CHAPITRE 12

Cinématique du point matériel

En physique, la **mécanique** désigne l'étude du mouvement des systèmes matériels (constitués de matière). Développée sous sa forme moderne à partir du 17^e siècle, elle permet de décrire et prévoir le mouvement des objets du quotidien.

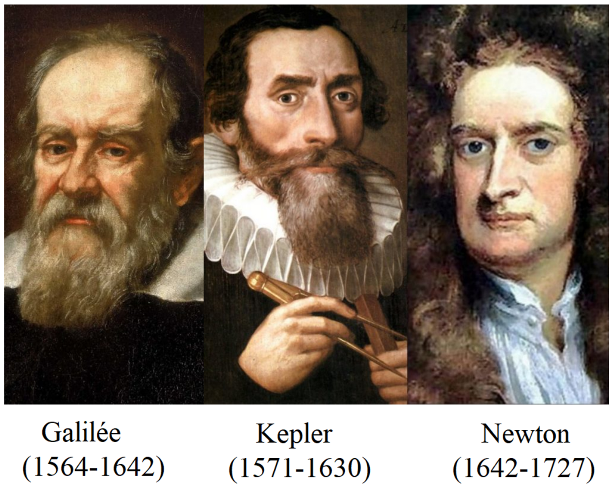


FIGURE 1 – Portraits de trois grands noms associés à la mécanique classique

La **cinématique** est la branche de la mécanique qui décrit le mouvement sans s'occuper de ses causes.

Dans ce chapitre, nous introduirons des concepts et outils mathématiques qui permettent de décrire le mouvement d'un système matériel modélisé par un point.

1 Cadre de l'étude

1.1 Hypothèses de travail

Nous nous plaçons dans le cadre de la **mécanique classique** (aussi qualifiée de newtonienne), dont les principales hypothèses sont les suivantes :

— Le temps est absolu : il s'écoule au même rythme partout, dans tous les référentiels.

— L'espace est euclidien (modélisation classique de l'espace environnant), **homogène** (mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (pas de direction privilégiée).

— La mécanique est une théorie **déterministe** : le comportement d'un système mécanique est prévisible ; deux objets identiques, placés dans des conditions identiques (mêmes conditions initiales et forces appliquées identiques) auraient un mouvement identique.

La mécanique classique n'est valide que si la vitesse du système étudié reste très inférieure à la célérité c de la lumière dans le vide (sinon, il faut utiliser la relativité restreinte), qu'on se trouve loin d'astres supermassifs qui déforment l'espace-temps (sinon, il faut utiliser la relativité générale) et qu'on étudie le mouvement à l'échelle macroscopique (à l'échelle atomique ou subatomique, il faut utiliser la mécanique quantique).

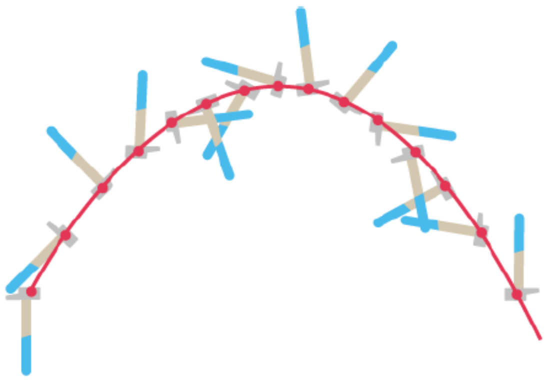
1.2 Système

En mécanique, le **système** (Σ) est le corps étudié. Tout le reste de l'espace est le milieu extérieur, aussi appelé environnement.

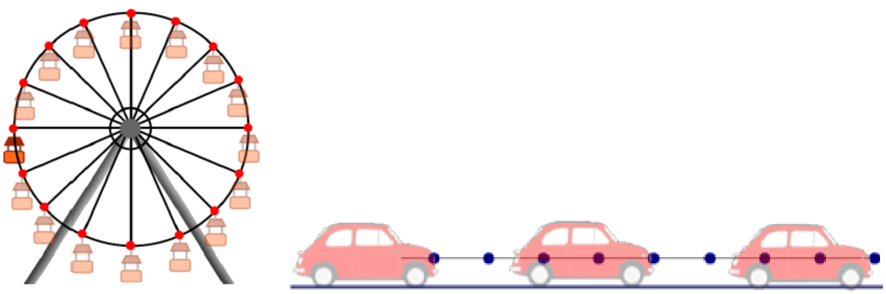
En **mécanique du point**, on modélise le système par un **point matériel** M (généralement son **centre de masse**, aussi appelé **barycentre**).

En modélisant un système par un point, on perd l'information sur ses déformations et une éventuelle **rotation**, qui ne peuvent être décrites qu'en considérant plusieurs points du système. On ne perd en revanche aucune information s'il est en **translation**, autrement dit s'il se déplace sans changer d'orientation.

Par exemple, l'étude du mouvement du centre de masse d'un marteau ne donne aucune information sur le mouvement de rotation de l'ensemble du marteau.



En revanche, pour décrire le mouvement de la carosserie d'une voiture ou d'une nacelle d'une grande roue, on peut se contenter de décrire celui d'un seul point.

