

TD8 : Circuits linéaires du 1er ordre

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

- ▷ Utiliser les relations entre l'intensité et la tension : TLB, ex : tous.
- ▷ Citer des ordres de grandeurs de valeurs de capacités et d'inductances : TLB1, ex3.
- ▷ Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine : TLB1,4, ex6,7.
- ▷ Utiliser un modèle équivalent aux dipôles pour déterminer les grandeurs électriques en régime permanent : TLB3, ex3,6.
 - ▷ Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine : TLB2,3,4, ex : tous.
 - ▷ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles : TLB2,3,4, ex : tous.
 - ▷ Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension : TLB2,3,4, ex : tous.
 - ▷ Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire : TLB4, ex4,5.
 - ▷ Réaliser un bilan énergétique : TLB4, ex6,7.

1 Tester les bases

TLB1 : Capacité et inductance propre

La capacité d'un condensateur dépend de plusieurs paramètres. Si les armatures sont à géométrie circulaire et que la distance qui les sépare est très faible par rapport à leur rayon, on dispose d'une formule approchée de sa capacité :

$$C \simeq \frac{\epsilon S}{e}, \quad (1)$$

où ϵ désigne la **permittivité diélectrique** du milieu entre les armatures : c'est une mesure de sa propension à conduire l'électricité. S désigne la surface en regard sur les deux armatures, et e est la distance qui les sépare. On note $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, où $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ désigne la permittivité diélectrique du vide et $\epsilon_r \geq 1$ une grandeur adimensionnée (sans unité) appelée permittivité relative, qui dépend de la nature du milieu entre les armatures.

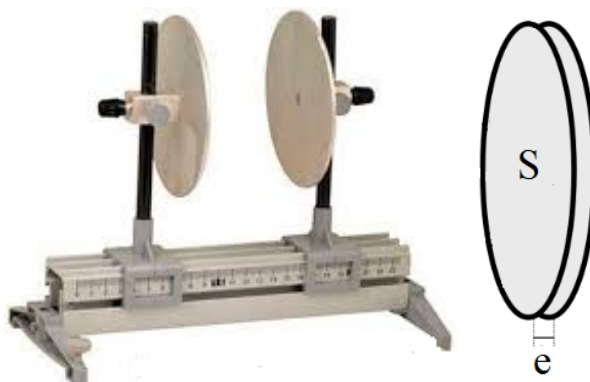


FIGURE 1 — Photographie et représentation schématisée d'un condensateur à armatures circulaires parallèles d'aire S séparées d'une distance e

Une bobine est souvent un **solénoïde** (enroulement de fil conducteur en forme de tuyau cylindrique). On note l la longueur de ce solénoïde, S sa section, et N le nombre de spires jointives qu'il comporte. La densité linéique de spires (nombre de spires par unité de longueur) vaut $n = N/l$.

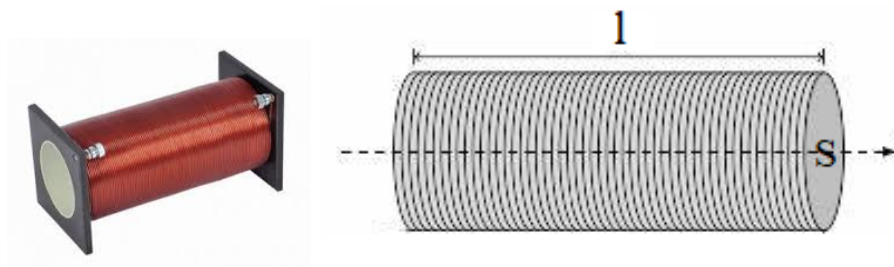


FIGURE 2 – Photographie et représentation schématique d'un solénoïde

On note $\mu = \mu_0 \mu_r$ la **perméabilité magnétique** du milieu contenu dans le solénoïde, où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ désigne la perméabilité magnétique du vide, et $\mu_r \geq 1$ une grandeur adimensionnée appelée perméabilité relative du milieu contenu dans le solénoïde.

Si la bobine est très longue en comparaison de son rayon, son inductance s'exprime ainsi :

$$L \simeq \frac{\mu N^2 S}{l} = \mu n^2 S l. \quad (2)$$

1. Rappeler la définition de la capacité d'un condensateur et de l'inductance d'une bobine qui découle des lois de comportement d'un condensateur et d'une bobine. Vous préciserez la convention utilisée (générateur ou récepteur).

2. Vérifier l'homogénéité des formules (1) et (2) fournies par l'énoncé (autrement dit, que les unités sont compatibles à gauche et à droite du signe =).

3.a. Un condensateur d'Aepinus, dont les armatures sont circulaires, est utilisé dans l'air de permittivité diélectrique $\epsilon_r = 1,0$. Ses armatures sont circulaires de rayon $R = 8,0 \text{ cm}$ et séparées d'une distance $e = 0,5 \text{ cm}$. Calculer sa capacité C et commenter le résultat.

