

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n en a :

- $f(x) = \tilde{P}_1(x-a) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^n)$
- $f(x) = \tilde{P}_2(x-a) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^n)$

avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors, en effectuant la différence $0 = \widetilde{P_1 - P_2}(x-a) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^n)$. Ou encore, en posant $h = x - a$ ($h \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$ et réciproquement), et en notant $P = P_1 - P_2$, on a :

$$\tilde{P}(h) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n)$$

Le but est de montrer que $P_1 = P_2$ c'est-à-dire que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On raisonne par l'absurde en supposant $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Alors, on note $P(X) = X^k Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\tilde{Q}(0) \neq 0$ (ie X ne divise pas Q). Ce n'est pas la division euclidienne de P par un polynôme, c'est juste faire apparaître la multiplicité exacte de 0 comme racine de P ; par définition, ici c'est k .

On a $h^k \tilde{Q}(h) = \tilde{P}(h) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^k)$ et donc $\tilde{Q}(h) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^{n-k})$.

D'autre part, P est de degré au plus n , donc $k \leq n$ (ie $n - k \geq 0$), ainsi $\underset{h \rightarrow 0}{o}(h^{n-k}) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(1)$ et donc par continuité $\tilde{Q}(0) = 0$, ce qui contredit la définition de Q .

On a aboutit à une contradiction, il était donc absurde de supposer $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Remarque : Cette preuve est similaire à la proposition (Chap. 15B 1. prop.3) : « Si P possède plus de racines que son degré, alors c'est le polynôme nul ».

Finalement $P_1 = P_2$ et ce raisonnement est valable quel que soient les parties polynomiale d'un développement limité de f à l'ordre n en a . D'où l'unicité du développement limité.