

CHAPITRE 8

Circuits électriques linéaires du premier ordre

Lorsqu'un circuit électrique est soumis à un changement brutal (ouverture ou fermeture d'un interrupteur par exemple), les **tensions** et **intensités** se mettent à varier. Il leur faut alors un certain temps pour atteindre un **régime permanent**. La caractérisation du **régime transitoire** qui précède l'établissement de ce régime permanent est un prérequis pour aborder les nombreuses applications technologiques.

Dans le cadre d'une étude systématique, on classe les circuits électriques selon deux critères :

- ▷ les contraintes extérieures : en l'absence de générateur un circuit est en **régime libre**. Si un générateur de tension continue est branché brusquement, le circuit est soumis à un **échelon de tension** ;

- ▷ l'**ordre** du circuit, un nombre entier naturel que nous apprendrons à déterminer. Il dépend des composants présents dans le circuits et de la façon dont ils sont reliés entre eux. Les circuits qui possèdent un même ordre réagissent tous qualitativement de la même façon.

Dans ce chapitre, nous limiterons notre étude aux circuits du **premier ordre**, en régime libre ou soumis à un échelon de tension.

L'étude se fera dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi-stationnaires**.

1 Condensateurs et bobines

Les **condensateurs** et les **bobines** sont des **dipôles** très courants dans les circuits en régime variable. Les circuits du premier ordre comportent soit l'un, soit l'autre.

1.1 Condensateur

Lorsqu'on met deux armatures conductrices en face l'une de l'autre, séparées par un milieu diélectrique (isolant), on obtient un dipôle électrique appelé **condensateur**.

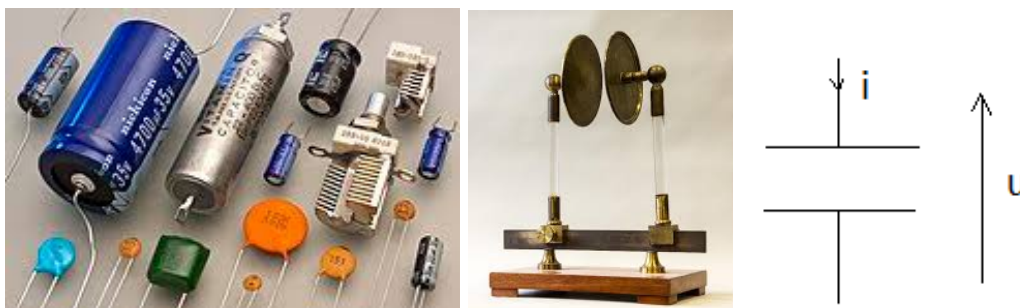


FIGURE 1 – Gauche : photographie de condensateurs ; milieu : photographie d'un condensateur d'Aepinus (qui possède de grandes armatures circulaires) ; droite : symbole d'un condensateur idéal dans les schémas des circuits électriques (en convention récepteur ici)

La **relation constitutive** (ou **loi de comportement**) d'un condensateur idéal en convention récepteur est

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

La constante de proportionnalité entre l'intensité i du courant et la dérivée temporelle $\frac{du}{dt}$ de la tension aux bornes du condensateur, notée C , est la **capacité** du condensateur. Cette grandeur physique s'exprime en farad, de symbole F , avec $1F = 1C \cdot V^{-1}$.

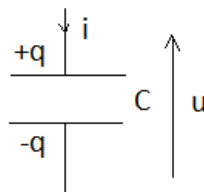
Les valeurs typiques de la capacité d'un condensateur s'étalent sur de nombreux ordres de grandeur, de quelques picofarads ($1pF = 10^{-12}F$) pour les plus petits condensateurs, qui mesurent quelques millimètres à peine, à quelques kilofarads pour les condensateurs utilisés comme batteries dans les véhicules alimentés électriquement.

Comme le milieu entre les armatures est isolant, des charges électriques s'accumulent sur ces dernières. La neutralité globale implique que la charge totale q portée par l'armature vers laquelle pointe la tension est l'opposée de la charge portée par l'autre armature (qui vaut $-q$). Si $q = 0$ le condensateur est déchargé. Par convention, dans ce cas $u = 0$.