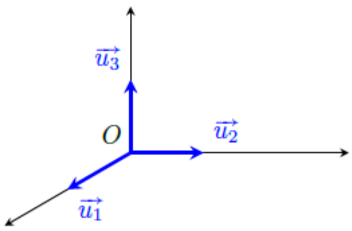


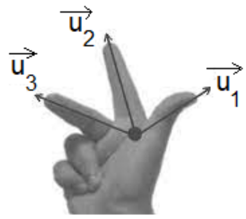
1.3 Mesures de distances et de durées

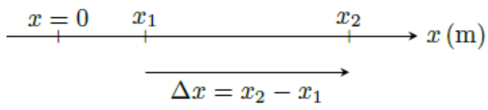
1.3.1 Repérage dans l'espace : mesures de distances

Un **repère** (**d'espace**, ou **spatial**) est un objet mathématique constitué d'un point **origine** fixe noté O et d'un système d'axes, avec une unité de mesure spatiale (le mètre dans le système international d'unités). Il permet de repérer la position d'un point matériel dans l'espace.

Généralement, la base utilisée pour orienter les axes est **orthonormée directe** : on se donne 3 vecteurs unitaires (leur norme vaut 1) orthogonaux entre eux et orientés avec la règle de la main droite. Une rotation de l'espace permet de superposer ces trois vecteurs et les trois premiers doigts de la main droite.





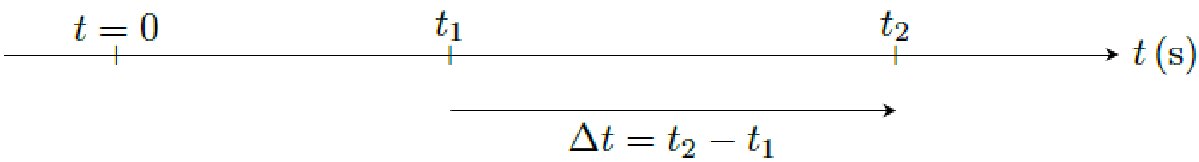


La distance algébrique Δx parcourue par un point matériel lors de son mouvement le long d'un axe (Ox) est la différence des coordonnées des positions finale et initiale.

1.3.2 Repérage dans le temps : mesures de durées

Un **repère de temps**, ou **repère temporel**, est constitué d'une **origine des dates** $(t = 0)$ fixée arbitrairement, et d'une **horloge**, avec une unité de mesure temporelle (la seconde dans le système international d'unités). Il permet d'associer une date à un événement.

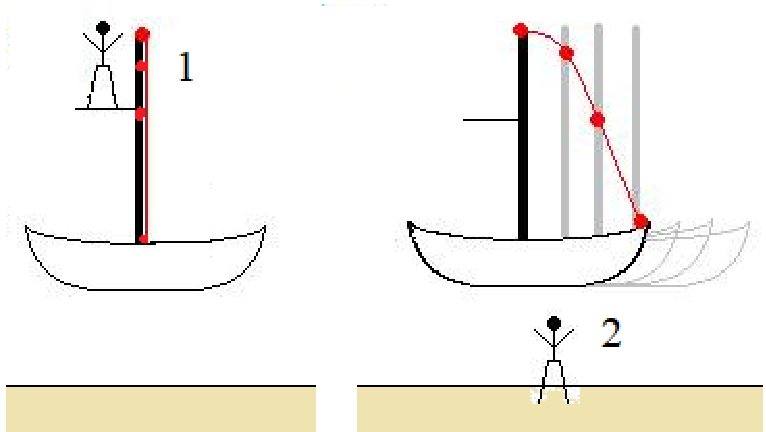
L'axe temporel est orienté dans le sens correspondant au temps qui s'écoule, de sorte que les durées Δt des mouvements sont positives.



1.4 Référentiel et relativité du mouvement

Le mouvement absolu n'existe pas : un système est toujours en mouvement par rapport à quelque chose. On dit du mouvement qu'il est **relatif**.

La situation suivante illustre la **relativité du mouvement** :



▹ Un marin, en haut du mât d'un navire en mouvement à vitesse constante par rapport au quai, lâche une balle (il la laisse tomber sans lui donner de vitesse initiale) et observe son mouvement. De son point de vue (1), la balle tombe verticalement. Elle se retrouve au pied du mât à l'issue de son mouvement.

▹ Du point de vue d'un marin resté à quai (2), et qui observe le même mouvement, la balle va aussi se retrouver au pied du mât à la fin de son mouvement. Toutefois, sa trajectoire n'est pas rectiligne, mais une courbe en forme de parabole.

Pour pouvoir étudier le mouvement d'un système sans ambiguïté, il est donc nécessaire de préciser le point de vue adopté.

En physique, la notion de point de vue est traduite par le concept de référentiel. Un **référentiel** $(\mathscr{R})$ est un solide de référence auquel on associe un repère spatial et un repère temporel.

