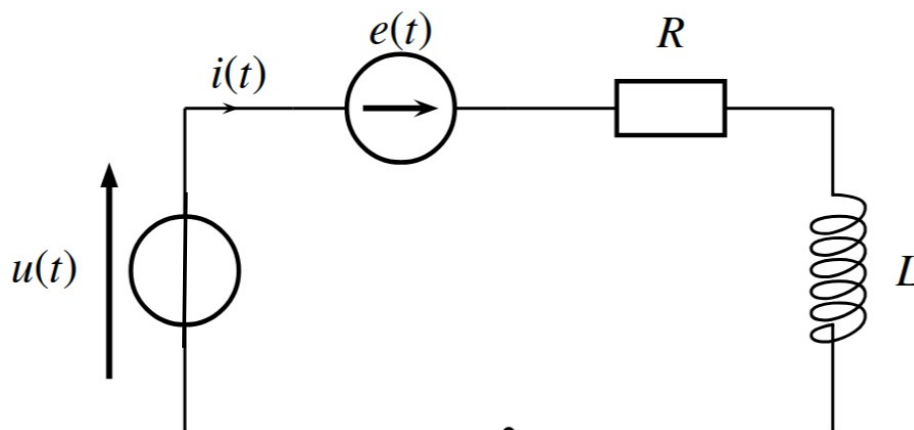


Figure 5 : Circuit électrique équivalent à l'alimentation du haut-parleur

Q26. En déduire l'équation différentielle portant sur  $i(t)$  régissant l'évolution du circuit électrique d'alimentation du haut-parleur. Cette équation est notée (2).

Le générateur extérieur délivre une tension de la forme :  $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$

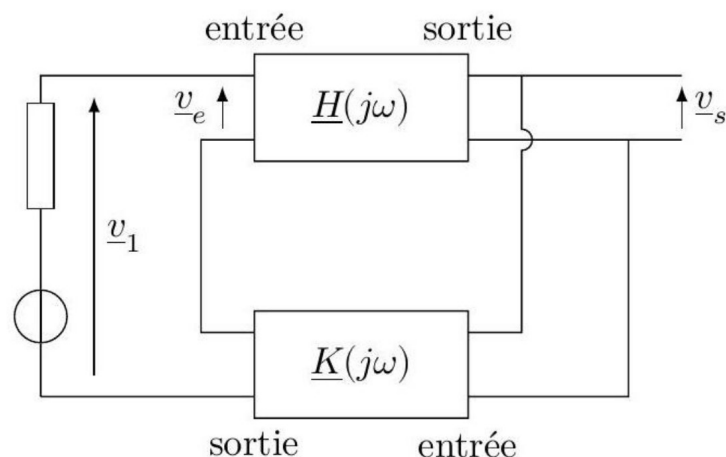
**Q27.** À partir des équations (1) et (2), à réécrire en notations complexes, montrer que l'expression de l'impédance électrique totale du circuit, définie par  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{i}}$ , est donnée par la relation :

$$\underline{Z} = \frac{(2\pi N a B)^2}{jm\omega + \frac{k}{j\omega} + \lambda} + R + jL\omega$$

**Q28.** Justifier le fait qu'associer plusieurs haut-parleurs permet de restituer toutes les plages de fréquences audibles de manière optimale dans l'enceinte de la patinoire.

## 4<sup>ème</sup> Problème : Oscillateurs

On s'intéresse ici aux dispositifs résonateurs ou oscillateurs, capables de générer des oscillations à une fréquence qui leur est propre. Dans le circuit électrique d'oscillations est ajoutée une «contre-réaction» ; on va s'intéresser, dans un premier temps, au rôle de la contre-réaction. Le circuit étudié est représenté **Figure 6**.



