CHAPITRE 4

Propagation d'un signal

Les **phénomènes ondulatoires** sont communs à tous les domaines de la physique : mécanique (propagation d'une perturbation sur une corde tendue), mécanique des fluides (vaguelettes à la surface d'un liquide), thermodynamique (propagation d'un son dans un gaz), électromagnétisme (ondes électromagnétiques), etc.

Dans ce chapitre, nous étudions les caractéristiques de la **propagation d'une onde**, support d'un **signal** physique à transmettre.

1 Signaux

1.1 Grandeur physique associée à un signal

En physique, on appelle **signal** une **grandeur physique** scalaire s ou vectorielle $\vec{S}$ qui dépend du temps. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une fonction de la variable temps, notée s(t) ou $\vec{S}(t)$ de façon générique.

Quelques exemples :

▹ Les **signaux acoustiques** sont associés aux sons audibles ou inaudibles.
Un son met en vibration la membrane d'un capteur (oreille humaine, microphone). Le déplacement de cette membrane le long de la direction de propagation (Ox) du son est un signal x(t). On peut observer sur l'écran d'un oscilloscope ou d'un ordinateur une tension proportionnelle à ce déplacement. Cette tension u(t) est un signal électrique.
La **surpression** locale p(t) représente en un point donné la différence de pression en présence d'un son et en l'absence de ce dernier. Elle peut être mesurée avec un manomètre, et transformée en une tension u(t) qui lui est proportionnelle.

▹ Dans les circuits électriques et les systèmes électroniques, les **signaux électriques** sont le plus souvent une **tension** u(t) ou l'**intensité** i(t) d'un courant électrique.

▹ Les **signaux électromagnétiques**, associés au passage d'une onde électromagnétique (lumière, onde radio, micro-onde, etc.), sont souvent un champ électrique local $\vec{E}(t)$ et un champ magnétique local $\vec{B}(t)$, tous deux de nature vectorielle.

1.2 Signaux périodiques

1.2.1 Période et fréquence

Un signal est **périodique** si son état vibratoire se répète à l'identique à intervalles de temps réguliers.

La plus petite durée au bout duquel l'état vibratoire se répète est la **période** du signal, notée T. On détermine sa valeur graphiquement en repérant la durée d'un motif élémentaire temporel.

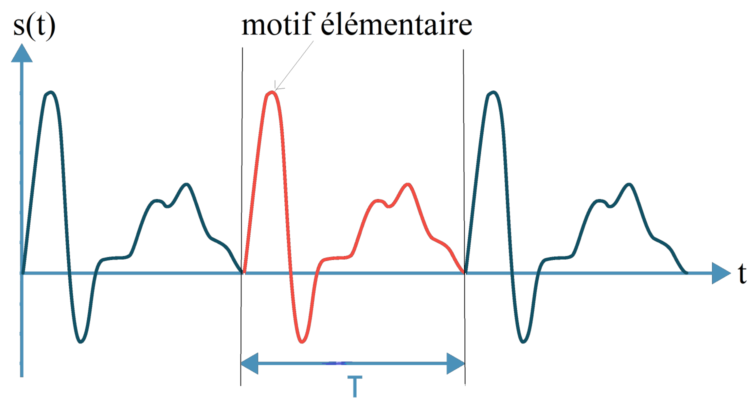
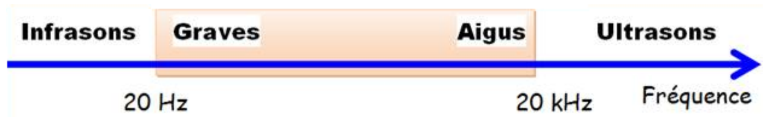


FIGURE 1 – Motif élémentaire et période T d'un signal périodique s(t)

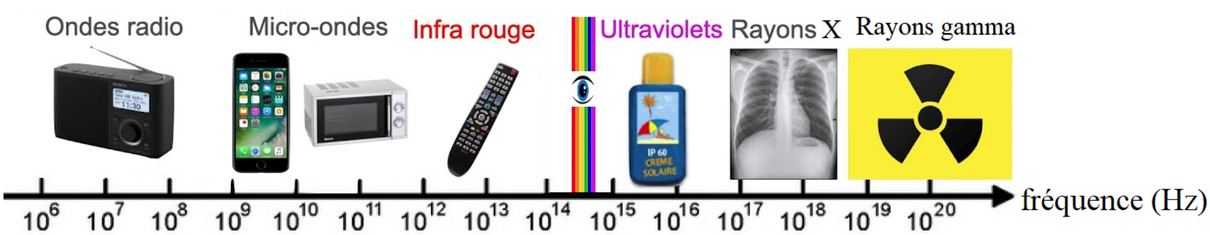
La **fréquence** d'un signal périodique désigne le nombre de fois qu'il se répète par unité de temps. Si la période T est exprimée en seconde, la fréquence f exprimée en hertz (avec 1Hz $= 1\text{s}^{-1}$) se calcule grâce à la relation :

$$f = \frac{1}{T}.$$

▷ Pour les signaux acoustiques, le domaine audible par l'oreille humaine correspond à des fréquences entre 20 Hz et 20 kHz environ. Dans cet intervalle, la fréquence mesure ce qu'on appelle la hauteur du son : plus elle est élevée, plus le son est aigu.