3.b. Calculer l'énergie stockée dans ce condensateur s'il est soumis à une tension $U = 12 \text{ V}$.

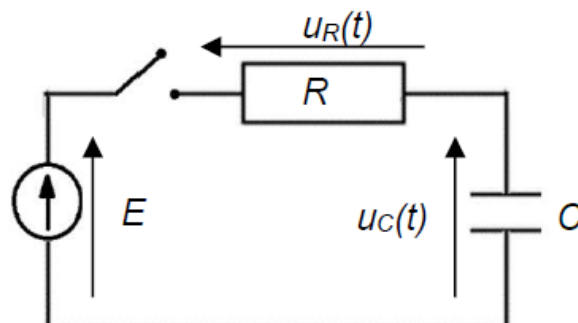
4.a. Une bobine en forme de solénoïde a une longueur $l = 30 \text{ cm}$, un rayon $R = 2,0 \text{ cm}$, et comporte $N = 250$ spires. Calculer son inductance si elle contient de l'air de perméabilité relative $\mu_r = 1,0$, puis si elle contient un barreau de fer de perméabilité relative $\mu_r = 5000$. Commenter les résultats.

4.b. Calculer l'énergie stockée dans la bobine dans chacun des cas, si elle est parcourue par un courant d'intensité $I = 100 \text{ mA}$.

TLB2 : Charge d'un condensateur

On étudie le circuit RC représenté sur la figure ci-dessous avec R la résistance d'un conducteur ohmique, C la capacité du condensateur et E la tension aux bornes du générateur d'une valeur de 200 V .

À la date $t = 0$, l'utilisateur ferme l'interrupteur et déclenche la charge du condensateur de capacité C considéré comme initialement totalement déchargé.



1. À l'aide de la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lors de sa charge est :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}.$$

2. Vérifier que la solution de cette équation différentielle est $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ en précisant l'expression et l'unité de la constante τ .

La figure ci-dessous représente la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lors de la charge en fonction du temps.

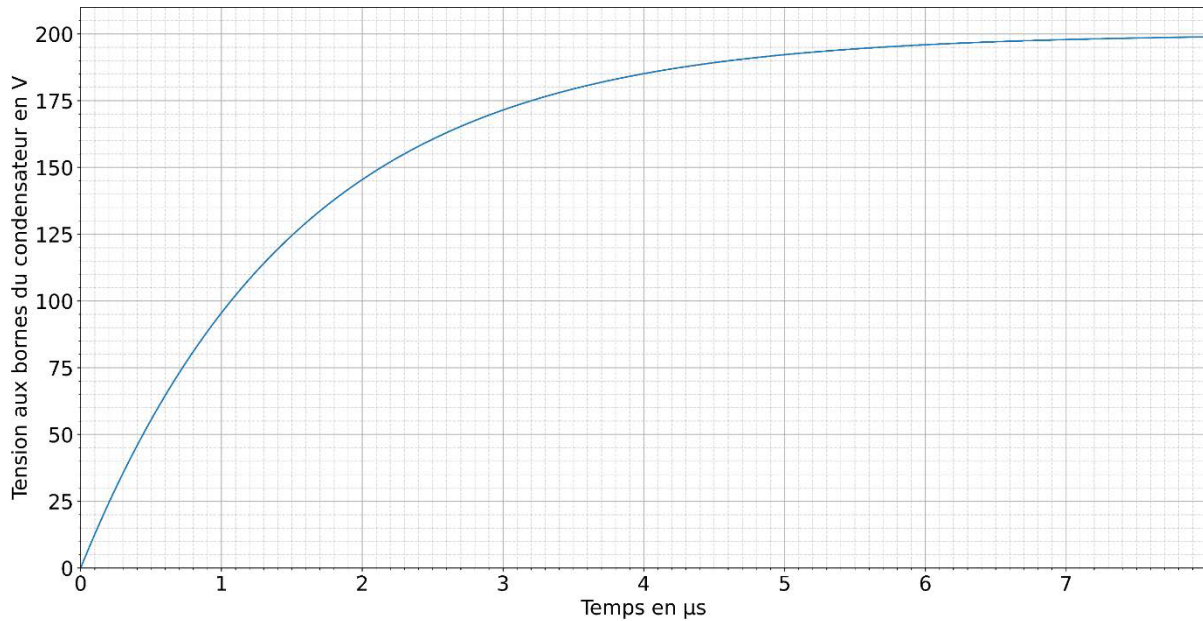
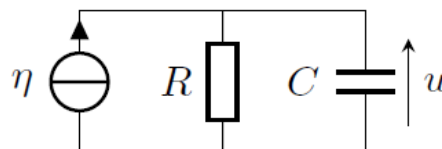


FIGURE 3 – Évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lors de la charge en fonction du temps.

3. Déterminer, à l'aide de la figure ci-dessus, le temps caractéristique τ en expliquant votre démarche.

4. En déduire la capacité C du condensateur sachant que la valeur de la résistance R du conducteur ohmique est égale à $1,0 \times 10^5 \Omega$.

