Correction de la partie physique de l'épreuve de Modélisation du Concours Blanc

Partie I - Présentation

I.2 - Analyse de l'accélération humaine

Q1 : L'analyse des spectres de Fourier de la figure 4 permet de mesurer graphiquement l'amplitude et la fréquence du terme fondamental associé à l'accélération :

- du bras : $a_{b,max}$ = 7,8 g pour f_b = 2,6 Hz
- de la poitrine : $a_{p,max}$ = 5,2 g pour f_p = 2,6 Hz
- de la hanche : $a_{h,max}$ = 6,8 g pour f_h = 2,6 Hz

N.B. : logique de trouver la même fréquence du fondamental, correspondant au « rythme » de la course.

Q2. La fréquence de course f = 2,6 Hz correspond à l'inverse de la période T = durée entre deux appuis consécutifs. Ainsi, la foulée correspond à la longueur d'onde du mouvement et vaut : $\boxed{\lambda = v\ T = \frac{v}{f}}$

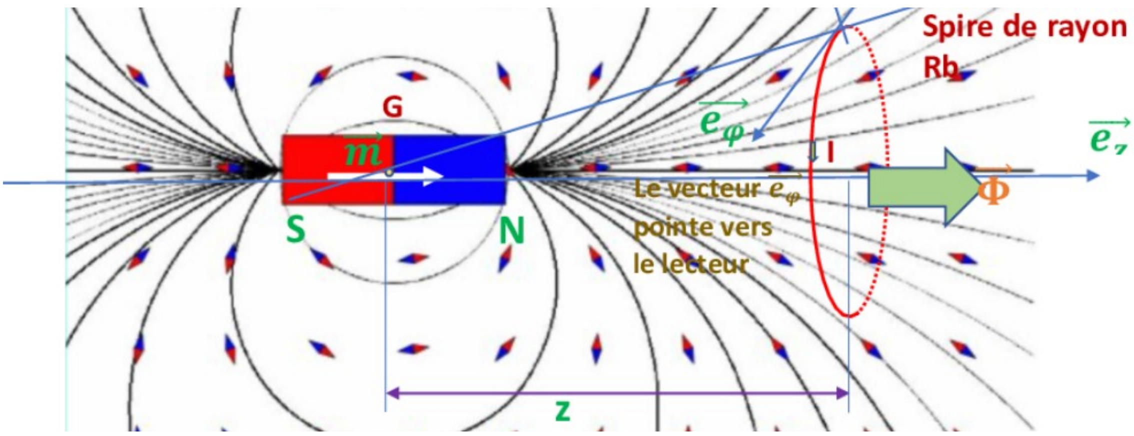
A.N. : $\underline{\lambda = }\frac{6{,}4/3{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}}}{2{,}6\ \mathrm{s^{-1}}}\underline{\simeq 0{,}68\ \mathrm{m}}$: valeur cohérente (on est sur de la petite foulée…)

Q3. D'après le graphe de la figure 3, on mesure une amplitude du mouvement des bras **proche de 40°** (variations de l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale entre -40° et 40°). L'intérêt de l'exploitation des mouvements de balancier des bras réside dans la plus grande variation d'accélération qu'ils subissent au cours de la course.

Partie II - Principe de la conversion d'énergie

II.1 - Principe du couplage électromécanique

Q4. Carte du champ magnétique créé par la bille magnétique au niveau de la bobine lorsque le moment magnétique de la bille $\vec{m}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{e_z}$:



Q5. D'après la définition d'un moment magnétique : $[m] = I\ [S] = I.L^2$

On en déduit donc : $\boxed{[B] = \frac{[\mu_0]}{L^3}[m] = \frac{[\mu_0] I}{L}}$, ce qui est conforme avec le cours de TSI1 !