▷ Pour les signaux électromagnétiques, le domaine visible par l'œil humain correspond à des fréquences comprises entre 4×10^{14}Hz et 8×10^{14}Hz environ.



On retiendra quelques ordres de grandeur :
— ligne à haute tension, four à induction : $f \sim 10^2\text{Hz}$;
— radio AM : $f \sim 10^6\text{Hz} = 1\text{MHz}$;
— radio FM, IRM, RMN : $f \sim 10^8\text{Hz} = 100\text{MHz}$;
— téléphone mobile : $f \sim 10^9\text{Hz} = 1\text{GHz}$;
— radar, satellite, four à micro-ondes : $f \sim 10^{10}\text{Hz} = 10\text{GHz}$;
— appareil de chauffage : $f \sim 10^{14}\text{Hz}$;
— lampe de bronzage : $f \sim 10^{16}\text{Hz}$.

Exercice d'application 1 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Mesurer une période ou une fréquence.

Lors d'une séance de travaux pratiques, une élève a enregistré sa voix avec un microphone pendant qu'elle essayait de maintenir une note de musique.

Le signal sonore obtenu est visualisé grâce au logiciel Audacity. L'axe des abscisses représente le temps écoulé depuis le début de l'enregistrement en secondes, l'axe des ordonnées représente une tension électrique proportionnelle au déplacement de la membrane du microphone lors de l'enregistrement du son.

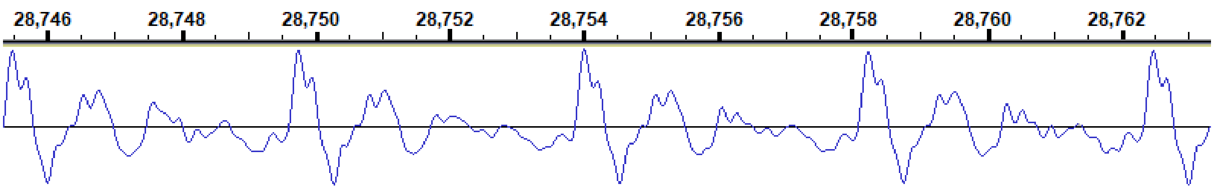


FIGURE 2 – Extrait du signal sonore, tel que l'affiche le logiciel Audacity

1. Justifier que ce signal est (quasiment) périodique.
2. Déterminer la valeur de la période T, aussi précisément que possible.
3. En déduire la valeur de la fréquence f du signal. Commenter.

1.2.2 Signaux sinusoïdaux

Certains signaux, comme la tension électrique du secteur, sont **sinusoïdaux** : leur graphe à la même forme que celui de la fonction sinus (ou cosinus).