	Référentiel de Kepler (héliocentrique)	**Référentiel géocentrique**	**Référentiel terrestre (laboratoire)**
Origine O (fixe)	Centre de masse du Soleil	Centre de masse de la Terre	Un point de la surface de la Terre.
Axes	Trois axes de directions fixes, car pointent vers 3 étoiles lointaines, supposées fixes.	Trois axes de directions fixes, car pointent vers 3 étoiles lointaines, supposées fixes.	Directions « fixes », mais qui suivent la Terre dans son mouvement.
Utilisation	Étude des mouvements des planètes autour du Soleil	Étude des mouvements des satellites autour de la Terre	Étude des mouvements à la surface de la Terre

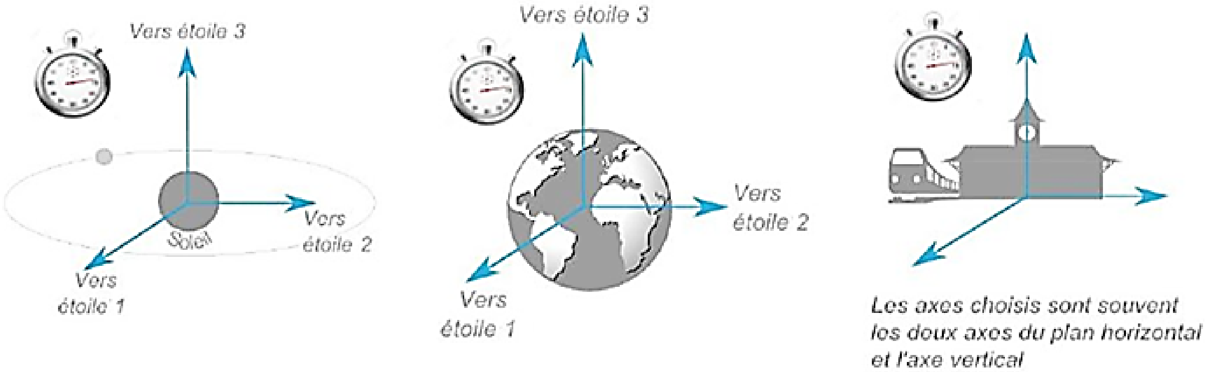


FIGURE 2 – Exemples de référentiels usuels

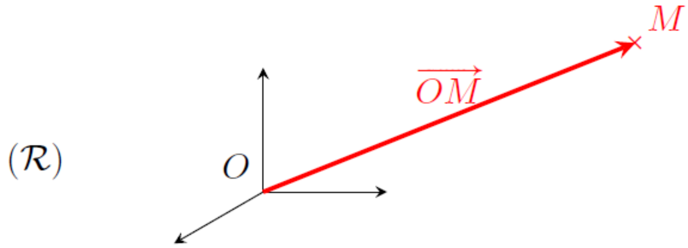
2 Description du mouvement d'un point

Dans un référentiel $(\mathscr{R})$, les principales grandeurs physiques utilisées pour décrire le mouvement d'un point matériel M sont :
— le **vecteur position** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$;
— le **vecteur vitesse** $\vec{v}$, qui traduit l'évolution temporelle du vecteur position ;
— le **vecteur accélération** $\vec{a}$, qui traduit l'évolution temporelle du vecteur vitesse.

Plus rigoureusement, les vecteurs vitesse et accélération devraient être notés $\vec{v}(\mathrm{M}/\mathscr{R})$ et $\vec{a}(\mathrm{M}/\mathscr{R})$ pour indiquer qu'ils se rapportent au point M et sont calculés par rapport au référentiel $(\mathscr{R})$, mais cela alourdirait les notations.

2.1 Position

2.1.1 Vecteur position



Dans un référentiel $(\mathscr{R})$, le **vecteur position** du point M est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On peut le définir au choix par :

▷ sa **direction**, son **sens** et sa **norme** ;

▷ ses trois **composantes**, qui sont les **coordonnées** du point M dans le repère d'espace choisi.

Le vecteur position donne des instructions pour atteindre le point M en partant du point O. C'est une fonction de la variable temps : ses caractéristiques évoluent au cours du mouvement.

2.1.2 Trajectoire

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$, la **trajectoire** du point M est la courbe décrite par ce point au cours de son mouvement. C'est l'ensemble des points de l'espace successivement occupés par le point M au cours du mouvement.

On oppose traditionnellement les trajectoires **rectiligne** (mouvement en ligne droite) et **curviligne** (mouvement suivant une courbe).

Les exemples les plus courants de trajectoires curvilignes sont les trajectoires **parabolique** (en forme de portion de parabole), **circulaire** (en forme de cercle ou d'arc de cercle) et **elliptique** (en forme d'ellipse ou d'arc d'ellipse).

2.1.3 Équations horaires du mouvement

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$, l'évolution temporelle du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ est décrite par les **équations horaires du mouvement**.

Pour un point M repéré par ses trois coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $(\mathrm{O}; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, les équations horaires du point M forment un système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 = f(t) \\ x_2 = g(t) \\ x_3 = h(t) \end{cases}$$ où t désigne la variable temps et f, g et h sont trois fonctions.

2.1.4 Vecteur déplacement et déplacement élémentaire

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$, le vecteur position du point M, entre un instant initial t et un instant final $t+\Delta t$, évolue entre $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\Delta t)$. Le **vecteur déplacement** entre ces deux instants est défini par : $\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\Delta t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$.