TLB3 : circuit RC soumis à un échelon de courant



Le condensateur est initialement déchargé. La source idéale de courant impose un échelon : $\eta(t) = 0$ si $t < 0$ et $\eta(t) = I_0$ si $t > 0$.

1. Déterminer la tension aux bornes du condensateur $u(0^-)$ avant que le générateur ne soit mis en marche. En déduire $u(0^+)$.

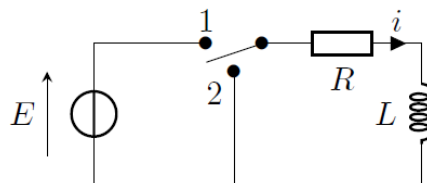
2. En utilisant un modèle équivalent au condensateur, justifier que la tension aux bornes du condensateur aux temps longs, pour $t \rightarrow +\infty$, vaut $u(+\infty) = R\eta$.

3. En appliquant la loi de Kirchhoff appropriée, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ pour $t > 0$ et la mettre sous forme canonique en introduisant une constante de temps τ .

4. Résoudre cette équation différentielle.

5. Tracer l'allure de la représentation graphique de $u(t)$.

TLB4 : Circuit RL



On branche en série un générateur de force électromotrice $E = 5,0V$, un interrupteur trois positions, un résistor de résistance $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et une bobine d'inductance $L = 100 \text{ mH}$. À l'instant $t = 0$, on passe l'interrupteur de la position 1 à la position 2.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ parcourant la bobine.

2. Indiquer, en vous appuyant sur la valeur de la constante de temps, si le régime permanent est atteint au bout de $10\mu s$, $200\mu s$ et $20ms$.

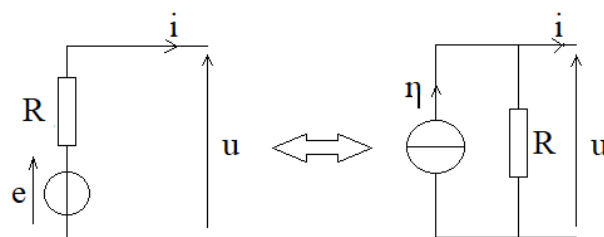
3. Résoudre l'équation différentielle après avoir déterminé les conditions initiales. Tracer l'allure du courant $i(t)$.

4. Montrer que l'énergie initialement stockée dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.

2 Exercices

Exercice 1 : Modèles de Thévenin et de Norton

Il existe deux modèles équivalents pour décrire un générateur usuel : le **modèle de Thévenin** et le **modèle de Norton**. Passer d'une représentation à l'autre, éventuellement plusieurs fois d'affilée, peut être utile pour simplifier des circuits électriques.

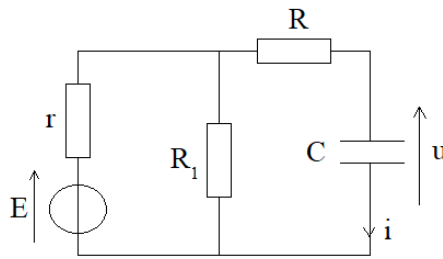


$$\text{Modèle de Thévenin } u = e - R i \quad \text{Modèle de Norton } i = \eta - \frac{u}{R}$$

1. Rappeler ce que représentent e et R dans le modèle du générateur de Thévenin.

2. Justifier que ces deux formules sont équivalentes, avec $e = R\eta$.

On considère le circuit schématisé ci-dessous.



À l'instant $t = 0$, on met le circuit sous tension par l'intermédiaire du générateur antérieurement éteint : le circuit est soumis à un échelon de tension.

1. Déterminer la valeur $i(\infty)$ de l'intensité du courant i en régime établi (= régime permanent atteint après évolution temporelle), en utilisant un modèle électrique équivalent au condensateur.

2. Justifier que le condensateur est initialement déchargé et en déduire la valeur de $u(0^-)$.

3. Justifier que $u(0^+) = u(0^-)$

4. En appliquant deux fois d'affilée l'équivalence Thévenin-Norton, montrer que le circuit est équivalent à un circuit $R'C$ avec $R' = \frac{rR_1}{r+R_1} + R$, alimenté par un générateur de tension idéal de force électromotrice $E' = \frac{R_1 E}{r+R_1}$.

5. En appliquant la loi des mailles au circuit équivalent, montrer que

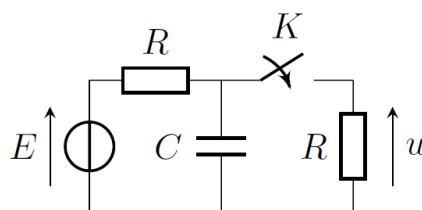
$$i(0^+) = \frac{ER_1}{r(R+R_1) + RR_1}.$$

6. Montrer que l'intensité $i(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$, avec une constante de temps $\tau = R'C$.

7. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $i(t)$.