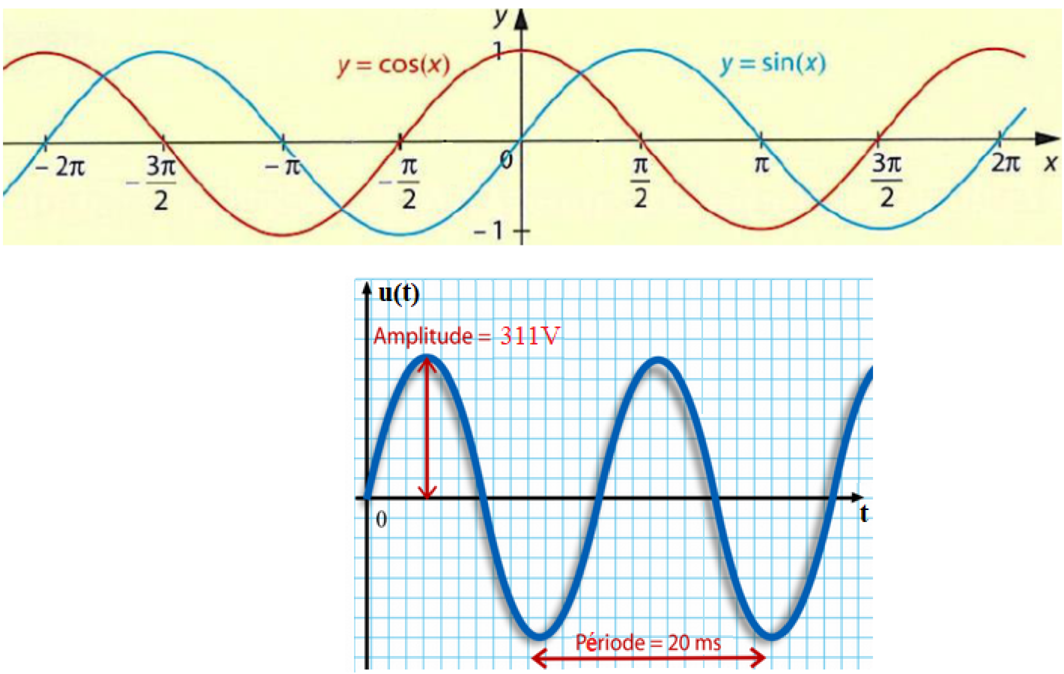


FIGURE 3 – Haut : représentation graphique des fonctions cosinus et sinus ; bas : Représentation graphique de la tension u(t) du secteur

L'expression mathématique d'un **signal sinusoïdal** est de la forme :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

où cos désigne la fonction cosinus.

Elle fait intervenir trois paramètres :

▹ A désigne l'**amplitude** du signal.
Quand l'amplitude augmente, la valeur maximale prise par le signal augmente, car $s(t) \in [-A; A]$.
De manière générale, si on note s_{max} et s_{min} les valeurs maximale et minimale prises par un signal, alors l'amplitude est définie par la relation $A = \frac{s_{max} - s_{min}}{2}$.

▹ ω (lettre grecque minuscule qui se prononce "oméga") est la **pulsation** du signal (en rad·s^{-1}).
Régler sa valeur permet de modifier la périodicité du signal.
Pour que la période ne valle pas 2π (comme pour la fonction cosinus) mais T, il faut faire en sorte que $s(t+T) = s(t)$ pour chaque instant t. Cela implique que la pulsation ω vérifie :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

ou encore que

$$s(t) = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \phi\right) = A\cos(2\pi f t + \phi).$$

Quand la pulsation ou la fréquence augmente, la période diminue et le signal se répète plus souvent.

▹ ϕ (lettre grecque minuscule qui se prononce "phi") est la **phase à l'origine**.
Modifier sa valeur permet de décaler temporellement le signal : si ϕ augmente, la courbe "recule".
Une augmentation de 2π permet de décaler la courbe d'une période.

Pour visualiser : https ://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/sinus.php

1.2.3 Intérêt du modèle du signal sinusoïdal

Certains signaux sont très bien modélisés par des signaux sinusoïdaux, par exemple :
▹ la tension électrique aux bornes d'un générateur de signaux basse fréquence (GBF), couramment utilisé dans les montages en électronique ;
▹ le champ électrique ou magnétique associé à l'onde lumineuse émise par un laser polarisé ;
▹ la surpression associée à un son pur, par exemple la note la$_3$ ($f = 440\mathrm{H}z$) obtenue avec un diapason ;
▹ certains signaux associés à des systèmes oscillants non amortis.

Toutefois, la raison profonde pour laquelle on attribue tant d'importance aux signaux sinusoïdaux est un théorème : un signal périodique quelconque peut être décomposé en une somme, éventuellement infinie, de signaux sinusoïdaux (une **série de Fourier**).

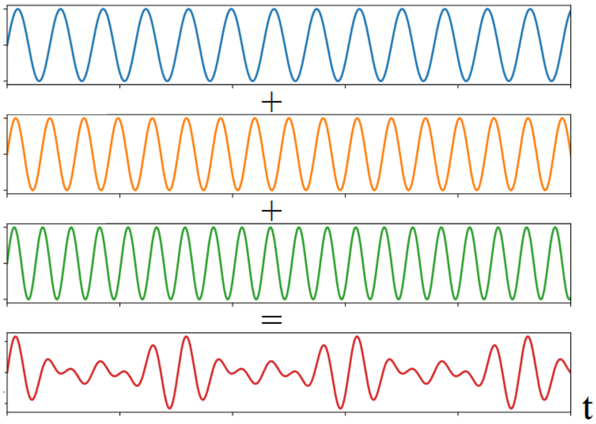


FIGURE 4 – Décomposition d'un signal périodique en somme de signaux sinusoïdaux

1.3 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Lorsqu'on représente simultanément sur un même graphique deux signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de même fréquence mais de phases à l'origine ϕ_1 et ϕ_2 différentes, cela se traduit par un **décalage temporel** Δt non nul entre ces deux signaux. Il correspond au **retard algébrique** du signal s_2 par rapport au signal s_1 :