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$, pour une **durée élémentaire** dt (durée Δt infiniment courte), le vecteur position du point M évolue entre $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+dt)$, donc le **vecteur déplacement élémentaire** est : $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+dt) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$.

2.2 Vecteur vitesse

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$, le **vecteur vitesse (instantanée)** du point M est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, calculée dans $(\mathscr{R})$.

Mathématiquement, il s'agit de la limite du taux de variation du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ lorsque la durée Δt tend vers zéro :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta t}\right) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}(t).$$

Le vecteur vitesse dépend du choix du référentiel mais pas de celui de l'origine O. Il renseigne sur les variations du vecteur position.

À chaque instant, le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est tangent à la trajectoire car il est colinéaire au vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}\mathrm{d}t$, et orienté dans le sens du mouvement.

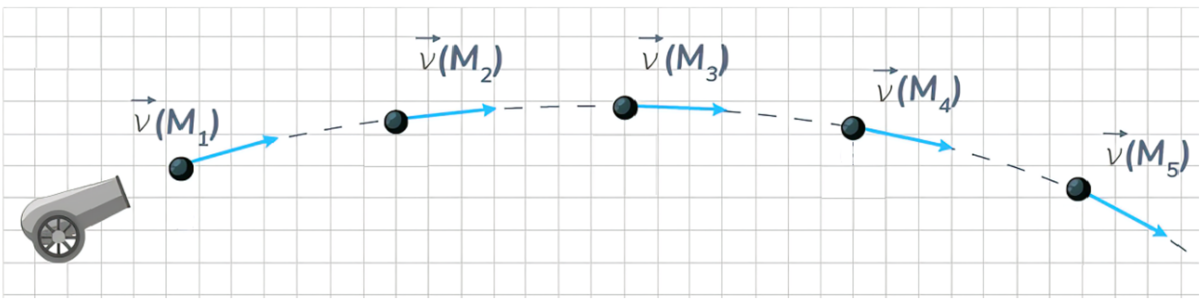


FIGURE 3 – Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire

▷ Si le vecteur vitesse est constant en norme au cours du temps, le mouvement du point est **uniforme** : il se fait à vitesse de valeur constante. Les distances parcourues pendant des temps égaux sont égales.

▷ S'il est constant en direction au cours du temps, le mouvement du point est **rectiligne**, et la trajectoire est une droite ou un segment de droite.

Notons enfin que souvent, par abus de langage, le vecteur vitesse est appelé "vitesse". Attention néanmoins à bien faire la différence entre **vecteur vitesse** et **norme du vecteur vitesse** : $\vec{v} \neq ||\vec{v}|| = v$.

2.3 Vecteur accélération

Dans le référentiel ($\mathscr{R}$), le **vecteur accélération (instantanée)** du point M est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse $\vec{v}$, calculée dans ($\mathscr{R}$).

Mathématiquement, il s'agit de la limite du taux de variation du vecteur vitesse $\vec{v}$ lorsque la durée Δt tend vers zéro.

Il s'agit aussi de la dérivée seconde, par rapport au temps, du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}.$$

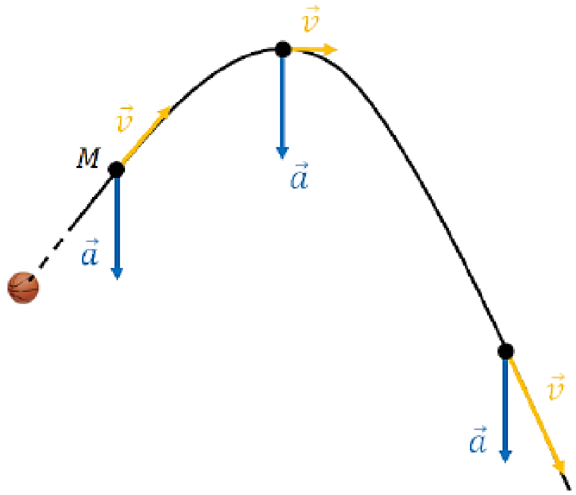
Tout comme le vecteur vitesse, le vecteur accélération dépend du choix du référentiel mais pas de l'origine.

Il est utile de retenir quelques propriétés importantes du vecteur accélération :

▹ Si la trajectoire est courbée, le vecteur accélération instantanée $\vec{a}$ est orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (intérieur de la courbe).

▹ Le signe du produit scalaire du vecteur accélération et du vecteur vitesse, qui dépend de l'angle entre ces deux vecteurs, indique si le mouvement est accéléré ($\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$), passe par un extremum de vitesse ($\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$) ou est décéléré ($\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$).

Exemple : mouvement du centre de masse d'un ballon de basket.



▹ Si la trajectoire est plane, le vecteur accélération peut être décomposé en une composante tangente à la trajectoire (accélération tangentielle), traduisant la variation de la norme de la vitesse, et une composante orthogonale à la trajectoire (accélération normale), traduisant la variation de la direction de la vitesse.

3 Systèmes de coordonnées

Pour aller plus loin, il faut à présent choisir les trois vecteurs de base du repère d'espace d'origine O pour pouvoir définir des **coordonnées** du point M.

