

Correction du DS n°7

1^{er} Problème : Analyse d'un filtre

Q1. Par définition :

- la pulsation de la source est : $\omega = 2\pi f$
- la fonction de transfert du filtre est : $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{S e^{j(\omega t + \varphi_s)}}{E e^{j\omega t}} = \frac{S}{E} e^{j\varphi_s}$ avec S l'amplitude de la tension en sortie du filtre et φ_s son déphasage par rapport à e(t).
- le gain en décibel du filtre est : $G_{dB}(\omega) = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{S}{E}\right)$

Q2. Le filtre étudié est un **passé-bande** : il ne laisse correctement passer que les fréquences proches de la fréquence centrale $f_0 = \omega_0/2\pi$, et coupe aussi bien les très basses fréquences que les très hautes fréquences.

Q3. $|H_{max}|$ est le **gain maximal** du filtre : c'est la valeur maximale de $|H|$, obtenue pour la **pulsation propre** du filtre ω_0 , puisque $|H|(\omega) = \frac{|H_{max}|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \leq |H_{max}| = |H|(\omega_0)$.

Q est le **facteur de qualité** du filtre. Il caractérise la largeur de la bande passante du filtre, donc la **sélectivité** du filtre.

Q4. La fréquence propre de coupure est l'abscisse du maximum du gain en décibel. On obtient, par lecture graphique : $f_0 = 10^{3,06}$ Hz = 1,15 kHz et donc : $\omega_0 = 2\pi f_0 = 7,23 \text{ krad} \cdot \text{s}^{-1}$

La valeur maximale du gain en décibel est nulle, ce qui veut dire que $|H_{max}| = 1$

La valeur de Q peut s'obtenir de deux manières :

a) à partir de la **largeur de la bande passante à -3dB** : On relève (avec assez peu de précision...) les fréquences de coupure : $f_{c-} = 10^{3,00}$ Hz = 1,0 kHz et $f_{c+} = 10^{3,12}$ Hz = 1,3 kHz

On peut démontrer que le facteur de qualité vaut alors environ : $Q = \frac{f_0}{\Delta f} \simeq \frac{1,15 \text{ kHz}}{0,3 \text{ kHz}} \simeq 4$

b) à partir des **équations des asymptotes dans le diagramme de Bode**, sachant que :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right) = -10 \log\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) \text{ et donc :}$$

$$G_{dB}(f) = -10 \log\left(1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2\right)$$

- Pour $f \rightarrow 0$: $G_{dB}(f) \rightarrow -10 \log\left(1 + Q^2 \left(-\frac{f_0}{f}\right)^2\right) \simeq -20 \log Q - 20 \log f_0 + 20 \log f$: on reconnaît l'équation d'une droite en abscisse logarithmique, de pente +20 dB/décade (ce qui est cohérent avec le graphe fourni), et d'**ordonnée pour $f = f_0$** : $G_{dB, origine} = -20 \log Q$

- Pour $f \rightarrow \infty$: $G_{dB}(f) \rightarrow -10 \log \left(1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right) \approx -20 \log Q + 20 \log f_0 - 20 \log f$: on reconnaît l'équation d'une droite en abscisse logarithmique, de pente -20 dB/décade (ce qui est cohérent avec le graphe fourni), et d'ordonnée pour $f = f_0$: $G_{dB, origine} = -20 \log Q$

Ainsi, à l'intersection des deux droites asymptotes, on lit graphiquement : $G_{dB, origine} = -10,0 \text{ dB}$, et

donc : $Q = 10^{\frac{10,0}{20}} = 3,2$

N.B. : cette seconde méthode de détermination de Q est bien plus précise !

Pour avoir une information supplémentaire sur le filtre, l'expérimentateur relie l'entrée du filtre à une source quasi-idéale de tension continue, de force électromotrice $U_0 = 15 \text{ V}$, la sortie étant ouverte. Il mesure, en régime établi, un courant d'entrée d'intensité $I_0 = 15 \text{ mA}$.

Q5. En régime stationnaire (RS), on constate une circulation d'un courant d'entrée non nul, ce qui est la preuve que le condensateur, qui se comporte comme un coupe-circuit en régime stationnaire est associé en parallèle d'un autre dipôle (la bobine ou le résistor), soit au niveau de D_1 , soit au niveau de D_2 .