$$s_2(t) = s_1(t - \Delta t).$$

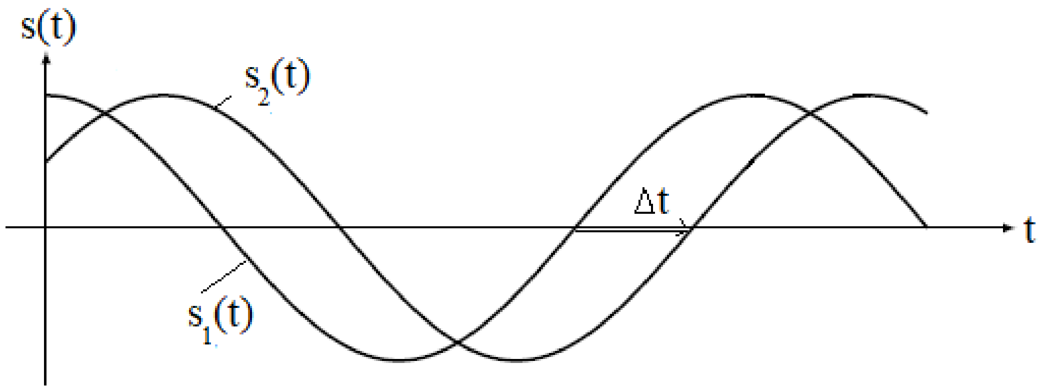


FIGURE 5 – Mise en évidence d'un décalage temporel entre deux signaux sinusoïdaux déphasés

Le **déphasage** du signal s_2 par rapport au signal s_1 désigne la différence des phases à l'origine :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1.$$

Le lien entre déphasage $\Delta\phi$ et décalage temporel Δt peut être étudié empiriquement (autrement dit, en expérimentant) grâce à une **simulation numérique** (un code Python est disponible sur Cahier de Prépa).

On remarque alors que :

— Si $\Delta\phi = 0$, les deux signaux ne sont pas décalés temporellement. On dit alors qu'ils sont **en phase** ;

— Si $\Delta\phi \in]0;2\pi[$, le signal s_2 est en avance sur le signal s_1 : $\Delta t < 0$;

— Si $\Delta\phi = 2\pi$, les deux signaux sont décalés temporellement d'une période exactement. Comme leurs graphes se recouvrent, on considère qu'ils sont à nouveau en phase.

On met aussi en évidence une périodicité du décalage temporel lorsque le déphasage varie : chaque fois que le déphasage augmente de 2π, le décalage temporel diminue d'une période.

Si on explore les déphasages négatifs ($\Delta\phi < 0$), on constate que le signal s_2 est à présent en retard sur le signal s_1 ($\Delta t > 0$). Chaque fois que le déphasage diminue de 2π, le décalage temporel augmente d'une période.

Enfin, une étude plus poussée met en évidence la proportionnalité entre décalage temporel et déphasage.

La formule ci-dessous résume toutes ces observations :

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = -\frac{\Delta t}{T},$$

où le déphasage $\Delta\phi$ est exprimé en radian (rad).

Remarque : avec un déphasage exprimé en degré (°), la formule serait :

$$\frac{\Delta\phi}{360°} = -\frac{\Delta t}{T}.$$

Elle permet de passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement.

Démontrons cette formule dans le cas de deux signaux de même amplitude :

$$s_2(t) = A\cos(\omega t + \phi_2) = A\cos\left(\omega t + \Delta\phi + \phi_1\right),$$

d'une part, et d'autre part :

$$s_2(t) = s_1(t - \Delta t) = A\cos(\omega(t - \Delta t) + \phi_1),$$

ce qui montre que

$$\Delta t = -\frac{\Delta\phi}{\omega},$$

dont la formule découle en utilisant la propriété

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Exercice d'application 2 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Reconnaître une avance ou un retard de phase.

Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement.

Dans l'exemple illustré sur la Figure 5 ci-dessus :

1. Indiquer, en justifiant, si le signal s_2 est en avance ou en retard sur le signal s_1.

2. Déterminer la valeur du déphasage $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, à une constante additive près qui est un multiple entier de 2π.