3.1 Repérage cartésien - coordonnées cartésiennes

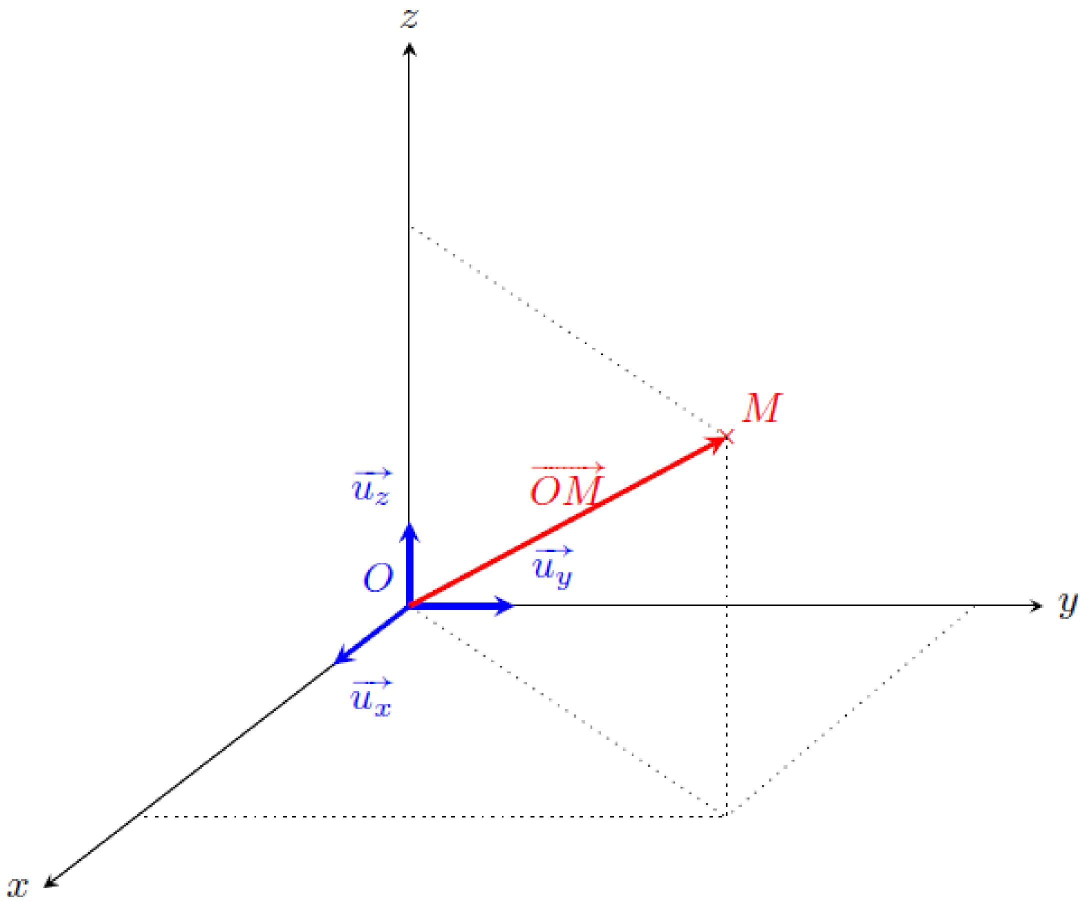
Un repère cartésien est défini par un système d'axes orthogonaux d'origine O.

Ce système d'axes est défini par $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}_x,\,\vec{u}_y,\,\vec{u}_z)$, où $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont les **vecteurs unitaires** (autrement dit, de norme 1) orientant ces trois axes. Ces trois vecteurs sont fixes dans le référentiel $(\mathscr{R})$ et forment un trièdre direct.

Dans la base cartésienne $(\vec{u}_x,\,\vec{u}_y,\,\vec{u}_z)$, le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Le triplet (x, y, z) correspond aux **coordonnées cartésiennes** du point M :
- ▷ x$\in]-\infty,+\infty[$ est l'**abscisse** de M.
- ▷ y$\in]-\infty,+\infty[$ est l'**ordonnée** de M.
- ▷ z$\in]-\infty,+\infty[$ est la **cote** de M.



Le déplacement élémentaire a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z,$$

conformément au fait qu'il existe trois **degrés de liberté** indépendants suivant des axes orthogonaux (Ox), (Oy) et (Oz).

La règle pour dériver un vecteur $\vec{\mathrm{A}}$ en coordonnées cartésiennes est la suivante : si $\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_x\vec{u}_x + \mathrm{A}_y\vec{u}_y + \mathrm{A}_z\vec{u}_z$, alors $\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{d\mathrm{A}_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\mathrm{A}_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\mathrm{A}_z}{dt}\vec{u}_z$. Elle découle du fait que les vecteurs unitaires sont supposés fixes dans le référentiel $(\mathscr{R})$.

