TD12 : Cinématique du point matériel

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

▹ *Utiliser les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques* : TLB2,3, ex1,2,3,5,6

▹ *Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé* : TLB4, ex2

▹ *Construire le trièdre local associé au repérage d'un point* : TLB3,4, ex4

▹ *Exprimer les vecteurs position et vitesse en fonction du temps pour un mouvement à vecteur accélération constant* : TLB5,6

▹ *Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes pour un mouvement à vecteur accélération constant* : ex6

▹ *Exprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire* : ex2,5,7

▹ *Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle pour un mouvement circulaire* : ex5, QCM

▹ *Situer qualitativement la direction du vecteur accélération dans la concavité d'une trajectoire plane pour un mouvement circulaire* : ex5, QCM

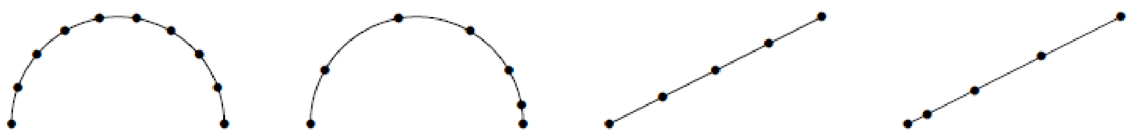
1 Questions de cours

QC1 : Relativité du mouvement.
QC2 : Référentiels usuels.
QC3 : Coordonnées cartésiennes. Vecteurs position, vitesse et accélération.
QC4 : Coordonnées polaires et cylindriques. Vecteurs position, vitesse et accélération.
QC5 : Exemples de mouvements particuliers.

2 Tester les bases

TLB1 : analyse de trajectoires

On représente ci-dessous les trajectoires associées à quatre mouvements différents. Elles sont toutes parcourues dans le même sens : de gauche à droite. La position du mobile est marquée, à intervalle de temps régulier, par un point.



Pour chaque mouvement, indiquer en justifiant si la norme du vecteur vitesse est constante, et si le vecteur vitesse est constant.

TLB2 : mouvement d'un motard

Un motard, qu'on modélise par un point matériel M, se déplace en ligne droite le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$. L'expression de sa position x le long de cet axe au cours du temps est $x(t) = 3t^2$, où x est exprimé en mètre et le temps t en seconde.

1.a. Représenter l'axe $(\mathrm{O}x)$ et le graduer de sorte que 1 mètre corresponde à 1 carreau.

1.b. Représenter sur cet axe les positions du point M aux instants $t=0$, $t=1$s et $t=2$s.

2. Déterminer l'expression mathématique de la vitesse instantanée $v(t)$ du point M.

3.a. Déterminer l'expression mathématique de l'accélération instantanée $a(t)$ du point M. Comment pourrait-on qualifier le mouvement du motard ?

3.b. Représenter sur la trajectoire le vecteur accélération du point M aux instants $t = 0$, $t = 1$s et $t = 2$s. Vous préciserez l'échelle choisie.

TLB3 : éléments cinématiques dans la base cylindrique

1. Représenter sur un schéma le trièdre direct local au point M dans la base cylindrique.
2. Exprimer le vecteur position d'un point M en mouvement dans la base cylindrique.
3. Donner les expressions des vecteurs unitaires de la base cylindrique en fonction de ceux de la base cartésienne.
4. Établir l'expression du vecteur vitesse dans la base cylindrique.
5. Établir l'expression du vecteur accélération dans la base cylindrique.

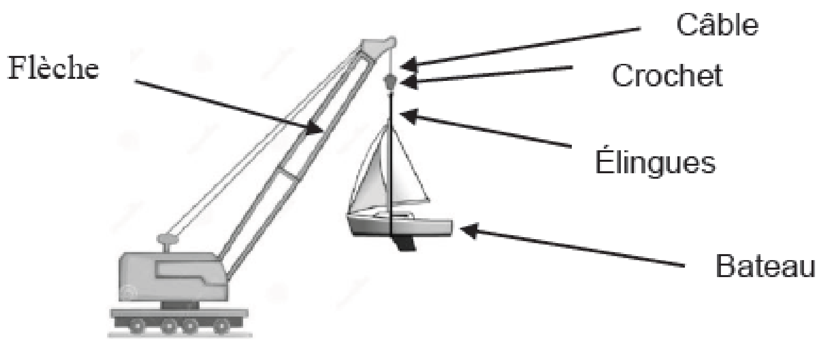
TLB4 : choix d'un système de coordonnées

Pour chacune des situations décrites ci-dessous, choisir un système de coordonnées adapté pour l'étude du mouvement du système et le représenter sur un schéma. Tous les systèmes dont on étudie le mouvement sont modélisés par des points matériels.