On donne un nom à quelques cas particuliers de déphasage (à une constante additive près, multiple entier de 2π) :

— Si $\Delta\phi = 0$, les signaux sont **en phase** : on ne voit pas de décalage temporel ;
— Si $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ les signaux sont **en quadrature de phase** : ils sont décalés d'un quart de période.
— Si $\Delta\phi = \pi$ les signaux sont **en opposition de phase** : ils s'annulent en même temps mais quand l'un est maximal, l'autre est minimal ;

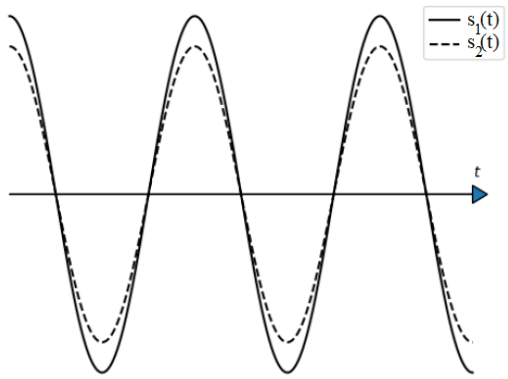


FIGURE 6 – Représentation graphique de deux signaux en phase

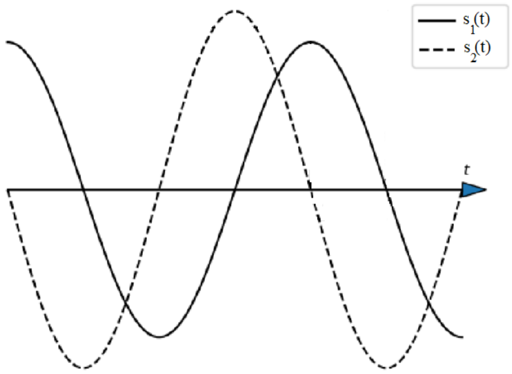


FIGURE 7 – Représentation graphique de deux signaux en quadrature de phase

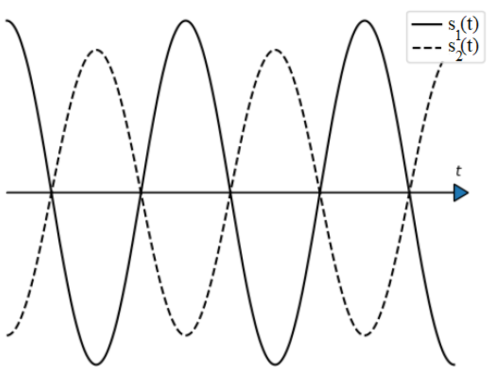
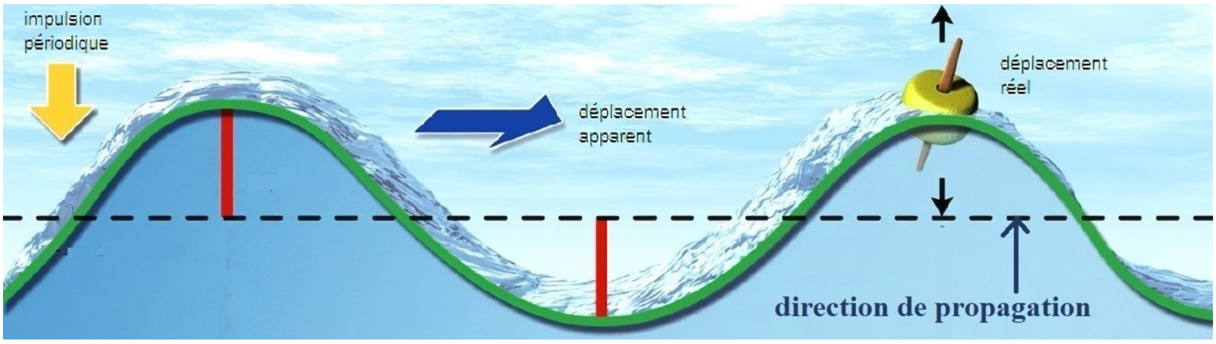


FIGURE 8 – Représentation graphique de deux signaux en opposition de phase

2 Ondes progressives

2.1 Ondes, phénomènes de transport de signaux

Le mot **onde** est issu du latin unda qui désigne une eau qui se déplace en se soulevant et en s'abaissant. Il se traduit en anglais par wave, hérité de l'ancien scandinave pour désigner la houle formée par le vent à la surface de la mer ou d'un lac.



Les vagues schématisées ci-dessus sont caractérisées par la propagation d'un mouvement oscillatoire de la surface de l'eau par rapport à un niveau de référence.

Elles sont **transversales**, comme les ondes le long d'une corde ou les ondes sismiques de type S : la direction de vibration est orthogonale à celle de propagation.

Il existe aussi des **ondes longitudinales**, comme les ondes le long d'un ressort en compression, les ondes sismiques de type P, ou encore les ondes acoustiques : les vibrations ont lieu dans la même direction que celle de propagation.