8. Calculer la constante de temps τ pour $C = 10\mu\text{F}$, $R_1 = 6\text{k}\Omega$, $r = 100\Omega$ et $R = 4\text{k}\Omega$. La comparer à la valeur qu'elle aurait eu si R_1 était infinie et r nulle.

Exercice 2 : Circuit RC à deux mailles



Considérons le circuit représenté ci-dessus, dans lequel l'interrupteur K est brusquement fermé. Le générateur est une source idéale de tension.

Trouver l'expression de la tension u et tracer son allure.

Exercice 3 : Des supercondensateurs pour recharger un bus électrique

Une entreprise française, spécialisée dans les transports électriques, est à l'origine d'une solution innovante qui consiste à remplacer les batteries des bus électriques par des supercondensateurs. Les arrêts de bus sont composés d'une unité, appelée totem, qui contient également des supercondensateurs.

Le principe est le suivant : à chaque arrêt, le bus se connecte de manière automatique et rapide au totem. Le transfert d'énergie électrique entre les supercondensateurs du totem et les supercondensateurs embarqués dans le bus s'effectue alors en environ 10 s.

Cette phase, appelée « biberonnage », doit être parfaitement sécurisée. En effet, l'intensité du courant électrique peut atteindre plusieurs milliers d'ampères en début de transfert.

A. Étude d'un supercondensateur

Chaque supercondensateur utilisé dans le totem a une tension nominale E . Il s'agit de la tension atteinte lorsque le supercondensateur de capacité C est totalement chargé. Après avoir chargé complètement un supercondensateur sous sa tension nominale E , on le place dans le circuit schématisé sur la figure ci-dessous.

À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur K en position fermée.

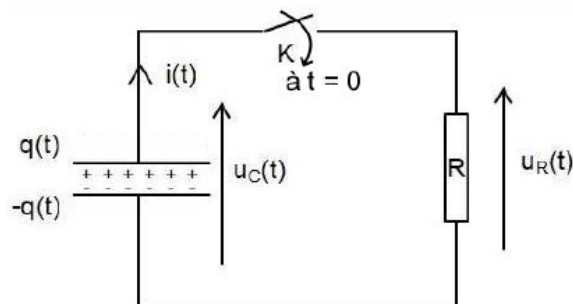


Schéma du circuit électrique de décharge d'un supercondensateur

On désigne par $q(t)$ la charge électrique portée par l'armature positive du condensateur à l'instant t comme indiqué sur le schéma du circuit.

Données :

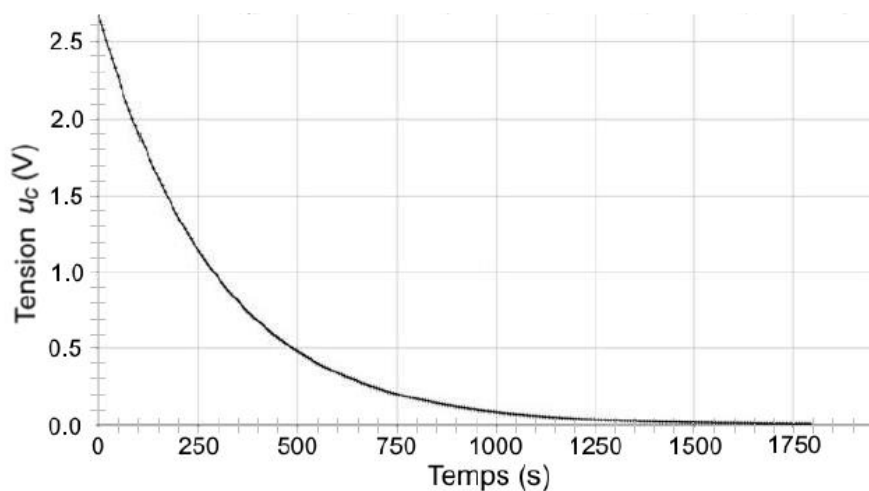
- valeur initiale de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(0) = E = 2,7V$;
- valeur de la résistance : $R = 100 \pm 2m\Omega$ où ce qui suit le signe $\pm$ est l'incertitude-type.

A.1. Justifier que l'intensité $i(t)$ s'exprime par : $i(t) = -C \frac{du_C}{dt}$.

A.2. En déduire que la tension $u_C(t)$ obéit à l'équation différentielle : $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$.

A.3. Résoudre cette équation différentielle.

Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer l'évolution de la tension $u_C(t)$ lors de la décharge du supercondensateur. On obtient alors la courbe suivante :



A.4. Déterminer le temps caractéristique τ de la décharge. Faire apparaître la construction graphique réalisée sur la courbe.