1. Descente d'un skieur sur une piste plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.
2. Mouvement d'une boule accrochée à un fil de longueur constante, dont l'extrémité supérieure est accrochée à un point fixe.
3. Mouvement circulaire d'un satellite autour de la Terre.
4. Chute d'un parachutiste depuis une hauteur h par rapport au sol.
5. Mouvement d'un ballon de football lancé avec un vecteur vitesse initiale incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

TLB5 : mise à l'eau d'un bateau (CCINP 2022)

Pour mettre a l'eau un voilier ou déplacer un bateau, la plupart des clubs nautiques louent des camions grues.



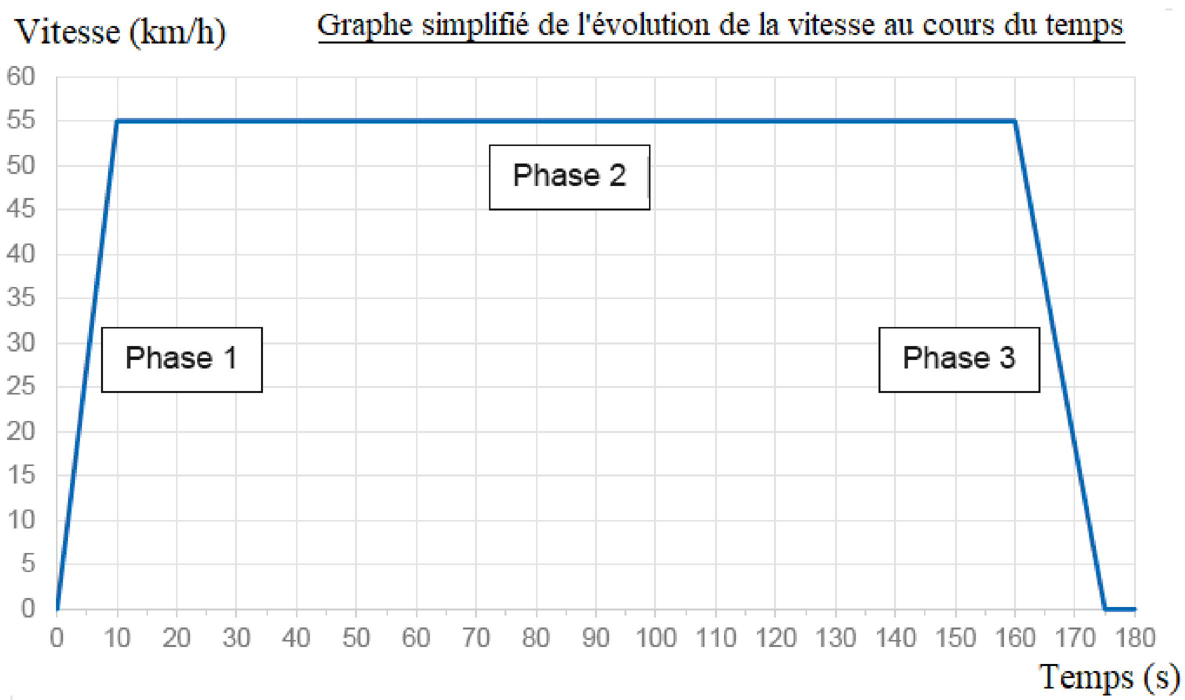
On suppose qu'on lève verticalement le bateau, initialement immobile, d'une hauteur $H = 10$ m sur une durée $t_1 = 1$ min, l'accélération du bateau, notée a, étant constante.

1. Exprimer la vitesse instantanée v du bateau en fonction de a et du temps t.
2. Exprimer la hauteur d'élévation h en fonction de a et du temps t.
3. En déduire l'expression de la vitesse instantanée v en fonction de h et du temps t.
4. Calculer ainsi la vitesse finale v_f, atteinte à la fin de cette phase de levage de 10 m.

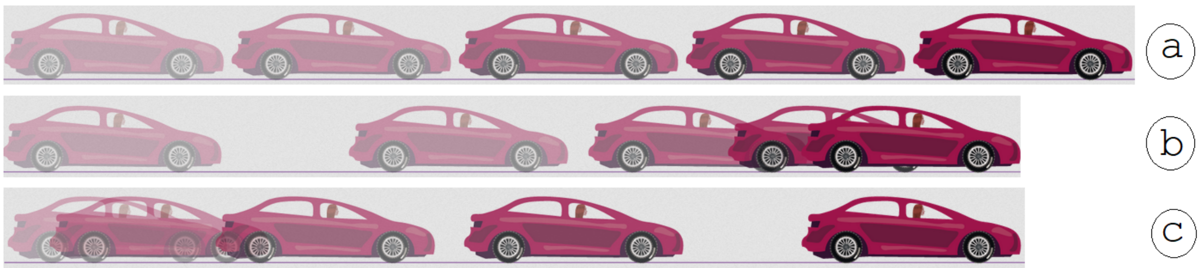
TLB6 : vitesse instantanée d'une voiture

On enregistre la vitesse $v(t)$ affichée au compteur d'une voiture pendant un essai en ligne droite. Les données obtenues sont représentées graphiquement, la courbe obtenue est modélisée par un ensemble de trois segments, qui correspondent aux trois phases du mouvement.