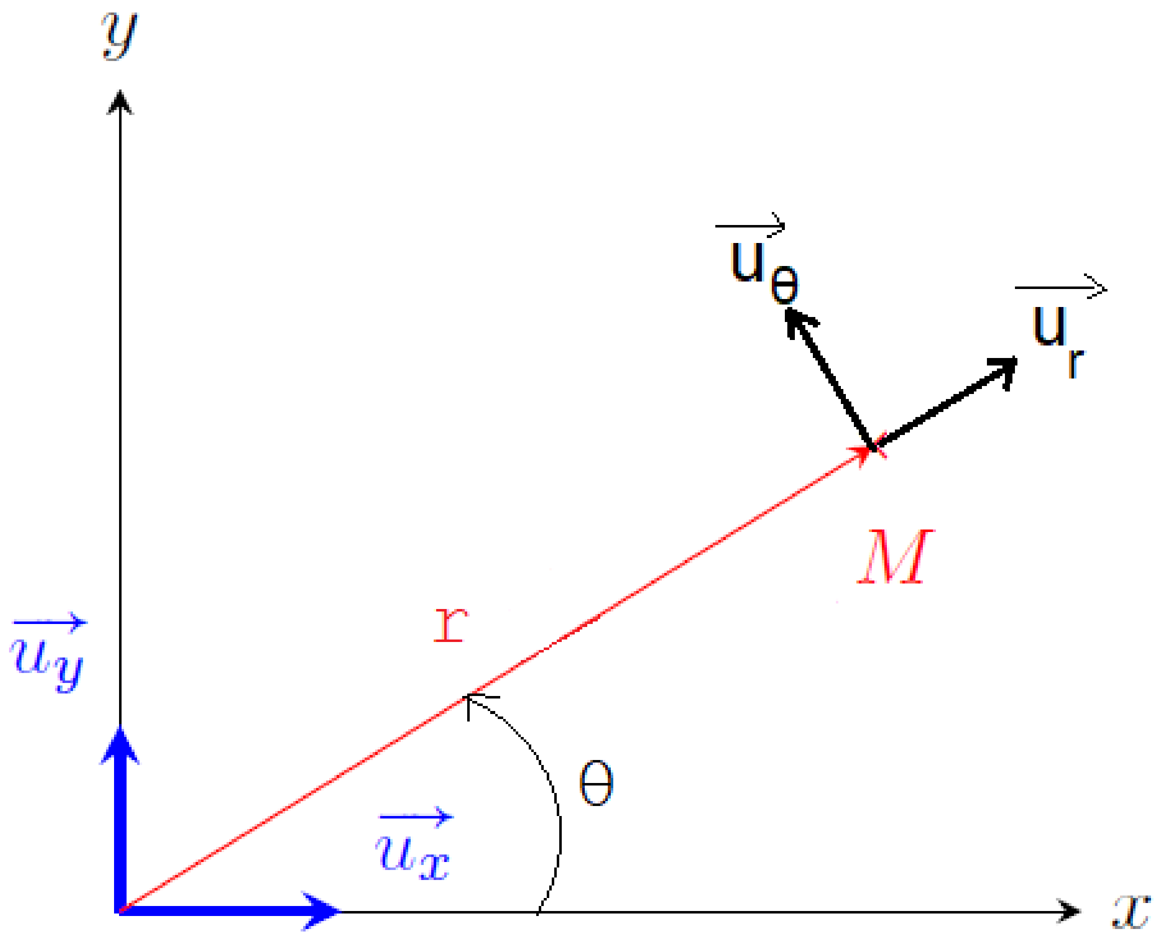
On en déduit l'expression des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z.$$

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z = \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{u}_z = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z.$$

3.2 Repérage dans le plan, coordonnées polaires

Si le mouvement a lieu dans un plan (Oxy), le **repère polaire** est défini par un système d'axes orthogonaux centrés sur le point mobile M, dirigés par des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, qui forment la **base polaire**.



Par définition,

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{||\overrightarrow{\mathrm{OM}}||} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{r},$$

tandis que $\vec{u}_\theta$ lui est orthogonal et dirigé dans le sens des θ croissants, avec θ l'angle entre $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_r$.

La direction de $\vec{u}_r$ est dite **radiale** et celle de $\vec{u}_\theta$ est **orthoradiale**.

Dans la base polaire ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$), le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{u}_r,$$

avec $\vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta)$.

Le couple (r, θ) correspond aux **coordonnées polaires** du point M.

Le théorème de Pythagore permet de faire le lien entre les coordonnées cartésiennes x et y et la coordonnée radiale r en coordonnées polaires :

$$r = \mathrm{OM} = ||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En coordonnées polaires, le vecteur déplacement élémentaire a pour expression :

$$d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta,$$

en accord avec le fait qu'il existe deux degrés de liberté indépendants qui sont r et θ.

En faisant les projections adéquates, on montre que les vecteurs de la base mobile ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$) s'expriment en fonction des vecteurs de la base cartésienne fixe ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$) de la façon suivante :

$$\vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$$

et

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y.$$

Pour vérifier la cohérence de ces deux formules en cas de doute, on peut effectuer trois tests :
- ▹ vérifier que $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$, qui traduit le fait que ces vecteurs sont orthogonaux ;
- ▹ s'assurer, en calculant leur norme, que ce sont bien des vecteurs unitaires ;
- ▹ vérifier l'accord avec les cas particuliers simples $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple.