**Figure 6 :** Schéma du circuit électrique d'oscillations

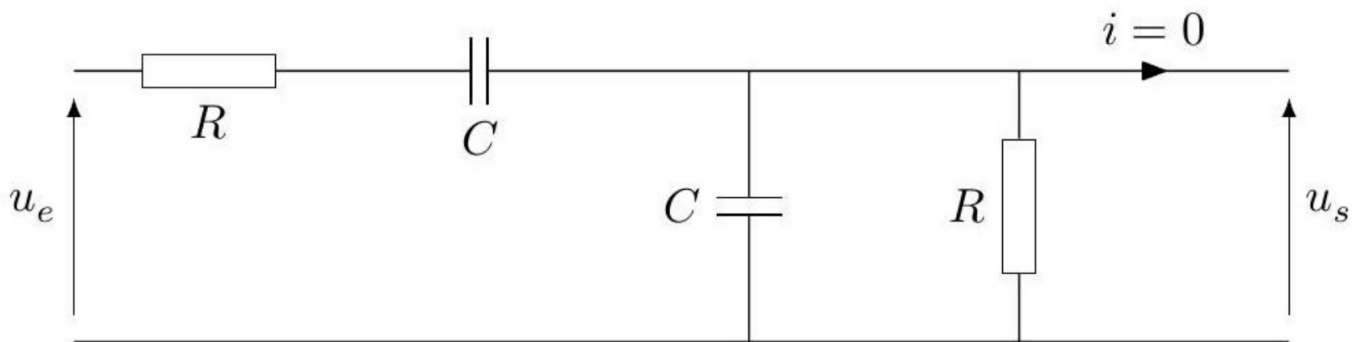
Le schéma du circuit peut prendre la forme de deux quadripôles de fonctions de transfert respectives  $\underline{H}(j\omega)$  et  $\underline{K}(j\omega)$  (définies comme le rapport des amplitudes complexes de la tension de sortie sur la tension d'entrée).

**Q29.** Donner les relations faisant intervenir les fonctions de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  et/ou  $\underline{K}(j\omega)$  :

- entre  $v_s$  et  $v_e$  ;
- entre  $v_s$ ,  $v_e$  et  $v_1$ .

**Q30.** En déduire l'expression de la fonction de transfert globale du montage  $\underline{A}(j\omega) = \frac{v_s}{v_1}$  en fonction de  $\underline{H}(j\omega)$  et  $\underline{K}(j\omega)$ .

On étudie maintenant le filtre de Wien de la **Figure 7** auquel est associée la fonction de transfert  $\underline{K}(j\omega)$ . Le filtre est constitué de deux condensateurs identiques de capacité  $C$  et de deux conducteurs ohmiques identiques de résistance  $R$ .



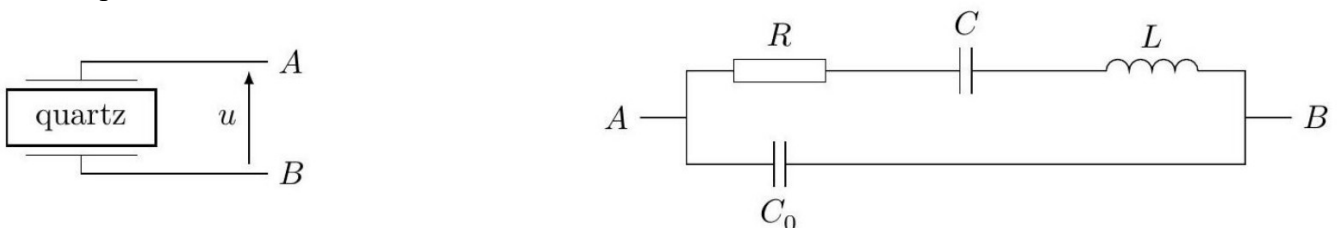
**Figure 7 :** Schéma électrique du filtre de Wien

**Q31.** Exprimer la fonction de transfert  $\underline{K}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$  de ce filtre en fonction des paramètres  $R$  et  $C$ .

**Q32.** Représenter l’allure du gain  $|\underline{K}(j\omega)|$  de ce filtre en fonction de  $\omega$ .

**Q33.** Donner l’expression de la pulsation de résonance en fonction de  $R$  et de  $C$ . Que vaut  $|\underline{K}(j\omega)|$  à la résonance ?

Plus fiable que les oscillateurs électriques, une lame de quartz peut être utilisée à la place du filtre de Wien. On donne fréquemment pour le quartz le modèle électrique de la **Figure 8** qui résume assez bien son comportement.