Par ailleurs, puisque le filtre doit couper les basses fréquences, la bobine (idéale) doit nécessairement être associée en parallèle dans le dipôle D_2 , car elle se comporte comme un fil de connexion en RS, et imposera donc $s = 0$ lorsque f devient très faible.

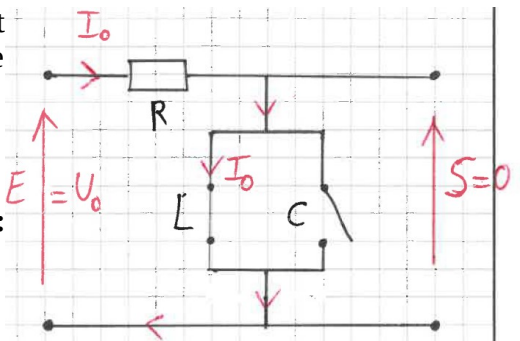
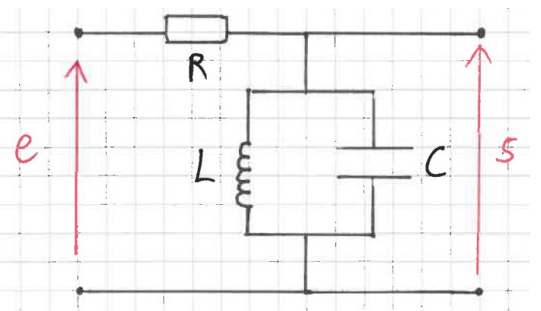
De même, le filtre doit couper les hautes fréquences, donc le condensateur, qui se comporte comme un fil de connexion aux très hautes fréquences, doit également être associée en parallèle dans le dipôle D_2 , afin d'imposer $s = 0$ lorsque f devient très grande.

D_1 est donc le résistor, par élimination.

Q6. La manipulation complémentaire (en RS) donne directement accès à la valeur de R , puisque le circuit équivalent est le suivant :

Ainsi, d'après la loi d'Ohm : $U_0 = R I_0 \Leftrightarrow R = \frac{U_0}{I_0}$ **A.N. :**

$R = \frac{15 \text{ V}}{15 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 1,0 \text{ k}\Omega$



Par ailleurs, d'après la loi des ponts diviseurs de tension, la fonction de transfert pour le circuit étudié

vaut :
$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} = \frac{1}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega} \right)}$$

Par identification, on a donc :

- $H_{max} = 1$ (ouf...);

- $RC = \frac{Q}{\omega_0} \Leftrightarrow C = \frac{Q}{R \omega_0}$ **A.N. :** $C = \frac{3,2}{1,0 \cdot 10^3 \times 7,2 \cdot 10^3} = 0,44 \mu\text{F}$

$$\bullet \frac{R}{L} = Q \omega_0 \Leftrightarrow \boxed{L = \frac{R}{Q \omega_0}} \quad \text{A.N. : } \underline{L} = \frac{1,0 \cdot 10^3}{3,2 \times 7,2 \cdot 10^3} = \underline{43 \text{ mH}}$$

Q7. Avec une résistance de 1,0 kΩ en série avec la source de tension, on peut en général considérer que cette source, dont la résistance interne est environ 20 fois plus faible (50 Ω), est idéale. De même, la résistance d’une bobine est en général inférieure à une dizaine d’ohm, donc là encore assez nettement négligeable devant R. Enfin, un condensateur réel est proche d’un condensateur idéal, dès lors que les résistances du montage restent largement en-dessous de la dizaine de mégaohm, ce qui est également le cas.