Ces **ondes mécaniques** nécessitent toutes un milieu matériel pour se propager.

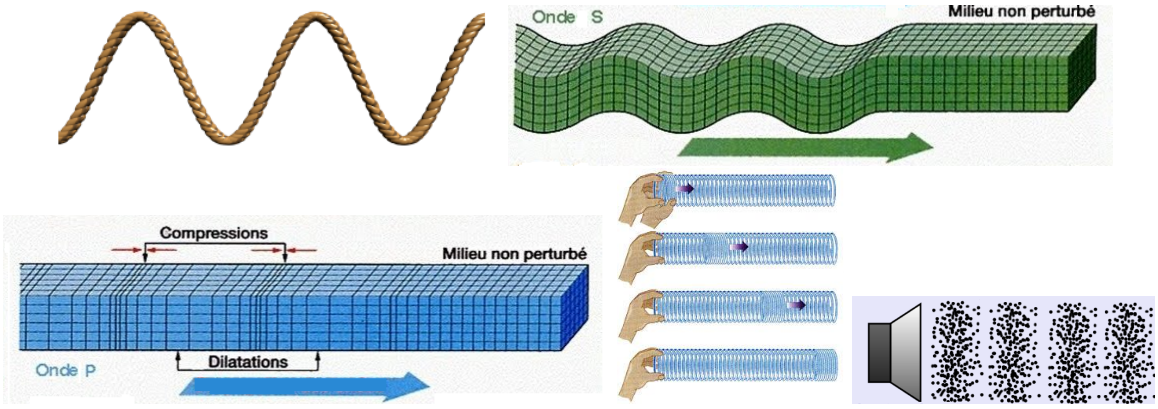


FIGURE 9 – Exemples d'ondes mécaniques

Les **ondes électromagnétiques**, qui désignent le phénomène de propagation simultanée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$, sont une autre grande catégorie d'ondes.
Elles sont de nature transversale. Contrairement aux ondes mécaniques, elles peuvent également se propager dans le vide.

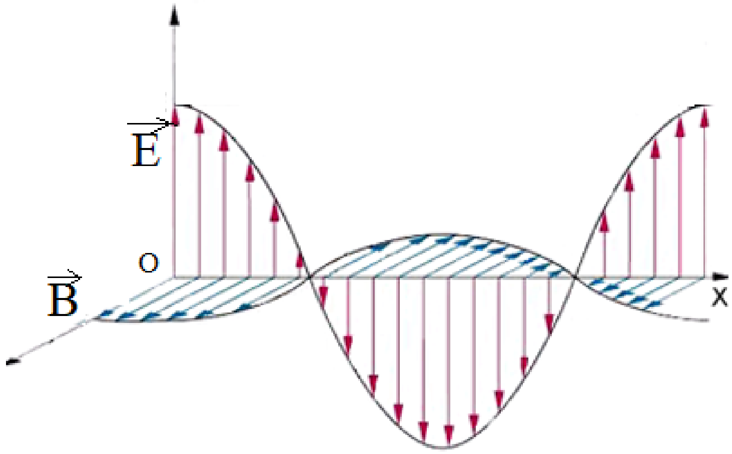


FIGURE 10 – Schéma de la représentation spatiale d'une onde électromagnétique de direction de propagation (Ox)

Une **onde progressive** désigne la propagation de proche en proche d'une vibration, sans déplacement global de matière mais accompagnée d'un transport d'énergie.

La valeur du signal s associé à la vibration qui se propage dépend à la fois du point de l'espace où on la mesure (aspect spatial), et de l'instant où a lieu cette mesure (aspect temporel).

Pour limiter au maximum les difficultés mathématiques, on s'intéresse uniquement à une **propagation unidimensionnelle** selon un axe (Ox), de sorte que l'onde est décrite par une **fonction de deux variables** : $s(x,t)$.

On fera aussi les hypothèses d'une propagation :
▷ **linéaire** : la fréquence du signal, s'il est périodique, se conserve au cours de la propagation ;
▷ **non dispersive** : comme la **célérité** (vitesse de propagation) ne dépend pas de la fréquence, l'allure spatiale de l'onde ne se déforme pas au cours de sa propagation.

Nous admettrons par ailleurs que si le milieu de propagation est **homogène**, la propagation a lieu à célérité constante. Par exemple, dans l'air le son se propage à une célérité proche de 340 m·s^{-1}, et dans le vide une onde électromagnétique se propage avec une célérité de $3,00 \times 10^8$m·s^{-1}.