La relation constitutive implique alors que la charge q portée par la première armature est proportionnelle à la tension u aux bornes du condensateur :

$$q = Cu.$$

Souvent, on indique sur le symbole du condensateur les charges sur les armatures et la capacité du condensateur :



L'**énergie (électrique) stockée** par accumulation de charges sur ses armatures suite à la **charge** d'un condensateur vaut

$$E_e = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Le condensateur peut transmettre cette énergie aux autres dipôles en restituant les charges lors d'une phase de **décharge**. Le condensateur se comporte alors comme un générateur de tension ($i < 0$ en convention récepteur), à ceci près que la tension à ses bornes diminue progressivement.

La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est une fonction continue de la variable temps.

Exercice d'application 1 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Utiliser la relation entre l'intensité et la tension.

Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur.

Interpréter la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

1. En vous appuyant sur la relation constitutive du condensateur idéal et sur l'interprétation de l'intensité comme un débit de charges justifier que $q = Cu$.

2. En travaux pratiques, un condensateur de capacité $C = 1,0\mu\text{F}$ a une tension $u = 12,0\text{V}$ entre ses bornes. Calculer la charge électrique stockée sur sa première armature et en déduire le nombre d'électrons qu'il peut restituer lors de sa décharge. On rappelle la valeur de la charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$.

3. Rappeler l'expression de la puissance électrique p reçue par un dipôle en convention récepteur. Montrer que pour un condensateur cette puissance a pour expression $p = Cu \frac{du}{dt}$.

4. Rappeler le lien entre puissance reçue et énergie. En déduire l'expression de l'énergie E_e stockée dans un condensateur, en prenant pour convention $E_e = 0$ lorsque le condensateur est déchargé. Calculer l'énergie électrique stockée dans le condensateur considéré dans la question 2.

5. Rappeler pourquoi on considère, en électrocinétique, que la charge électrique est une fonction continue de la variable temps. Justifier que l'énergie stockée dans un condensateur est une fonction continue de la variable temps, et que la tension à ses bornes l'est également. Proposer une autre justification à la continuité de la tension, s'appuyant sur un raisonnement énergétique.

6. Dans un condensateur réel, l'isolant entre les armatures n'est pas parfait. Proposer un modèle électrique pour un condensateur réel.

1.2 Bobine

Un enroulement de fil conducteur en forme de cylindre permet d'obtenir un dipôle appelé **bobine**.

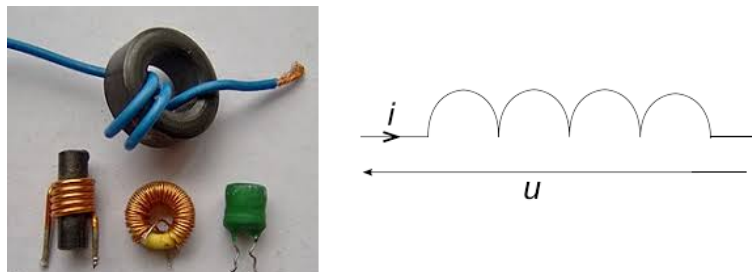


FIGURE 2 – Gauche : photographie de bobines ; droite : symbole d'une bobine idéale dans les schémas des circuits (en convention récepteur ici)

La relation constitutive d'une bobine idéale en convention récepteur est

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

La constante de proportionnalité entre la tension u aux bornes d'une bobine idéale et la dérivée temporelle $\frac{di}{dt}$ de l'intensité du courant qui la traverse est l'**inductance (propre) de la bobine**, notée L . Cette grandeur physique s'exprime en henry, de symbole H , avec $1\text{H} = 1\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$.

Des valeurs typiques d'inductance d'une bobine sont de l'ordre de $1\mu\text{H}$ à 1H .

L'énergie (magnétique) stockée dans une bobine par établissement du courant dans cette dernière vaut

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2.$$

Lors de la restitution de cette énergie, une bobine idéale peut se comporter comme un générateur de courant idéal ($i < 0$ en convention récepteur), à ceci près que l'intensité du courant délivré diminue progressivement.

L'intensité du courant qui traverse la bobine est une fonction continue de la variable temps.

Exercice d'application 2 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Utiliser la relation entre l'intensité et la tension.

Exprimer l'énergie stockée dans une bobine.