1. Qualifier le mouvement lors de chacune des trois phases.
2. Déterminer la valeur de l'accélération lors de chacune des trois phases.
3. Calculer la distance parcourue à l'issue des trois phases.



Une chronophotographie de la voiture est effectuée lors de chacune de ces phases. Les trois chronophotographies obtenues sont représentées qualitativement ci-dessous :



4. Associer chaque chronophotographie à la phase correspondante, en justifiant.

5. Recopier les chronophotographies en modélisant la voiture par un point situé à l'avant de cette dernière, puis représenter qualitativement le vecteur vitesse et le vecteur accélération en chacun des points échantillonnés.

3 Complément de cours : repère de Frenet

Le complément de cours ci-dessous peut s'avérer utile pour résoudre efficacement les exercices où le mouvement est curviligne, notamment ceux qui font intervenir un mouvement circulaire.

Le **repère de Frenet** est défini ainsi :

▹ Son origine est mobile, elle est confondue avec le point M dont on étudie le mouvement.

▹ Le premier de ses axes est tangent à la trajectoire, et orienté dans le même sens que le vecteur vitesse. Un vecteur unitaire de cet axe est noté $\vec{u}_t$ (vecteur unitaire "tangent").

▹ Le second axe est orthogonal au premier, et orienté vers le centre de courbure de la trajectoire. Un vecteur unitaire de cet axe est noté $\vec{u}_n$ (vecteur unitaire "normal").

Dans le repère de Frenet, les vecteurs vitesse et accélération ont pour expression :

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_t$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R(t)}\vec{u}_n,$$

où $v(t)$ représente la valeur de la vitesse, et $R(t)$ le rayon de courbure. Il s'agit du rayon du cercle osculateur, défini comme étant le cercle qui modélise le mieux la trajectoire localement, au voisinage du point considéré.

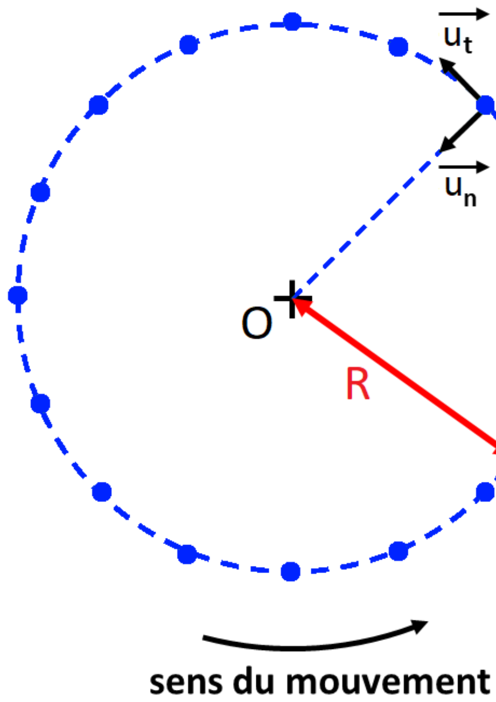


FIGURE 1 – Repère de Frenet dans le cas d'un mouvement circulaire

On constate que :

▹ le vecteur accélération a deux composantes : celle colinéaire à la trajectoire fait varier la norme du vecteur vitesse, celle orthogonale à la trajectoire fait varier la direction du vecteur vitesse ;

▹ dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération a une norme constante et est centripète.

4 Exercices

Exercice 1 : mouvement rectiligne sinusoïdal

Un anneau au bout d'un ressort oscille de manière sinusoïdale le long d'une tige horizontale. On repère sa position par rapport à sa position d'équilibre le long de l'axe (Ox) de la tige ; elle est donnée par la fonction $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \phi)$.

1. La longueur totale parcourue par la masse entre ses deux positions extrêmes est de 20 cm. Que vaut X_m ?

2. La période des oscillations est $T = 0,5$ s. Calculer ω_0.

3. À l'instant $t = 0$, la masse est à la position $x(0) = 5,0$ cm. Calculer ϕ sous l'hypothèse que l'anneau est en train d'avancer. Déterminer la position de l'anneau à l'instant $t_1 = 1,5$ s.

