Questions de cours

△ Rapide : limites usuelle ou équivalent usuel

- Limites usuelles :
  - Limites des fonctions usuelles aux bornes de leur domaine
  - Croissances comparées
  - Taux d'accroissements
- Équivalents usuels : $u(x) \to 0$, équivalents de $\exp(u) - 1, \ln(1+u), \sin(u), \cos(u) - 1, \tan(u), (1+u)^\alpha - 1, \sqrt{1+u} - 1, \arctan(u), \arcsin(u)$
- DL_1 usuels (les mêmes que les équivalents)

En cas de méconnaissance, jusqu'à 4 points peuvent être retirés de la note. On ne s'attardera pas sur cet exercice, quel que soit le niveau de l'élève.

□ Récitation

- Relations coefficients-racines (pour les termes de degrés 0 et $n-1$). *(Chap. 15B 4.)*
- Théorème de Leibniz pour les dérivées successives de fonctions ou[1] Théorème du binôme de Newton. *(Chap. 16C thm. 2 ou 6B thm. 1)*
  Attention à bien identifier les différences entre les deux.
- Définition de sous-espace vectoriel. *(Chap. 18A def. 2)*

■ Démonstrations et exercices de cours.

Les exercices de cours "*pour les plus courageux·euse*" peuvent être refusés (poliment) par l'élève, dans ce cas ellui se voit proposer une autre démonstration de cours de la liste, qui devra être parfaitement traitée.

1. Montrer que $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 est dérivable en 0, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0. *(Chap. 16C 1.)*
2. Soit $d = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y + 4x = 0\right\}$. Montrer que d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. *(Chap. 18A 3.)*
3. Exercice ◎ *(1 feuille 15.1)*

   Exercice 1

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $$X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$
   En déduire, pour $a, b \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *une factorisation de* $a^n - b^n$ *par* $(a-b)$.

   Preuve à faire[1] :
   (a) Par somme télescopique ou changement d'indice. Plus le corollaire $a^n - b^n$.
   (b) Par récurrence.
   (c) **New** Par les racine n-èmes de l'unité.
   (d) **New** *pour les plus courageux·euse* par somme géométrique. Plus le corollaire $a^n - b^n$.
4. *pour les plus courageux·euse (Chap. 16C 1.)* Montrer que $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

Méthodes à connaître et exercices élémentaires

- **New** Factorisation de polynômes.
- **New** Dérivabilité et prolongements.
- **New** Rolle et accroissements finis : applications.

En exo supplémentaire

- Arithmétique sur les polynômes
- Image et noyau de matrices. Liens avec la liberté, caractère générateur de la famille de vecteurs colonne de la matrice.

1. au choix du/de la colleur·euse

Chapitre 15 : Polynômes

- Polynôme
- Degré
- Opérations
- Division Euclidienne
- Racines
- Multiplicité
- Théorème de Taylor

Chapitre 16 : Dérivation

- Dérivabilité, dérivée à droite et à gauche.
- Développement limité à l'ordre 1.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Classes de régularité, dérivée d'ordre supérieure, formule de Leibniz

Chapitre 18 : Espaces Vectoriels (que pour le cours)

- Espace Vectoriel.
- Exemples.
- Sous-espace vectoriel.