Les vecteurs unitaires de la base polaire $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont attachés au point M : ce sont des vecteurs locaux. Ils sont mobiles : ils se déplacent et ne gardent pas une direction fixe, ni un sens fixe au cours du mouvement dans le repère cartésien qui a servi à les définir.

Lorsque M se déplace, les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ se déplacent avec M, donc ils dépendent de l'angle θ qui lui-même dépend de t : $\vec{u}_r(\theta(t))$ et $\vec{u}_\theta(\theta(t))$. Il est important d'avoir ces propriétés en tête quand on déterminer la vitesse et l'accélération en coordonnées polaires.

Exercice d'application 1 :

1. En vous appuyant sur leurs expressions dans la base cartésienne, calculer les dérivées des vecteurs de la base mobile ($\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$) par rapport à la variable θ.
2. En déduire les dérivées temporelles des vecteurs de la base mobile.
3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires.
4. Déterminer l'expression du vecteur accélération en coordonnées polaires.

On retiendra que :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

et

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

Il faut savoir retrouver très rapidement les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire :

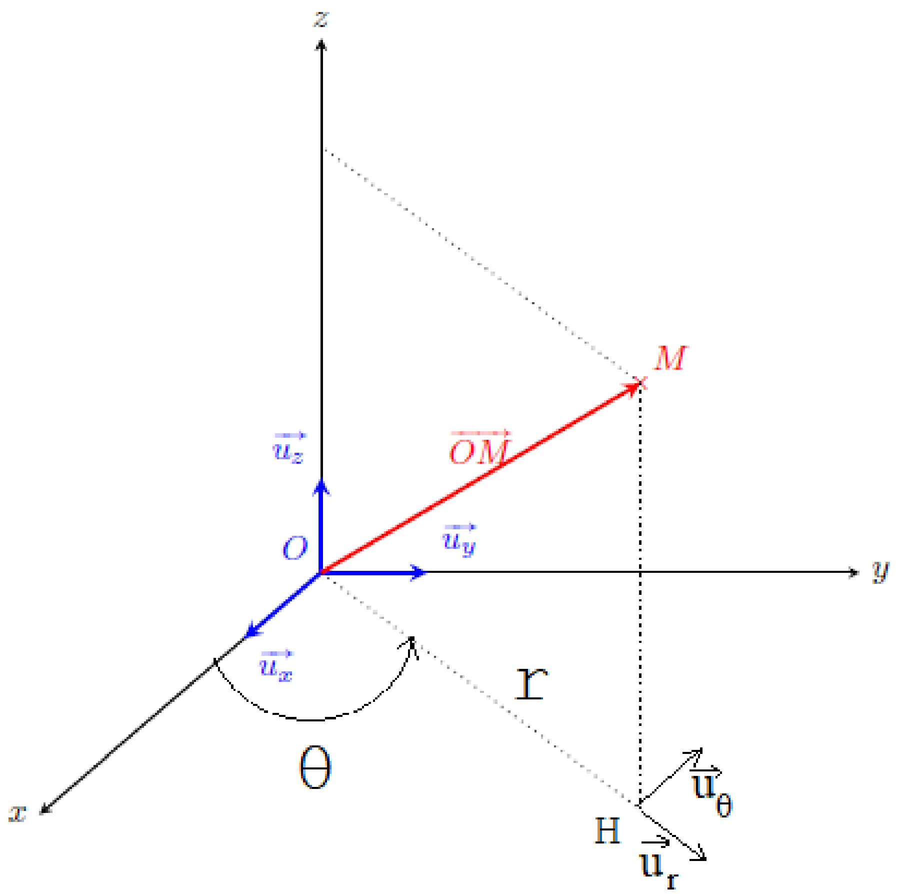
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta,$$

où on a utilisé, pour ne pas surcharger les formules, les notations $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

3.3 Repérage dans l'espace, coordonnées cylindriques

Le **repère cylindrique**, qui est une généralisation du repère polaire à l'espace tridimensionnel, est défini par un système d'axes orthogonaux centrés sur le point mobile M : $(\mathrm{M}\,;\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, où $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ sont les vecteurs unitaires orientant ces trois axes.



Dans la base cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z,$$

avec

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{||\overrightarrow{OH}||} = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH} = \frac{\overrightarrow{OH}}{r},$$

où H est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) dans lequel ont été définies les coordonnées polaires.

Le triplet (r,θ,z) correspond aux **coordonnées cylindriques** du point M :
▷ La coordonnée radiale r est la distance qui sépare M de l'axe (Oz) : $r \in [0;+\infty[$;
▷ La coordonnée angulaire θ est l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OH}$: $\theta \in [0;2\pi[$;
▷ z est la cote de M : $z \in]-\infty;+\infty[$.

Lorsque la coordonnée radiale prend une valeur constante $r = R$, le mouvement du point M est restreint à la surface d'un cylindre infini à base circulaire, ce qui explique le nom donné à ce système de coordonnées.