A.5. En déduire la valeur de la capacité du supercondensateur utilisé dans cette étude. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

L'incertitude-type $u(C)$ sur la capacité C peut se calculer à partir de la relation :

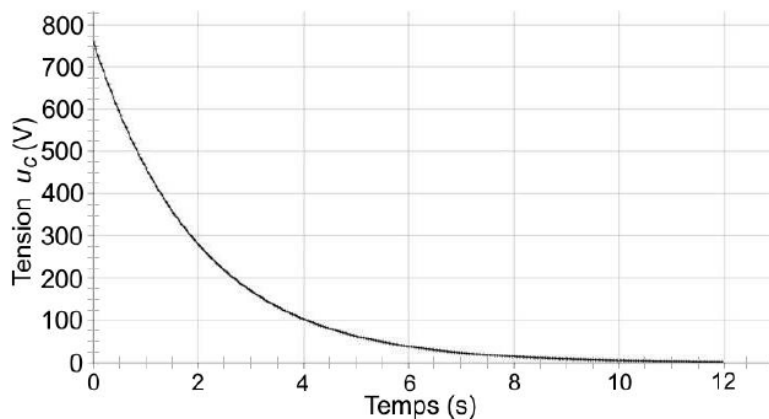
$$u(C) = C \sqrt{\left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2}.$$

A.6. Calculer $u(C)$ et exprimer le résultat de la mesure avec son incertitude-type. Comparer la valeur expérimentale à la valeur de référence annoncée par le constructeur $C_{ref} = 3000F$.

B. Étude du totem

Le totem contient une association d'un grand nombre de supercondensateurs. Cette association se comporte comme un unique condensateur, appelé condensateur totem, de capacité notée $C_{totem} = 20F$. La tension nominale du condensateur totem a pour valeur $E_{totem} = 760V$.

La courbe ci-après représente l'évolution temporelle de la tension u_C lors de la décharge du condensateur totem dans une résistance.



B.1. Déterminer la valeur de l'intensité maximale I_{max} lors de la phase de décharge. Commenter.

Pour recharger le condensateur totem, on utilise le réseau électrique fournissant une puissance supposée constante de valeur 9,0 kW.

B.2. Estimer le délai minimal à respecter entre le passage de deux bus au totem.

Exercice 4 : défibrillateur cardiaque implantable

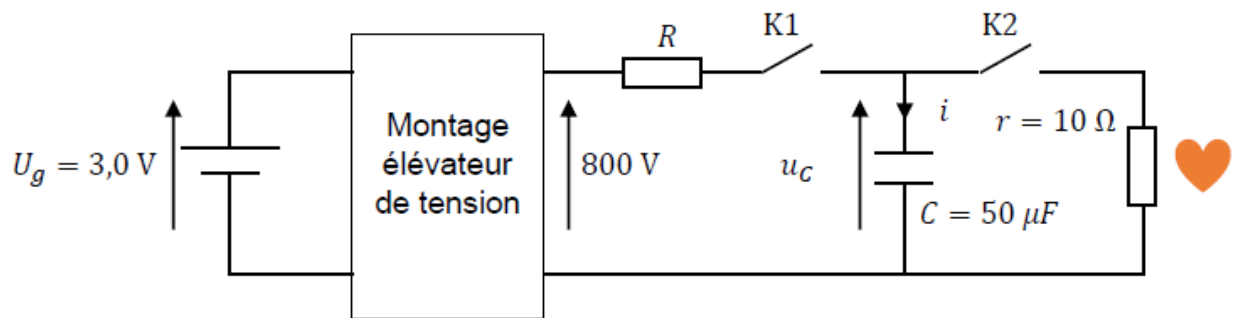
La défibrillation est une méthode utilisée afin de régulariser le rythme cardiaque. Elle consiste à appliquer un « choc électrique » très bref au cœur du patient.

Un défibrillateur interne est un petit boîtier qui est implanté dans le thorax du patient.

Ce boîtier comporte trois éléments fondamentaux :

- une pile au lithium permettant l'apport d'énergie nécessaire au fonctionnement du dispositif. Cette pile délivre une tension à vide $U_g = 3,0V$;
- des circuits électroniques permettant entre autres choses d'analyser le rythme cardiaque du patient, de reconnaître des troubles et de déclencher un choc en cas de nécessité ;
- des condensateurs qui permettent de stocker l'énergie qui sera délivrée lors d'un choc ;
- des électrodes qui relient le dispositif au cœur du patient.