2^{ème} Problème : Mesure exp. du moment d’inertie d’une roue de vélo par rapport à son axe de rotation (Modélisation E3A PC 2019)

Q8. Lorsque $\theta > 0$, le couple de rappel doit ramener dans le sens négatif, et lorsque $\theta < 0$ (cas du schéma de l’énoncé !), le couple doit ramener dans le sens positif, d’où la relation : $\boxed{\Gamma_{r,y} = - C \theta}$

Q9. On étudie le système {roue en rotation autour de l’axe Oy, avec un moment d’inertie $J_y = \text{cste}$ } dans le référentiel terrestre local supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques s’exerçant sur la roue :

- poids \vec{P} de droite d’action coupant l’axe, donc de moment nul.
- réaction du câble de torsion \vec{R} (compensant le poids, et évitant à la roue de tomber...) de droite d’action coupant l’axe, donc de moment nul.
- Couple de rappel, de moment : $\Gamma_{r,y} = - C \theta$

Le **théorème du moment cinétique** s’écrit dans ces conditions :

$$\frac{dL_y}{dt} = J_y \ddot{\theta} = M_y(\vec{P}) + M_y(\vec{R}) + \Gamma_{r,y} \Leftrightarrow J_y \ddot{\theta} = - C \theta$$

On obtient donc l’«équation différentielle d’un oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_y} \theta = 0}$

Q10. Par identification, la pulsation propre de l’oscillateur harmonique est $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_y}}$, et donc la

période des oscillations est : $\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_y}{C}}}$.

Q11. Lorsque la roue tourne dans le sens des θ croissants, alors $\dot{\theta} = \omega > 0$, et le moment du couple de frottement doit alors être négatif, pour freiner la rotation, donc : $\boxed{\Gamma_{f,y} = - \lambda \dot{\theta}}$

Q11 3/4. En option, les lignes de code permettant d’extraire les données du fichier (futur TD d’info) :

```
temps,omega_exp=[],[] # initialisation des listes, vides au début
data=open('data.txt','r') # ouverture du fichier, en lecture
data.readline() # lecture de la première ligne (à évacuer...)
toutes_lignes=data.readlines # lit toutes les lignes suivantes et
sauvegarde
```

```
for ligne in toutes_lignes:
    ligne=ligne.strip.split(' ')
    temps.append(float(ligne[0]))
    omega_exp.append(float(ligne[1]))
```

Q12. Par définition de la vitesse angulaire, on peut supposer, si les écarts temporels ne sont pas trop importants que : $\omega(t) \simeq \frac{\theta(t+dt)-\theta(t)}{dt} \Leftrightarrow \theta(t+dt) \simeq \theta(t) + \omega(t).dt$, ce qui correspond à la **méthode d’Euler** ! D’où :

```
def angle(theta_0:float,temps:list,vit_ang:list)->list:
    theta=[theta_0]
    for k in range(1,len(temps)) :
        theta.append(theta[-1]+vit_ang[k-1]*(t[k]-t[k-1]))
    return theta
```

En pratique, la valeur de $t[k] - t[k-1]$ étant toujours la même, on peut la stocker dans la variable dt .

Q13. Lignes de code Python permettant d’obtenir le graphe :

```
import matplotlib.pyplot
plt.plot(temps,theta,'b-')
plt.title('Evolution temporelle de theta en fonction du temps')
plt.xlabel('Temps (en s)')
plt.ylabel('theta (en rad)')
plt.grid()
plt.show()
```

Q14. On constate que l’instant initial correspond à un maximum (tangente horizontale) d’angle positif. On en déduit que, comme dans la première expérience, la roue a été écartée d’un angle $\theta(t=0) = 1,05 \text{ rad}$ (positif) puis lâchée avec une faible vitesse angulaire initiale, associée à la tangente à l’origine de la courbe. On lit dans le tableau de données : $\dot{\theta}(t=0) = -0,183 \text{ rad.s}^{-1}$

Q15 : Il suffit de rajouter le couple de frottement au bilan des actions mécaniques réalisé dans la première expérience. Le théorème du moment cinétique se réécrit donc :

$$J_y \ddot{\theta} = -C \theta - \lambda \dot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{J_y} \dot{\theta} + \frac{C}{J_y} \theta = 0$$

On obtient donc, par identification :

- la **pulsation propre** : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_y}}$
- le **facteur de qualité** Q tel que : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{J_y} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{J_y C}}{\lambda}$

Q16. Il existe deux méthodes : injecter la solution générale dans l’équation différentielle (bof...) et re-résoudre l’équation différentielle (oui !). Partons sur la seconde...