Les vecteurs vitesse et accélération sont les mêmes qu'en coordonnées polaires, à ceci près qu'on leur ajoute $\dot{z}\vec{u}_z$ et $\ddot{z}\vec{u}_z$ respectivement, afin de tenir compte de l'existence d'un nouveau degré de liberté en translation suivant l'axe (Oz).

En coordonnées cylindriques, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z.$$

4 Quelques mouvements particuliers

4.1 Vocabulaire

▷ Un mouvement au cours duquel le vecteur vitesse conserve une norme constante est **uniforme**. Dans ce cas, la valeur de la **vitesse instantanée** coïncide avec celle de la **vitesse moyenne** : $\overline{v} = \frac{d}{\Delta t}$, où d désigne la distance parcourue pendant la durée Δt. La distance parcourue est proportionnelle au temps de parcours.

▷ Un mouvement au cours duquel le vecteur vitesse conserve une direction constante est **rectiligne** : la trajectoire correspond à une portion de droite.

▷ Un mouvement rectiligne et uniforme correspond à un vecteur accélération nul, et à un vecteur vitesse constant (en norme, en direction et en sens).

4.2 Mouvement à vecteur accélération constant

Exercice d'application 2 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Exprimer les vecteurs position et vitesse en fonction du temps.
Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

On suppose que le vecteur accélération est constant, par exemple $\vec{a}(t) = a\vec{u}_x$, avec a une constante. Les conditions initiales sont :

▷ $\vec{v}(t=0) = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0y}\vec{u}_y + v_{0z}\vec{u}_z$;
▷ $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t=0) = x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y + z_0\vec{u}_z$.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.
2. En déduire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$.
3. Justifier que dans le cas où $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{a}$, le mouvement est rectiligne. Par élimination de la variable temps, montrer que dans le cas contraire la trajectoire est parabolique. On pourra choisir de manière astucieuse les valeurs des conditions initiales pour simplifier le problème.

Un **mouvement rectiligne uniformément accéléré** correspond à un mouvement en ligne droite avec une accélération de valeur constante.

Le vecteur accélération est constant et a la même direction que le vecteur vitesse.

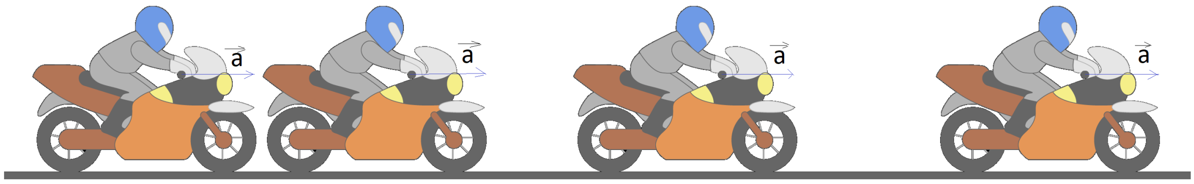


FIGURE 4 – Exemple de mouvement rectiligne uniformément accéléré

4.3 Mouvement circulaire

4.3.1 Description et propriétés

Par définition, un mouvement est **circulaire** si la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle. Les coordonnées polaires sont idéales pour décrire le mouvement. En notant R le rayon de la trajectoire et $\omega = \dot{\theta}$ la **vitesse angulaire**,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{R}\vec{u}_r,$$

$$\vec{v} = \mathrm{R}\omega\vec{u}_\theta,$$

$$\vec{a} = -\mathrm{R}\omega^2\vec{u}_r + \mathrm{R}\dot{\omega}\vec{u}_\theta.$$

Le vecteur vitesse est partout tangent à la trajectoire. Le vecteur accélération est orienté vers l'intérieur de la trajectoire (dans sa concavité).

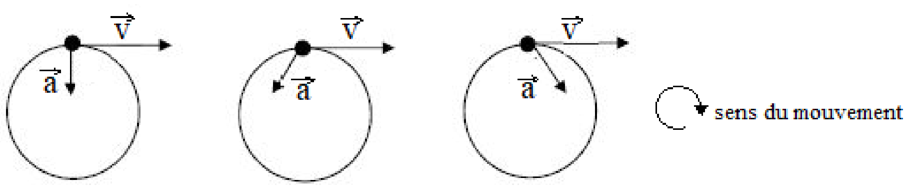


FIGURE 5 – De gauche à droite : orientations relatives du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour un mouvement circulaire uniforme, décéléré et accéléré

Dans le cas particulier du **mouvement circulaire uniforme** ($\dot{\omega} = 0$) :

$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r = -\omega^2 \overrightarrow{OM}.$$

L'accélération est **centripète** : elle pointe vers le centre de la trajectoire circulaire (par opposition à **centrifuge**).

4.3.2 Equation paramétrique et trajectoire

Exercice d'application 3 :

On considère un mouvement dans le plan (Oxy) dont les équations horaires en coordonnées cartésiennes sont $x(t) = A\cos(\omega t)$ et $y(t) = A\sin(\omega t)$ (**équations paramétriques** du mouvement).

1. Tracer la trajectoire et identifier la nature du mouvement.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération.
4. Montrer que $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$. En déduire que les coordonnées du vecteur position vérifient toutes les deux l'équation différentielle associée à un **oscillateur harmonique**.