Interpréter la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine.

1. Rappeler l'expression de la puissance électrique p reçue par un dipôle en convention récepteur. Montrer que $p = Li \frac{di}{dt}$.

2. Rappeler le lien entre puissance reçue et énergie. En déduire l'expression de l'énergie E_m stockée dans une bobine, en prenant pour convention $E_m = 0$ lorsque la bobine n'est pas parcourue par un courant. Une bobine d'inductance $L = 1,0 \text{ mH}$ est parcourue par un courant d'intensité $I = 500 \text{ mA}$. Calculer l'énergie stockée dans cette bobine.

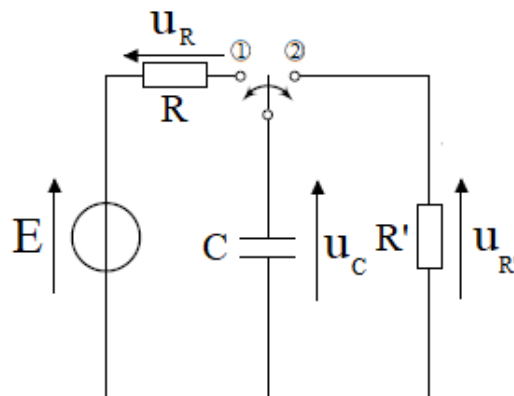
3. Expliquer pourquoi l'énergie stockée dans une bobine est une fonction continue de la variable temps, et en déduire que l'intensité du courant qui la traverse est également continue.

4. Identifier un phénomène physique qui a lieu dans la bobine et n'est pas pris en compte dans le modèle de la bobine idéal. Proposer alors un modèle électrique pour une bobine réelle.

2 Circuit RC

2.1 Cadre de l'étude

Pour se familiariser avec le condensateur, on étudie le circuit schématisé ci-dessous.

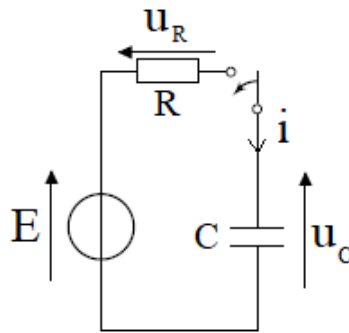


Le condensateur est initialement déchargé, l'interrupteur est ouvert.

2.2 Charge du condensateur

À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 1, ce qui ferme la maille de gauche du circuit. Cela revient à brancher soudainement le générateur, c'est donc comme si on faisait passer sa tension de 0 à E instantanément à l'instant $t = 0$: le circuit RC est soumis à un **échelon de tension**.

Qualitativement, le condensateur se **charge** progressivement en accumulant des charges électriques sur ses armatures. Cela revient à étudier le circuit ci-dessous :



La grandeur physique qui nous intéresse ici est la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur. Elle est mesurée par un oscilloscope.