L’équation différentielle homogène, linéaire, du second ordre et à coefficients constants possède l’équation caractéristique (EC) : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$, de discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4 \omega_0^2$

Puisque **le régime observé est pseudo-périodique**, c'est que $\Delta < 0$, et les deux solutions de l'EC sont

complexes et conjuguées : $X_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}{2} = -\frac{1}{\tau} \pm j \Omega$, avec :

• le temps de relaxation de l'oscillateur amorti : $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

• la pseudo-pulsation de l'oscillateur amorti : $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Q17. Lorsque Q est suffisamment grand, alors le nombre d'oscillations visibles est environ égal à $1,5 Q$. Ici, on repère environ 9 oscillations, ce qui signifie que : $Q \simeq 6$

Dans ce conditions, il paraît raisonnable de considérer que : $\Omega \simeq \omega_0$, puisque $\frac{1}{4 \times 6^2} \ll 1$, ce qui sera clairement confirmé par la comparaison de $T_1 = 15,0/5 = 3,0$ s à T_0 (cf. énoncé entre Q19 et Q20) !

On se propose de déterminer plus précisément les valeurs de τ et donc de Q à partir de l'utilisation du décrétement logarithmique dont la définition peut être : où T désigne la pseudo-période du mouvement.

Q18. D'après l'expression de la solution (sans avoir besoin d'identifier $\theta_m (= \theta_0)$ et $\Phi (= 0)$), on peut approfondir la définition du décrétement logarithmique :

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{\theta_m \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\Omega t + \Phi)}{\theta_m \exp\left(-\frac{(t+T)}{\tau}\right) \cos(\Omega(t+T) + \Phi)}\right) = \ln\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)\right) = \frac{T_1 \omega_0}{2Q} \simeq \frac{\pi}{Q}$$

car $\Omega T_1 = 2\pi \omega_0$ et $\Omega \simeq \omega_0$ donc $\omega_0 T_1 \simeq 2\pi$. D'où : $Q = \frac{\pi}{\delta}$

Q19. Le décrétement logarithmique vaut : $\delta \equiv \ln\left(\frac{\theta(t=0)}{\theta(T_1)}\right) = \ln\left(\frac{1,05}{0,62}\right) = \ln(1,7) \equiv 0,53$

Et donc : $Q \equiv \frac{\pi}{0,53} \equiv 5,9$

La première expérience (dans l'air) a conduit à la valeur : $T_0 = 3,0 \pm 0,2$ s. Une expérience complémentaire a permis de déterminer la valeur $f = 5,1 \cdot 10^{-3}$ SI.

Q20. Le moment du couple étant le produit d'une force par une longueur, on a $[\lambda \dot{\theta}] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L$, et puisque $[\dot{\theta}] = T^{-1}$, alors : $[\lambda] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$, et donc **l'USI de λ est le $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$**

Q21. Puisque $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{J_y}$, alors : $J_y = \frac{\lambda Q T_0}{2\pi}$ **A.N. :** $J_y = \frac{5,1 \cdot 10^{-3} \times 5,9 \times 3,0}{2\pi} \equiv 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Par ailleurs : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_y}} \Leftrightarrow C = \frac{4\pi^2 J_y}{T_0^2}$ **A.N. :** $C \equiv \frac{4 \times \pi^2 \times 1,4 \cdot 10^{-2}}{(3,0)^2} \equiv 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

3^{ème} Problème : Étude des haut-parleurs au sein de la patinoire (CCINP TSI 2020)