Pour représenter graphiquement l'onde $s(x,t)$, on peut par exemple tracer :
— $s(t)$ à x fixé. Cela revient à placer un capteur au point d'abscisse x et à visualiser le signal sur un écran.
— $s(x)$ à t fixé. C'est comme si un réseau de capteurs était implanté sur la trajectoire de l'onde sans la perturber, ou si on photographiait l'onde vue de côté.

Pour une onde progressive, ces deux représentations sont intimement liées.

Supposons que l'onde est émise au point O (origine de l'axe (Ox)) et que le signal correspondant vaut est décrit par la fonction $f(t) = s(0,t)$.
Cette onde parvient au point M d'abscisse x avec un certain **retard** lié à la pro-

pagation, qui correspond à la durée Δt mise par l'onde pour se propager de O à M. Comme l'onde se propage à vitesse constante c, le retard temporel Δt s'écrit, pour $x > 0$ (propagation dans le sens de l'axe) : $\Delta t = \frac{x}{c}$.

Par conséquent, l'onde au point M à l'instant t prend la même valeur qu'en O à l'instant antérieur $t - \Delta t$, soit finalement :

$$s(x,t) = s(0, t-\Delta t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

En reprenant le raisonnement précédent, on peut montrer que si l'onde se propage en sens inverse de l'orientation de l'axe (Ox), soit vers les $x < 0$, alors $s(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$.

Enfin, plutôt que d'exprimer les ondes progressives comme des fonctions de la variable $t \pm \frac{x}{c}$, on peut raisonner sur les variables $x \pm ct$, qui ont la dimension d'une longueur.

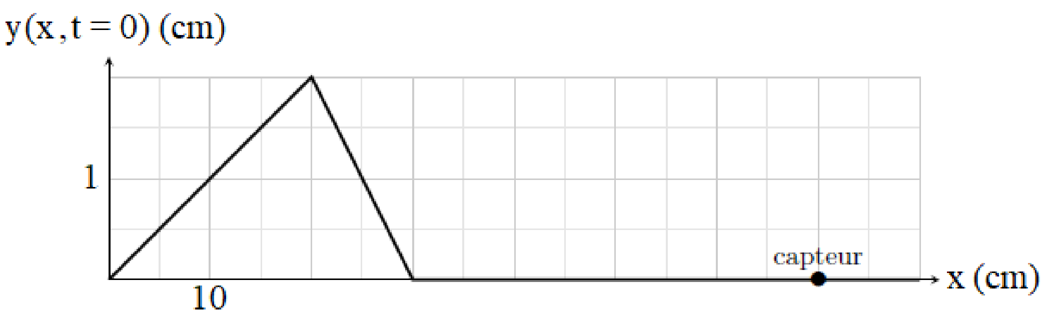
Ainsi, une onde progressive peut s'écrire sous la forme :
▹ $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ou $g(x - ct)$ si elle se propage dans le sens positif de l'axe (Ox) ;
▹ $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ ou $g(x + ct)$ si elle se propage dans le sens négatif de l'axe (Ox).

Notons enfin qu'il existe des méthodes pour visualiser les deux aspects (spatial et temporel) en même temps :
▹ On peut par exemple superposer des représentations de $s(x, t_i)$ à différents instants t_i pour obtenir l'équivalent d'une chronophotographie, ou les faire défiler pour obtenir un film : https ://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/evolution_temporelle.php
▹ On peut aussi travailler sur une représentation graphique tridimensionnelle, avec un axe temporel, un axe spatial, et un axe représentant la valeur de l'onde.

2.2 De la représentation spatiale à la représentation temporelle

Exercice d'application 3 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée.

On donne ci-dessous la représentation spatiale à l'instant $t = 0$ d'une onde progressive le long d'une corde (le modèle retenu est simpliste).
Elle se propage dans le sens des x croissants, sa célérité vaut c $= 20$ cm·s^{-1}.
Un capteur est situé à la position $x_c = 70$ cm.



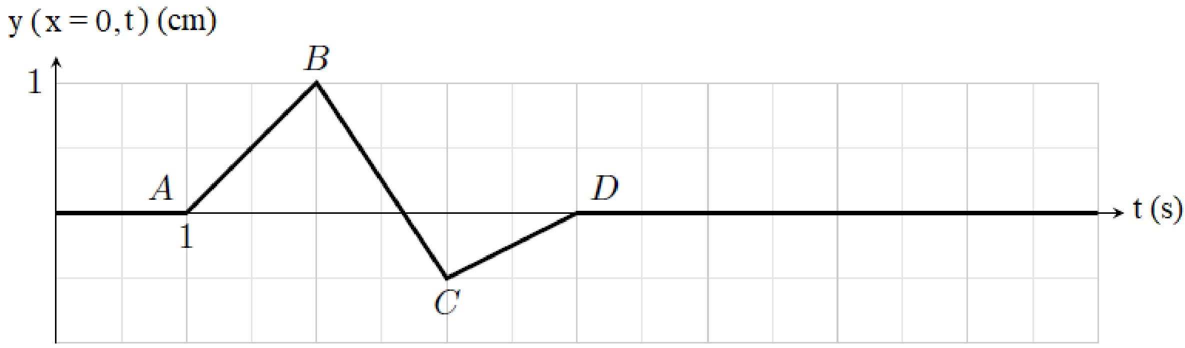
1. Déterminer à quel instant t$_c$ le **front d'onde** (point le plus avancé atteint par l'onde) arrive au niveau du capteur.