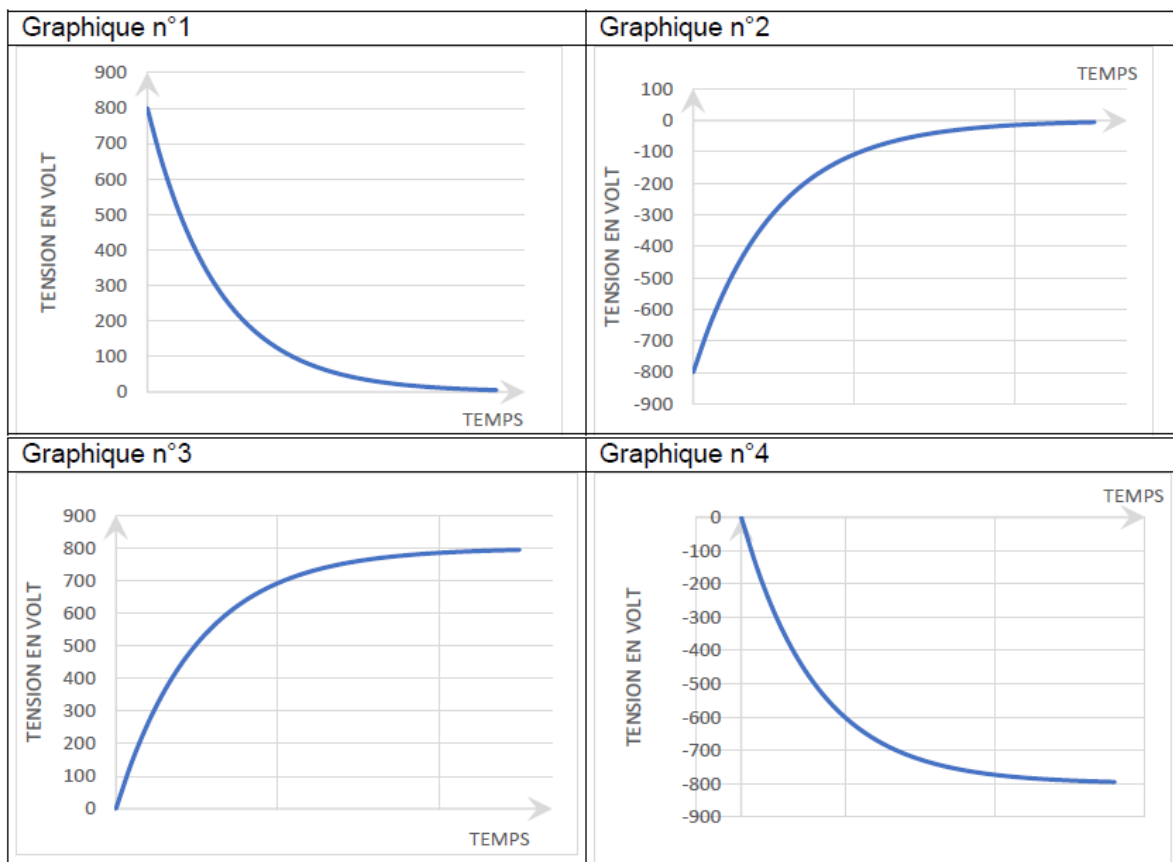
Le défibrillateur peut être modélisé par le circuit ci-dessous.



Le fonctionnement du défibrillateur se décompose en deux phases :

- dans la première phase, l'interrupteur K_1 est fermé pendant que K_2 est ouvert ; au début de cette phase, pris comme origine des temps, le condensateur est déchargé ;
- dans la seconde phase, l'interrupteur K_2 est fermé pendant que K_1 est ouvert ; c'est dans cette phase que le choc a lieu. La résistance r modélise le comportement électrique du cœur.

Les quatre graphiques ci-dessous représentent des évolutions possibles de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



1. Déterminer celui qui correspond à la première phase de fonctionnement.

À l'issue de la première phase, la charge du condensateur étant terminée, on passe à la deuxième phase de fonctionnement.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ lors de cette seconde phase.
3. À la date t_1 l'interrupteur K_2 est fermé. Vérifier que la solution de cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme : $u_C(t) = Ae^{-(t-t_1)/\tau}$.
Exprimer le temps caractéristique τ en fonction de r et C et calculer sa valeur.
4. Déterminer la valeur de la constante d'intégration A sachant qu'à l'instant $t = t_1$, la tension aux bornes du condensateur $u_C(t_1)$ vaut 800V.
5. Estimer la durée approximative du « choc électrique ». Commenter.
6. Donner l'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps lors d'un cycle complet charge - décharge du condensateur.

Exercice 5 : Modélisation d'un capteur capacitif d'humidité

Correctement calibré, un système d'arrosage automatique de végétaux permet un arrosage homogène, à un moment opportun et sans gaspillage d'eau. À cet effet, il peut être déclenché grâce à l'utilisation d'un détecteur capacitif d'humidité du sol.

Le détecteur capacitif d'humidité est modélisé par un condensateur plan, dont la capacité C varie en fonction de l'humidité du sol. Il est constitué de deux armatures métalliques de surface $S = 1,0 \times 10^{-1} \text{ m}^2$, séparées d'une distance $d = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}$, plantées dans un sol de permittivité diélectrique ϵ :

La capacité C (en farad F) du condensateur s'exprime en fonction de la surface S (en m^2) de ses armatures, de la distance d (en m) qui les sépare et de la permittivité diélectrique du sol ϵ (en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$) par la relation :

$$C = \frac{\epsilon S}{d}.$$

1. Par analyse dimensionnelle, vérifier que la relation ci-dessus est homogène.
2. En vous appuyant notamment sur la courbe ci-dessous, prévoir qualitativement le sens de variation de la capacité C du détecteur capacitif d'humidité quand la teneur en eau d'un sol argileux augmente.