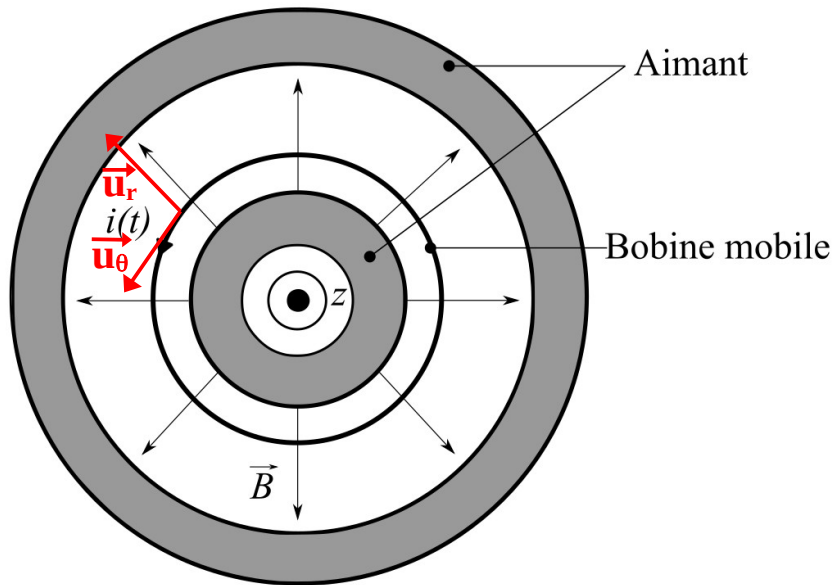


Figure 4 : Vue de face du système bobine - aimant

Q22. Une tension alimente la bobine, qui est donc parcourue par une certaine intensité. Puisque la bobine est placée dans un champ magnétique (stationnaire), une force de Laplace va s’appliquer sur le fil qui la constitue et va la mettre en mouvement, provoquant ainsi un déplacement de la membrane qui est solidaire de la bobine. La membrane met alors en vibration l’air à son contact, ce qui produit le son. C’est simple comme bonjour !

Q23. Pour chaque élément de longueur de la bobine, on a une expression de la **force élémentaire de Laplace** qui vaut : $d\vec{F}_L = i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(t) dl B \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -i(t) dl B \vec{u}_z$

L’intégration sur l’ensemble du fil de la bobine donne, puisque les termes $i(t)$, B et le vecteur unitaire \vec{u}_z sont constant dans l’espace : $\vec{F}_L = \int_{bobine} -i(t) dl B \vec{u}_z = -i(t) \left(\int_{bobine} dl \right) B \vec{u}_z = -i(t) l_{tot} B \vec{u}_z$, avec l_{tot} la longueur totale du fil de la bobine. Puisque celle-ci contient N tours de fil, chacun étant de périmètre $2\pi a$, alors $l_{tot} = 2\pi a N$, d’où l’expression fournie par l’énoncé : $\vec{F}_L = -2\pi i(t) N a B \vec{u}_z$

Q24. Dans le référentiel terrestre local, supposé galiléen, le système {bobine + membrane}, est assimilé à un point matériel de masse $m = cste$, et est soumis à l’ensemble des forces suivantes :

- le poids $\vec{P} = -m g \vec{u}_y$, avec \vec{u}_y le vecteur unitaire vertical vers le haut ;
- la réaction du spider et de la suspension, $\vec{R} = \|\vec{R}\| \vec{u}_y$;
- la force de rappel élastique de la part du spider et de la suspension : $\vec{F}_e = -k z \vec{u}_z$;
- la force de frottement visqueux de la part de l’air de la forme : $\vec{F} = -\lambda \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$
- la force de Laplace : $\vec{F}_L = -2\pi i(t) N a B \vec{u}_z$

Par ailleurs, le mouvement est contraint selon l’axe z , donc : $\vec{OM} = z \vec{u}_z$; $\vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$

La **deuxième loi de Newton** s’écrit dans ces conditions :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F} + \vec{F}_L = m \vec{a} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|\vec{R}\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi i(t) N a B \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

On obtient l’équation différentielle régissant le déplacement mécanique, par projection selon l’axe z :

$$m \ddot{z} + \lambda \dot{z} + k z = -2\pi i(t) N a B \quad (1)$$

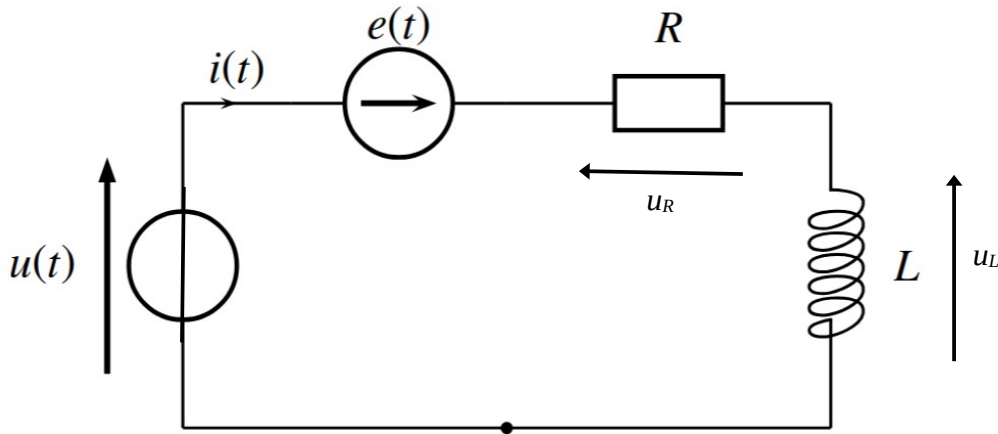
Les lois de l’induction permettent de prouver (cf. futur cours I3...) que le mouvement de la bobine animée d’une vitesse algébrique \dot{z} au sein du champ magnétique stationnaire se traduit par l’apparition au sein du circuit électrique d’une force électromotrice d’expression : $e(t) = 2\pi N a B \dot{z}$