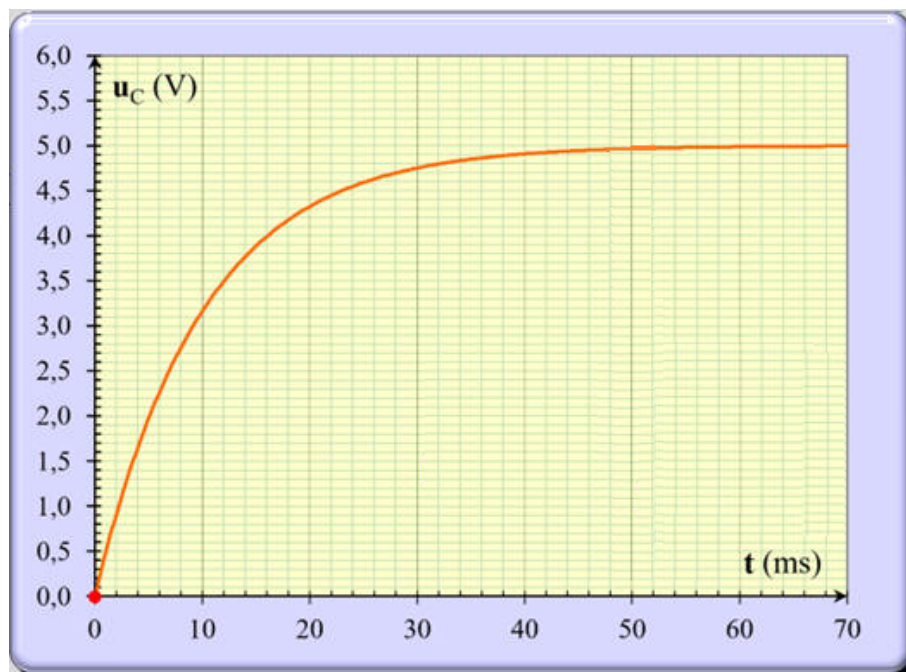


FIGURE 3 – Exemple d'oscillogramme observé sur l'écran de l'oscilloscope pendant la charge du condensateur

2.2.1 Étude qualitative

Exercice d'application 3 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Distinguer sur un relevé expérimental, le régime transitoire et le régime permanent d'un signal à la sortie d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.

Utiliser un modèle équivalent aux dipôles pour déterminer les grandeurs électriques en régime permanent.

Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

1. Sur l'oscillogramme de la figure 3, identifier le régime transitoire et le régime permanent.

2. Avant fermeture de l'interrupteur, pour $t < 0$, déterminer les valeurs de u_C , i et u_R .

3. À l'instant $t = 0^+$, autrement dit directement après la fermeture de l'interrupteur, donner en justifiant les valeurs de u_C , u_R et i .

4. En régime permanent, pour $t \rightarrow +\infty$, déterminer les valeurs de i , u_R , u_C et E . En déduire un modèle électrique équivalent au condensateur en régime permanent.

2.2.2 Étude quantitative

Afin de disposer de toute la dynamique du circuit RC (autrement dit, de connaître $u_C(t)$ à chaque instant), on met en équation le circuit électrique.

Exercice d'application 4 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une maille.

1. En appliquant la loi des mailles, montrer que la tension $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}.$$

2. On pose $\tau = RC$. Montrer que la grandeur physique notée τ est homogène à un temps (autrement dit, que son unité est celle d'un temps).

On pose à présent $u_\infty = E$, de sorte que $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}.$$

Cette situation est très courante : l'application des lois de la physique ne donne pas directement l'évolution temporelle de la grandeur d'intérêt (ici, le signal $u_C(t)$), mais aboutissent à une équation où cette grandeur apparaît, ainsi qu'une ou plusieurs de ses dérivées, autrement dit une **équation différentielle**.

Elle a été mise sous sa **forme canonique**, dans laquelle les paramètres qui décrivent la situation physique (ici R , C et E) n'apparaissent plus explicitement. L'intérêt de cette mise sous forme canonique est triple :

- ▷ elle est plus pratique à utiliser car elle fait intervenir moins de symboles ;
- ▷ on y voit explicitement à quelle type de grandeur physique les coefficients sont homogènes ;
- ▷ des systèmes potentiellement très différents peuvent être décrits par la même équation différentielle sous forme canonique, ce qui permet d'appliquer les mêmes mathématiques pour les traiter et de mettre en évidence des analogies.

Les mathématiciens ont introduit du vocabulaire pour décrire et classer les équations différentielles. Celle qui nous intéresse ici est :

- **du premier ordre** : la dérivée d'ordre le plus élevée est d'ordre 1 ;
- **linéaire** : la fonction inconnue $u_C(t)$ n'y intervient que sous la forme de ses dérivées successives, elles n'y sont pas composées par d'autres fonctions (carré, racine carrée, cosinus, etc.) ;
- **à coefficients constants** : les coefficients n'y sont pas des fonctions de la variable (temps), mais des constantes ;
- **avec second membre constant** : à droite du signe $=$, tout ce qui ne dépend ni de la fonction inconnue ni de ses dérivées est indépendant de la variable (temps).

On souhaite à présent résoudre cette équation différentielle pour obtenir la fonction, pour le moment inconnue, $u_C(t)$.

Les mathématiques nous enseignent que dans le cas présent la solution de l'équation différentielle existe et est unique.

En pratique, on sait résoudre très peu d'équations différentielles de façon exacte. C'est la raison pour laquelle on procède souvent à des résolutions numériques approchées, avec un logiciel ou un langage de programmation. Ici, la **méthode d'Euler** ou l'utilisation de la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` en langage Python s'avèrent très efficaces pour obtenir le graphe de la fonction $u_C(t)$.