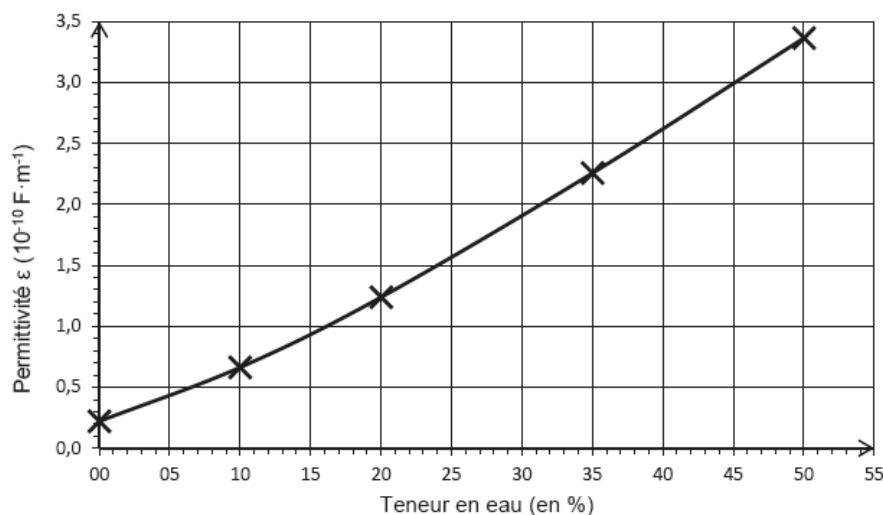
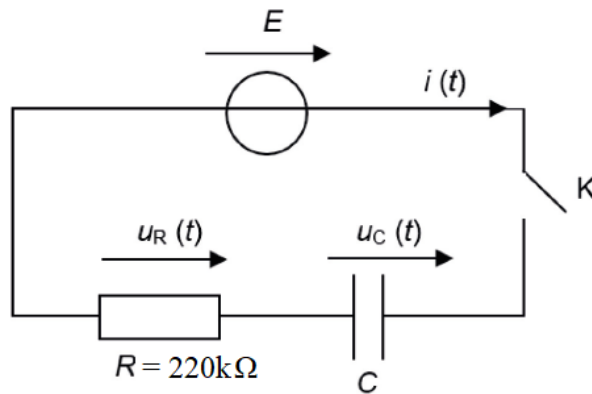


FIGURE 4 – Permittivité du sol en fonction de la teneur en eau du sol. On appelle teneur en eau le pourcentage volumique $p_{\text{H}_2\text{O}}$ d'eau dans le sol

Le condensateur de capacité C , modélisant le détecteur, est initialement déchargé. Il est branché en série avec un générateur délivrant une tension constante E , un interrupteur K et un conducteur ohmique de résistance R . Le circuit RC ainsi constitué est représenté ci-dessous :



À l'instant $t = 0$, on ferme brusquement l'interrupteur.

3. Montrer que la tension u_C aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle ci-dessous. Exprimer littéralement le temps caractéristique τ du circuit en fonction de R et C .

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$

4. Justifier que $u_C(t = 0^+) = 0$.

5. Vérifier que la fonction $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ est solution de l'équation différentielle, et qu'elle satisfait à la condition imposée à l'instant $t = 0$.

6. Montrer que $u_C(\tau) = 0,63 \times E$.

La mesure du temps caractéristique τ du circuit RC permet d'accéder à la valeur de la teneur en eau du sol.

Cette mesure est réalisée à l'aide d'un microcontrôleur connecté au circuit RC décrit ci-dessus, qui permet entre autres :

- de commander des alternances charge – décharge du condensateur ;
- de mesurer la tension aux bornes du condensateur ;
- d'afficher, après calcul, la valeur de la teneur en eau.

On enregistre l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur à l'aide du microcontrôleur. Il réalise un traitement automatique des données s'appuyant sur un programme, écrit en langage Python, dont une partie est donnée ci-dessous :

```
1 # Arrosage automatique pour un sol argileux
2 E = 5.0
3 tension = 0                                     # définition de la tension aux bornes du condensateur
4 t_i = time.time()                               # définition de l'instant initial

5 while tension < [ ]                             # boucle et condition
6 float tension = analogRead(A0) * (5.0 / 1023.0) # transforme la mesure du microcontrôleur en tension

7 t_f = time.time()                               # mesure de l'instant final
8 tau = t_f - t_i
9 print("valeur de tau en ms :", tau)             # affichage d'une valeur sur l'écran
```

On rappelle que la commande « while » associée à une condition permet de créer une boucle qui répète la liste d'instructions qui suit, tant que la condition est satisfaite.

7. Indiquer l'objectif final de cet extrait de programme.

8. Recopier la ligne 5 du programme sur votre copie et compléter la condition sur la valeur de la tension aux bornes du condensateur.