Q25. Prouver que l’expression fournie est correctement dimensionnée. Si on multiplie la relation fournie par l’intensité, on obtient une puissance de chaque côté de l’égalité :

- $e i$ = puissance électrique à gauche
- le produit de la force de Laplace par la vitesse à droite, donc la puissance de la force de Laplace à droite de l’égalité

Cela permet de justifier l’homogénéité de la relation !

Q26. Schéma électrique équivalent du circuit mobile :



La loi des mailles s’écrit :

$$u(t) + e(t) = u_R + u_L = R i(t) + L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } \boxed{L \frac{di}{dt} + R i(t) = u(t) + 2\pi N a B \dot{z}} \quad (2)$$

Q27. En régime sinusoïdal forcé, toutes les variables, aussi bien électriques que mécaniques varient de manière sinusoïdale, à la pulsation de la source ω . On peut alors utiliser les grandeurs complexes, et l’équation (1) s’écrit : $m \ddot{z} + \lambda \dot{z} + k z = -2\pi i N a B$, sachant que : $\ddot{z} = j\omega \dot{z}$ et

$$\dot{z} = j\omega z \Leftrightarrow z = \frac{\dot{z}}{j\omega}, \text{ et donc : } \left[jm\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega} \right] \dot{z} = -2\pi N a B i$$

Et l’équation (2) s’écrit : $L \frac{di}{dt} + R i = u + 2\pi N a B \dot{z} \Leftrightarrow [R + jL\omega] i = u + 2\pi N a B \dot{z}$

La substitution de la vitesse complexe donne donc : $[R + jL\omega] i = u - \frac{(2\pi N a B)^2}{jm\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega}} i$

Ou encore : $u = \left[\frac{(2\pi N a B)^2}{jm\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega}} + R + jL\omega \right] i$

On obtient donc bien l'expression de l'impédance électrique totale du circuit, fournie par l'énoncé :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{(2\pi N a B)^2}{j m \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda} + R + j L \omega$$

Q28. L'impédance peut se ré-écrire : $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{(2\pi N a B)^2}{\lambda + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)} + R + j L \omega$

L'étude complète du module de \underline{Z} s'avère fastidieuse, mais on peut « sentir » assez facilement que la pulsation qui annule la partie imaginaire du dénominateur va jouer un rôle primordial :

$$m\omega - \frac{k}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Chaque haut-parleur aura ainsi une pulsation de résonance autour de laquelle la puissance transmise (HP de TSI1...) passera par un maximum en fonction des paramètres k et m . Avec différents couples de ces paramètres, on modifie la fréquence de résonance, et donc l'adaptation de chaque haut-parleur autour d'une gamme de fréquences audibles particulière. En multipliant le nombre de haut-parleurs, la totalité du spectre audible sera couvert.

4^{ème} Problème : Oscillateurs (Centrale Supélec TSI 2020)

Q29.a) Par définition de la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$

Q29.b) La tension d'entrée du second quadripôle est \underline{v}_s , et sa tension de sortie est $\underline{v}_1 - \underline{v}_e$. On en déduit donc que : $\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{v}_1 - \underline{v}_e}{\underline{v}_s} \Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_e + \underline{v}_s \underline{K}(j\omega)$

Q30. $\underline{H}(j\omega) (-\underline{K}(j\omega)\underline{v}_s + \underline{v}_1) = \underline{v}_s$ soit $\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{H}(j\omega)}{1 + \underline{K}(j\omega)\underline{H}(j\omega)}$