2. Déterminer la durée Δt pendant laquelle on observe une perturbation en un point donné au passage de l'onde.
3. Construire la représentation temporelle de l'onde au point x_c. Commenter.

2.3 De la représentation temporelle à la représentation spatiale

Exercice d'application 4 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution spatiale à un instant donné.

Ci-dessous est donnée la représentation temporelle à la position $x = 0$ d'une onde progressive. Elle se propage dans le sens des x croissants, à la célérité c $= 10$ cm·s^{-1}.



1. Déterminer la largeur spatiale Δx de la perturbation.
2. Construire la représentation spatiale de l'onde à l'instant $t = 7{,}0$ s. Commenter.

3 Ondes progressives sinusoïdales

3.1 Propagation d'un signal sinusoïdal

Une **onde progressive sinusoïdale** est un cas particulier d'onde progressive pour lequel la fonction f de l'expression $s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est sinusoïdale : $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Ainsi, si elle se propage vers les x croissants, son expression mathématique est :

$$s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi),$$

où on a posé $k = \frac{\omega}{c}$. Physiquement, k représente la norme du **vecteur d'onde**, $\vec{k} = k\vec{u}$, avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la direction de propagation (soit ici, $\vec{u} = \vec{u}_x$).
On appelle **phase** d'une onde sinusoïdale la grandeur $\Phi = \omega t - kx + \phi$.

3.2 Double périodicité d'une onde sinusoïdale

Une onde sinusoïdale possède une périodicité :
▹ temporelle : en un point d'abscisse x fixée, le signal est sinusoïdal donc périodique, sa **période** (temporelle) vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}$;
▹ spatiale : à un instant donné t, la représentation spatiale de l'onde est sinusoïdale, et possède une période (spatiale) $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. On appelle **longueur d'onde** cette

grandeur λ, qui représente la plus petite distance sur laquelle l'onde se répète à l'identique à elle-même à un instant fixé. On peut la déterminer graphiquement sur le graphe de $s(x)$, en mesurant la longueur d'un motif élémentaire spatial.

Ainsi, une onde sinusoïdale possède une double périodicité, à la fois spatiale et temporelle.

L'expression mathématique d'une onde sinusoïdale peut être mise sous une forme qui fait explicitement intervenir les grandeurs définies plus haut :

$$s(x,t) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi\right),$$

ou encore :

$$s(x,t) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi(f\,t - \sigma x) + \phi\right),$$

qui fait apparaître le **nombre d'onde** σ (cette lettre grecque se prononce "sigma"), qu'on peut interpréter comme la fréquence spatiale de l'onde à un instant fixé.

3.3 Célérité d'une onde sinusoïdale

Pour une onde progressive sinusoïdale, il existe un lien entre la longueur d'onde λ, la période T et la célérité c :

$$c = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \lambda f.$$

Cette relation traduit le fait que chaque fois qu'une période T s'écoule, une onde sinusoïdale se propage sur une distance égale à la longueur d'onde λ. Elle découle de la **relation de dispersion**

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

3.4 Bilan des analogies temps-espace

On a mis en évidence dans les paragraphes précédents un certain nombre d'analogies entre les aspects spatiaux et temporels pour une onde progressive sinusoïdale :

Temps	période T	fréquence $f = \frac{1}{\mathrm{T}}$	pulsation $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$
Espace	longueur d'onde λ	nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$	norme du vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

3.5 Déphasage dû à la propagation

Pour mettre en évidence la propagation d'une onde progressive sinusoïdale, on place des capteurs en différents points de l'espace dans la direction de propagation. Ils enregistrent tous un signal sinusoïdal, dont le déphasage augmente avec la distance de propagation, traduisant ainsi un retard temporel dû à la propagation.

Si un émetteur et un récepteur sont placés de sorte que les signaux soient en phase, un déplacement d'une longueur d'onde du récepteur ramène les signaux en phase. Cela permet de mesurer la longueur d'onde et d'en déduire la célérité de l'onde, connaissant la fréquence (cf TP1).