Le détecteur est inséré dans un sol argileux. La teneur en eau doit y être comprise entre 24% et 38% pour qu'une plante puisse y avoir une croissance normale.

Le programme renvoie le résultat suivant :

valeur de tau en ms : 0,28676887987

9. Déterminer si la teneur en eau dans ce sol argileux est suffisante pour qu'une plante puisse y avoir une croissance normale.

Exercice 6 : réponse impulsionnelle d'une bobine (CCS 2024)

Du point de vue électrocinétique, un solénoïde peut être modélisé par l'association en série d'une bobine parfaite d'inductance propre L et d'une résistance électrique r .

Le solénoïde est alimenté par une source idéale de tension qui délivre le signal $u(t)$ représenté sur la figure ci-dessous. Ce signal est une impulsion d'amplitude $E = 20\text{V}$ qui dure de $t = 0$ à $t = t_0 = 20\text{ ms}$.

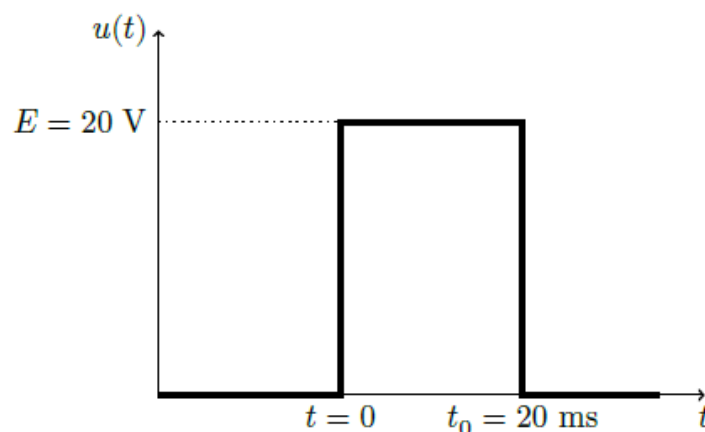
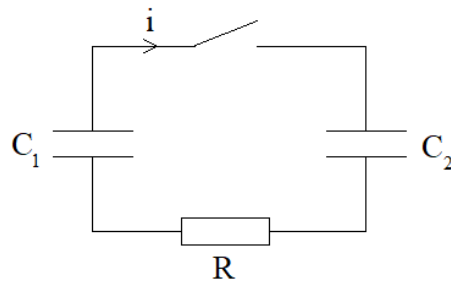


FIGURE 5 – Signal $u(t)$ alimentant un solénoïde

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le solénoïde pendant l'intervalle de temps $[0, t_0]$.
2. Sachant que $i(t = 0^-) = 0$, justifier à l'aide d'un argument énergétique la valeur de $i(t = 0^+)$.
3. Établir l'expression de $i(t)$ pendant l'intervalle de temps $[0, t_0]$.
4. On donne $r = 12\Omega$. Déterminer la condition que doit vérifier l'inductance propre L du solénoïde pour que le régime transitoire ne perturbe pas le fonctionnement du système.
On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite de l'exercice.
5. Déterminer l'expression de $i(t)$ pour $t \geq t_0$.
6. Tracer l'allure de $i(t)$ pendant l'intervalle de temps $[0, 2t_0]$. Faire apparaître sur la figure le temps caractéristique du régime transitoire des deux régimes transitoires.
7. Exprimer l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans le solénoïde pour $t \geq 0$ en fonction de E , r et t_0 en supposant négligeable la durée des régimes transitoires.

Exercice 7 : décharge d'un condensateur dans un autre



On considère le circuit suivant :

Le condensateur de capacité C_1 porte la charge q_0 sur l'armature du haut, et celui de droite de capacité C_2 est déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$.
2. Déterminer la solution de cette équation différentielle.
3. Quelles sont les charges des deux condensateurs au bout d'un temps très long ($t \rightarrow +\infty$) ? Commenter.
4. Que vaut l'énergie du système E_0 avant la fermeture de l'interrupteur ? Quelle est sa valeur E_∞ après fermeture, au bout d'un temps très long ? Commenter.
5. Sous quelle forme l'énergie s'est-elle dissipée ? Faire le calcul direct de cette énergie et retrouver la variation d'énergie $E_\infty - E_0$.
6. L'expression de ces variations d'énergie ne dépend pas de R , elle est donc inchangée si R est nulle. Mais dans ce cas, où est passée l'énergie ?

3 Résolution de problème :

On considère un circuit RC avec $R = 1,0\text{k}\Omega$ et $C = 1,0\mu\text{F}$. Le condensateur, initialement chargé, possède une tension à ses bornes $u_C(0) = E$. On laisse le circuit évoluer en régime libre.

Sachant que le condensateur est considéré comme déchargé dès que la charge portée par les armatures ne vaut plus que 1% de sa valeur initiale, calculer la durée nécessaire à la décharge du condensateur.