La fonction de transfert du filtre de Wien, vaut, d'après la loi des ponts diviseurs de tensions :

$$u_s = u_e \frac{Z_{R//C}}{Z_{R+C} + Z_{R//C}} = u_e \frac{1}{1 + Z_{R+C} \times \frac{1}{Z_{R//C}}}$$

Q31 :

Avec $Z_{R+C} = R + \frac{1}{jC\omega}$ et $\frac{1}{Z_{R//C}} = \frac{1}{R} + jC\omega$, soit :

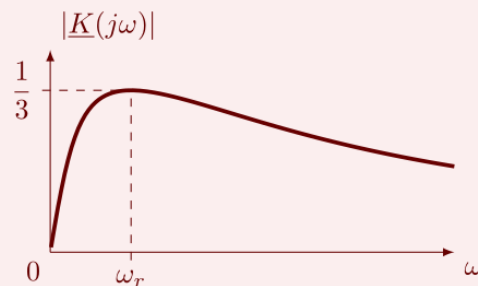
$$K(j\omega) = \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}$$

Le gain de ce filtre a pour expression : $|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)^2}}$

Le comportement asymptotique de cette fonction de la pulsation ω est le suivant :

$\lim_{\omega \rightarrow 0} |K(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |K(j\omega)| = 0$. Et puisque la fonction est continue et positive, elle passe par un maximum (on prouve son unicité par le calcul de la dérivée) lorsque le dénominateur passe par un minimum. On obtient l'allure de courbe suivante :

Q32 :



La résonance correspond à l'extremum du gain, obtenue pour la valeur de pulsation ω_r qui minimise le dénominateur du gain, donc telle que :

Q33 :

$$RC\omega_r - \frac{1}{RC\omega_r} = 0 \Leftrightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{(RC)^2}, \text{ soit : } \omega_r = \frac{1}{RC}$$

La valeur maximale du gain vaut alors : $|K(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} = 0,33$

Comportement asymptotique du modèle :

Lorsque $\omega \rightarrow 0$ (régime stationnaire), les condensateurs (idéaux) se comportent comme des coupes-circuits, et la bobine idéale comme un simple fil de connexion. Le quartz se comporte alors comme un coupe-circuit puisque l'intensité ne peut passer dans aucune de deux branches du modèle.

Q34 : Lorsque $\omega \rightarrow \infty$ (à très haute fréquence), les condensateurs (idéaux) se comportent comme de simples fils de connexion, et la bobine idéale comme un interrupteur ouvert. Le quartz se comporte alors comme un simple fil de connexion.

Remarque : On constate que le quartz se comporte asymptotiquement comme un condensateur, mais il faut poursuivre l'étude aux pulsations intermédiaires !

On constate sur ce graphe que la partie imaginaire de l'impédance équivalente tend vers $-\infty$ lorsque la pulsation devient très faible, ce qui est cohérent avec le comportement asymptotique du quartz en régime stationnaire (coupe-circuit).

On constate également que la partie imaginaire de l'impédance équivalente tend vers 0 lorsque $\omega \rightarrow \infty$, ce qui est cohérent avec le comportement asymptotique du quartz aux très hautes fréquences (court-circuit).

D'après les lois d'association des impédances, lorsque R est négligeable :

Q35 :

$$\frac{1}{Z_{AB}} = jC_0\omega + \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = j \left[C_0\omega - \frac{1}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \right]$$

Il existe donc une pulsation ω_0 telle que l'impédance s'annule (donc l'inverse de l'impédance tend vers l'infini) : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Il existe également une pulsation ω_1 pour laquelle la partie imaginaire de l'impédance équivalente tend vers l'infini, lorsque : $C_0\omega_1 = \frac{1}{L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}} \Leftrightarrow$

$$LC_0\omega_1^2 - \frac{C_0}{C} = 1, \text{ c'est-à-dire pour } \omega_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{C_0}{C}}{LC_0}} > \omega_0$$

Q36 : Le quartz possède un comportement capacitif lorsque la partie imaginaire de son impédance équivalente est négative, puisque $Z_C = \frac{-j}{C\omega}$. Les intervalles sont donc : $[0, \omega_0[$ et $]\omega_1, \infty[$.