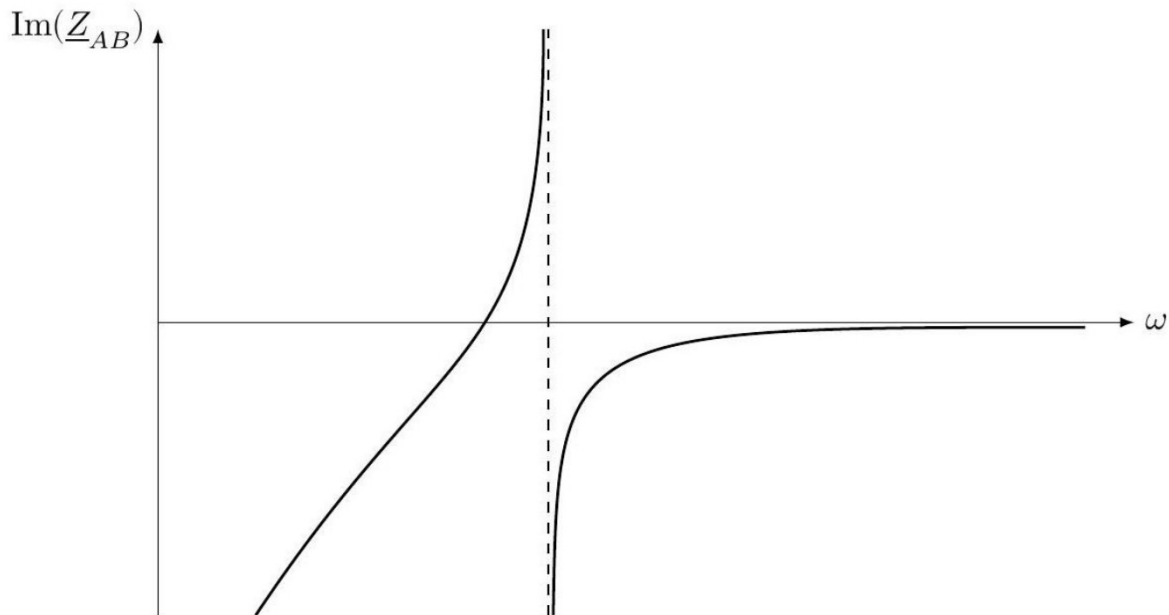
**Figure 8 :** Schéma électrique équivalent d’une lame de quartz.

**Q34.** Étudier le comportement asymptotique du modèle : il s’agit, qualitativement, de trouver une représentation simplifiée du quartz pour les cas :  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ .

La courbe de la **Figure 9** représente l’allure de la partie imaginaire de l’impédance équivalente du modèle électrique du quartz :  $\text{Im}(\underline{Z}_{AB})$  en fonction de la fréquence lorsque la résistance  $R$  est négligeable.

**Q35.** Quelles sont les pulsations remarquables ? Commenter.

**Q36.** Dans quel(s) intervalle(s) peut-on dire que le comportement du quartz est capacitif ?



**Figure 9 :** Représentation graphique de l'évolution de la partie imaginaire de l'impédance d'un quartz avec la pulsation, lorsque la partie résistive est négligée.

## Cours : Résonance en tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série

On s'intéresse à un circuit RLC série comprenant un résistor de résistance  $R$ , une bobine idéale d'inductance  $L$  et un condensateur idéal de capacité  $C$ . Ce circuit est alimenté par une source idéale de tension, de force électromotrice (f.é.m.) alternative et sinusoïdale, d'amplitude  $E_m$ , de période  $T$  et de phase à l'origine nulle.

**Q37 :** Donner l'expression mathématique de la f.é.m. délivrée par la source en fonction du temps :  $e(t)$ .

**Q38 :** Rappeler ce que signifie « observer une résonance en tension aux bornes du condensateur ».

**Q39 :** Déterminer la condition portant sur les grandeurs  $R$ ,  $L$  et  $C$  pour que ce phénomène de résonance ait lieu. Démonstration exigée.

**Q40 :** Déterminer, en fonction des paramètres du problème, l'expression de la fréquence  $f$  de la source pour laquelle la tension aux bornes du condensateur est en phase avec la f.é.m. délivrée par la source. Démonstration exigée.