Une analyse qualitative de l'équation différentielle s'avère très utile et instructive, en préalable ou en complément d'une résolution exacte ou numérique. Ici, l'étude expérimentale conduite au préalable nous servira de guide.

Exercice d'application 5 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un échelon de tension.

Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire.

Aux temps courts, le condensateur n'est pas encore très chargé, donc $u_C(t) \simeq 0$, tandis que les variations de tension sont plutôt rapides, comme le montre la figure 3. Il existe donc un intervalle de temps pendant lequel $\frac{u_C}{\tau} \ll \frac{du_C}{dt}$.

1. Réécrire sous une forme plus simple l'équation différentielle en négligeant $\frac{u_C}{\tau}$ par rapport à $\frac{du_C}{dt}$.

2. Justifier que la solution de cette nouvelle équation différentielle est de la forme $u_C(t) = \frac{E}{\tau} t$. Commenter ce résultat au regard de la courbe expérimentale.

Aux temps longs, les variations de tension sont lentes, de sorte que $\frac{u_C}{\tau} \gg \frac{du_C}{dt}$.

3. Réécrire sous une forme plus simple l'équation différentielle sous forme canonique en négligeant $\frac{du_C}{dt}$ par rapport à $\frac{u_C}{\tau}$.

4. Résoudre cette nouvelle équation différentielle, et interpréter le résultat au regard de la courbe expérimentale. Expliquer a posteriori pourquoi on a utilisé la notation u_∞ dans le membre de droite de l'équation différentielle sous forme canonique.

Cette analyse qualitative nous permet de donner une interprétation physique à la **constante de temps** τ qui a été introduite pour mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

5. Montrer que la tangente à l'origine, qui correspond à la solution de l'équation différentielle approchée aux temps courts, et l'asymptote horizontale qui correspond à la solution de l'équation différentielle approchée aux temps longs se croisent en un

point d'abscisse $t = \tau$. Déterminer graphiquement la valeur de ce temps caractéristique sur la courbe expérimentale.

6. En déduire un protocole pour mesurer la capacité C d'un condensateur. Calculer la capacité du condensateur utilisé ici, sachant que $R = 2200\Omega$.

On souhaite à présent résoudre explicitement l'équation différentielle afin de trouver l'expression mathématique exacte de $u_C(t)$. Parmi les nombreuses méthodes qui existent pour résoudre une équation différentielle, la plus simple à mettre en œuvre consiste à deviner l'expression mathématique de la solution $u_C(t)$ et à vérifier qu'elle fonctionne. Cette méthode fonctionne car la solution est ici unique.

7. Vérifier que la solution de l'équation différentielle est de la forme $u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, avec A une constante appelée **constante d'intégration**. Pour ce faire, on calculera $\frac{du_C}{dt}$ puis $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau}$. On rappelle que $\frac{d}{dt}(e^{at}) = ae^{at}$, où a est une constante quelconque.

8. Montrer qu'on peut interpréter cette solution de la façon suivante : c'est la somme de la solution $u_h(t)$ de l'équation différentielle **homogène** associée à celle qu'on souhaite résoudre (autrement dit, la même mais avec un second membre nul) et d'une solution particulière $u_p(t)$ de l'équation différentielle globale. En pratique, c'est comme ceci qu'on résout une équation différentielle dont le second membre est non nul.

Une équation différentielle n'est complètement résolue que lorsqu'on a trouvé la valeur de la constante d'intégration. Pour l'obtenir, il suffit de connaître la valeur de $u_C(t)$ à un instant particulier.

9. En utilisant la valeur de $u_C(t)$ à l'instant $t = 0$, montrer que l'évolution temporelle de la tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit RC soumis à un échelon de tension est de la forme

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Prenons à présent le temps de vérifier que cette solution est en accord avec l'analyse qualitative effectuée plus haut.

10. En utilisant le **développement limité à l'ordre 1** de la fonction exponentielle au voisinage de 0, $e^x \simeq 1 + x$ pour $x \ll 1$, retrouver l'équation de la **tangente à l'origine**.