Q6. On considère que :

- $\vec{m}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{e}_z$, donc $\vec{m} = \|\vec{m}\|\ \vec{e}_z$
- $z >> R_b$ donc $\vec{e}_r \simeq \vec{e}_z$ et $r \simeq z$ (car $\theta \to 0$)

On en déduit l'expression de la norme du champ créé : $\|\vec{B}(M)\| \simeq \dfrac{\mu_0}{4\pi\ z^3}\|(3\vec{m}-\vec{m})\| = \dfrac{\mu_0\ m}{2\pi\ z^3} = B_0$, expression indépendante du point considéré sur la spire.

Remarque : cette expression est cohérente avec l'expression du flux donné lorsque $z >> R_b$:

$$\Phi = \iint_{spire} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = B_0\ .\ \pi R_b^{\ 2} = \frac{\mu_0\ m\ R_b^{\ 2}}{2\ (z^2+\cancel{R_b^{\ 3}})^{3/2}}$$

Q7. Lorsque la bille se déplace à vitesse constante $v = -\dot{z} > 0$, elle s'éloigne de la spire, ce qui crée une **diminution du flux du champ magnétique créé par la bille**. En réaction, le courant induit qui va apparaître dans la bobine doit créer un champ magnétique dans le même sens que celui qui est imposé par la bille (et qui diminue). La règle de la main droite permet donc d'en déduire que ***I* sera positif**.

II.2 - Étude de la conversion d'énergie mécano-électrique

Q8. Pour N spires, le flux total est : $\Phi_{tot} = \dfrac{\mu_0\ N\ m\ R_b^{\ 2}}{2\ (z^2+R_b^{\ 3})^{3/2}}$. La force électromotrice induite est donc :

$$e_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{tot}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dfrac{\mu_0\ N\ m\ R_b^{\ 2}}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times 2\ z\ \dot{z}}{(z^2+R_b^{\ 2})^{5/2}} \text{ soit : } \boxed{e_{ind} = \frac{3}{2}\frac{\mu_0\ N\ m\ R_b^{\ 2}\ z}{(z^2+R_b^{\ 2})^{5/2}}\ \dot{z}}$$

Remarque : puisque $z < 0$ et $\dot{z} < 0$, alors $e_{ind} > 0$!

Q9. Le circuit électrique est donc équivalent à l'association d'un résistor en série avec une source idéale de tension, et la **loi d'Ohm** s'écrit : $e_{ind} = R_c\ I \iff \boxed{I = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu_0\ N\ m\ R_b^{\ 2}\ z}{R_c\ (z^2+R_b^{\ 2})^{5/2}}\ \dot{z}}$

La puissance électrique extraite vaut donc : $\boxed{P_{el} = R_c\ I^2 = \dfrac{9}{4}\dfrac{(\mu_0\ N\ m)^2\ R_b^{\ 4}\ z^2}{R_c\ (z^2+R_b^{\ 2})^5}\ \dot{z}^2}$

Q10. La puissance mécanique convertie en puissance électrique est donc :

$$P_m = -P_{el} = -\frac{9}{4}\frac{(\mu_0\ N\ m)^2\ R_b^{\ 4}\ z^2}{R_c\ (z^2+R_b^{\ 2})^5}\ v^2 \text{ d'où : } \boxed{c_e = \frac{9}{4}\frac{(\mu_0\ N\ m)^2\ R_b^{\ 4}\ z^2}{R_c\ (z^2+R_b^{\ 2})^5}}$$

Pour maximiser ce coefficient, il faut (assez logiquement) :

- minimiser la résistance électrique de la bobine R_c (faible influence)
- maximiser le nombre de tours de fils N (influence moyenne)
- maximiser l'aimantation de la bille m (influence moyenne)
- minimiser le rayon de la bobine R_b car $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{R_b^{\ 4}}{(z^2+R_b^{\ 2})^5} = \dfrac{1}{R_b^{\ 6}}$ (influence forte)
- minimiser la distance à la bobine z car $\lim\limits_{R_b\to 0} \dfrac{z^2}{(z^2+R_b^{\ 2})^5} = \dfrac{1}{z^8}$ (influence très forte)