11. En utilisant une limite connue de la fonction exponentielle, montrer que $u_C(t) \rightarrow E$ quand $t \rightarrow +\infty$. Comparer avec l'équation de l'**asymptote horizontale**.

La connaissance de la solution exacte permet d'affiner encore notre compréhension de la constante de temps τ .

12. Calculer $u_C(t = \tau)$. Commenter.

13. Calculer $u_C(t = 3\tau)$ puis expliquer pourquoi on parle alors de "**temps de montée à 95%**". En déduire un protocole expérimental pour mesurer la constante de temps τ .

14. En pratique, on considère souvent que le régime transitoire a une durée de l'ordre de 5τ , et qu'on est ensuite en régime permanent. Par un calcul, justifier pourquoi c'est le cas. Évaluer alors la durée du régime transitoire dans l'étude expérimentale de la charge du condensateur ci-dessus.

2.3 Stockage et dissipation d'énergie

L'étude dynamique ci-dessus s'appuie sur la loi des mailles. Comme souvent en physique, une **étude énergétique** apporte un nouvel éclairage.

Exercice d'application 6 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Réaliser un bilan énergétique.

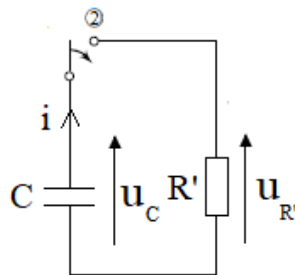
1. Rappeler l'expression qui lie E , u_C et u_R . La multiplier par i , et expliquer ce que représente alors chaque terme.

2. Intégrer l'expression obtenue sur toute la durée de la charge pour obtenir un bilan énergétique. En déduire que l'énergie fournie par le générateur au circuit durant la charge vaut CE^2 , que celle reçue par la résistance et dissipée par effet Joule vaut $\frac{1}{2}CE^2$ et que celle reçue par le condensateur et stockée dans ce dernier vaut $\frac{1}{2}CE^2$.

3. Définir le **rendement** de la charge du condensateur et calculer sa valeur.

2.4 Décharge du condensateur

Une fois le régime permanent atteint, on bascule l'interrupteur en position 2. Le circuit considéré est donc équivalent à celui représenté ci-dessous :



Le condensateur, initialement chargé, se décharge peu à peu. On a choisi la **convention générateur** pour le condensateur. La nouvelle origine des temps est l'instant où l'interrupteur bascule en position 2. On considère qu'à l'instant $t = 0^-$, la tension aux bornes du condensateur vaut $u_C(t = 0^-) = E$. Comme il n'y a pas de générateur dans le circuit, il est en **régime libre**. On s'intéresse à l'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lors de la phase de **décharge**.

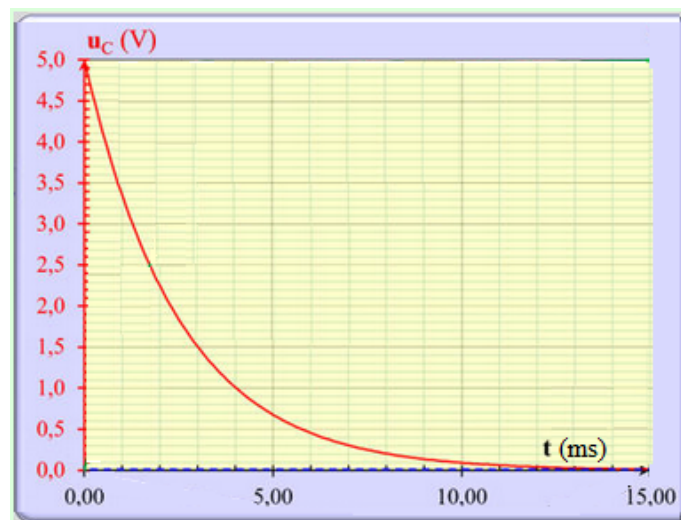


FIGURE 4 – Oscillogramme observé pendant la décharge du condensateur

2.4.1 Étude qualitative

Exercice d'application 7 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Utiliser un modèle équivalent aux dipôles pour déterminer les grandeurs électriques en régime permanent.

Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

1. Avant fermeture de l'interrupteur, pour $t < 0$, donner les valeurs de u_C , i et $u_{R'}$.
2. À l'instant $t = 0^+$, donner en justifiant les valeurs de u_C , $u_{R'}$ et i .
3. En régime permanent, déterminer les valeurs de i , $u_{R'}$ et u_C . On pourra s'appuyer sur un modèle équivalent au condensateur en régime permanent.

2.4.2 Étude quantitative

Exercice d'application 8 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une maille.

Identifier l'ordre d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et la mettre sous forme canonique.

1. En appliquant la loi des mailles, montrer que la tension $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R'C} = 0.$$

2. Identifier l'ordre de cette équation différentielle. Introduire un temps caractéristique τ pour la mettre sous forme canonique.

Lors de la décharge d'un condensateur, l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et **homogène**.

On souhaite à présent résoudre explicitement l'équation différentielle afin de trouver l'expression mathématique exacte de $u_C(t)$.

Exercice d'application 9 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre.

Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire.

1. Vérifier que la solution de l'équation différentielle est de la forme $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, où A est une constante.

2. En utilisant la valeur de u_C à l'instant $t = 0$, montrer que l'évolution temporelle de la tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit RC en régime libre est de la forme :

$$u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

3. Établir l'équation de la tangente à l'origine.
4. En utilisant une limite connue de la fonction exponentielle, montrer que $u_C(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donner l'équation de l'asymptote horizontale aux temps longs.

5. Déterminer l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote horizontale aux temps longs. En déduire une méthode pour déterminer la constante de temps τ du circuit.

6. Calculer $u_C(t = \tau)$ et en déduire un protocole expérimental pour mesurer la constante de temps τ . Calculer R' en utilisant l'oscillogramme fourni.

7. Calculer $u_C(t = 3\tau)$ puis expliquer pourquoi on parle alors de "**temps de descente à 95%**".

8. Évaluer la durée du régime transitoire dans l'étude expérimentale de la décharge du condensateur ci-dessus.

9. Effectuer un bilan énergétique de la décharge du condensateur.

3 Circuit RL

On reprend l'étude précédente en remplaçant le condensateur par une bobine : on obtient alors un **circuit RL**. L'étude se calque sur celle qui a été faite pour le circuit RC.

On montre que lors de l'**établissement du courant** dans la bobine, l'intensité du courant qui traverse la bobine en convention récepteur vérifie :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{i_\infty}{\tau},$$

où on a introduit une constante de temps

$$\tau = \frac{L}{R}$$

et posé $i_\infty = \frac{E}{R}$.

On se sert de la continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine pour montrer que $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

La solution de l'équation différentielle qui prend en compte cette condition initiale est alors

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Un oscilloscope donne accès à la tension aux bornes de la bobine. En utilisant la relation constitutive de la bobine,

$$u_L = L \frac{di}{dt},$$

on montre alors que

$$u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Lors de la disparition du courant, en convention générateur cette fois-ci,

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et

$$u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Il y a discontinuité de la tension aux bornes de la bobine lors du basculement de l'interrupteur, de la même manière qu'il y avait une discontinuité de l'intensité du courant traversant le condensateur dans le circuit RC.

4 Généralisation : les circuits du premier ordre

L'analogie formelle entre le circuit RC et le circuit RL permet de généraliser les résultats obtenus plus haut à toute une classe de circuits, dits **du premier ordre**.

On note $x(t)$ la grandeur d'intérêt.

La **réponse à un échelon** de la grandeur $x(t)$ dans un circuit du premier ordre vérifie une équation différentielle du premier ordre qui peut être mise sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_{\infty}}{\tau}.$$

La solution est de la forme $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x_{\infty}$.

La **condition initiale** $x(t = 0) = X_0$ permet de trouver la valeur de la **constante d'intégration** A et de montrer que

$$x(t) = (X_0 - x_{\infty})e^{-\frac{t}{\tau}} + x_{\infty},$$

soit

$$x(t) = x_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

dans le cas où $X_0 = 0$.

En **régime libre**, $x(t)$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qui peut être mise sous la forme

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = 0.$$

La solution est de la forme $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

La condition initiale $x(t = 0) = X_0$ permet de trouver la valeur de la constante d'intégration A et de montrer que

$$x(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$