4. Exprimer la vitesse de l'anneau en fonction de X_m, ω_0, ϕ et t. Calculer sa vitesse maximale.

5. Établir l'expression de l'accélération de l'anneau en fonction de X_m, ω_0, ϕ et t, puis en fonction de ω_0 et x. Commenter le résultat.

Exercice 2 : mouvement d'un satellite terrestre

On considère un satellite géostationnaire (sa période de révolution est égale à celle de la Terre et il se situe dans le plan de l'équateur) gravitant sur une orbite circulaire dont le centre coïncide avec celui de la Terre, à une altitude $h = 35800$ km.

On étudie le mouvement dans le référentiel géocentrique et on supposera que ce mouvement est uniforme. Le rayon moyen de la Terre vaut $R_T = 6400$ km.

1. Faire un schéma du problème et représenter qualitativement le vecteur vitesse à différents instants.
2. Calculer la norme du vecteur vitesse du satellite.
3. Calculer la norme du vecteur accélération du satellite.

Exercice 3 : mouvement dans un toboggan

Un jeune nageur, assimilé à un point matériel M, est installé, prêt à partir, en haut du grand toboggan d'un parc aquatique.

À partir de l'instant $t = 0$, les équations horaires de M sont, en coordonnées cartésiennes : $x = R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$, $z = -bt$ (R, ω et b sont des constantes positives).

1. Déterminer les coordonnées cylindriques du point M.
2. En déduire la nature du mouvement et les caractéristiques de la trajectoire.
3. Déterminer la norme de la vitesse de M.
4. Déterminer la norme de l'accélération de M.

Exercice 4 : trajectoire d'une comète

Une comète est un petit corps céleste décrivant une orbite elliptique dont l'un des foyers est le Soleil.

La comète est assimilée à un point M, et se déplace dans le plan (Oxy) sur une ellipse dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)},$$

où e et p sont des constantes (avec $0 < e < 1$). À $t = 0$, la comète est au point P défini par $\theta = 0$ avec une vitesse $\vec{v}_P = v_P \vec{e}_y$ ($v_P > 0$).

1. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de r ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ?

2. Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point P, le point A le plus éloigné de O, ainsi que le point H d'ordonnée maximale et le point B d'ordonnée minimale. En M quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base polaire locale.

3. On suppose que l'accélération de M est toujours radiale. En déduire que $r\dot{\theta}^2$ est une constante (qu'on notera C). Déterminer C en fonction de p, e et v_P.

4. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_A$ de M au point A.

Exercice 5 : sortie d'autoroute

Un automobiliste, dont la voiture est modélisée par un point matériel, roule initialement à une vitesse $v_0 = 130$ km/h. Il souhaite quitter l'autoroute en empruntant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle de rayon $R = 50$ m.

Pour éviter de déraper dans la bretelle de sortie, la valeur de l'accélération de la voiture ne doit pas dépasser 10 m/s^2.

FIGURE 2 – Photographie de la situation étudiée

1. Exprimer l'accélération du système dans le virage en fonction des données du problème, en supposant que l'automobiliste ne freine pas avant de s'engager dans la bretelle, et que le mouvement de l'automobile est uniforme dans cette dernière. Y a-t-il un risque de dérapage ?

2. Y aurait-il eu un risque de dérapage si l'automobiliste avait respecté la limite de vitesse à l'entrée de la bretelle ?

3. Expliquer qualitativement pourquoi il faut freiner avant d'emprunter la bretelle de sortie, et non pas dans le virage, au risque de quitter la route. On pourra raisonner dans le repère de Frenet (voir complément de cours ci-dessus).

Exercice 6 : une balle en chute libre ?

En physique, un système modélisé par un point matériel est dit **en chute libre** s'il n'est soumis qu'à la force de pesanteur. Cela ne pourrait être le cas, en toute rigueur, que dans un univers vide à l'exception du système et d'un astre attracteur. Toutefois, dans certaines situations de la vie courante, on peut quand même considérer qu'un objet est en chute libre : il faut alors pouvoir négliger l'effet de toutes les autres forces que celle de pesanteur, en particulier les forces de frottement.

Une étude dynamique montre que cela revient à avoir un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}$ constante en norme, de valeur a $= 9{,}8$ m·s^{-2}, orientée verticalement vers le bas dans un référentiel terrestre.

On se demande si, en sports collectifs, lors d'une passe de balle sur une courte distance, on peut considérer que la balle est en chute libre.

Afin de tester l'hypothèse de la chute libre, deux élèves se sont filmés en train de se passer une balle de masse m $= 600$ g. Une règle de longueur $\mathrm{L} = 1{,}00$ m est placée en arrière-plan.

Le logiciel de pointage LatisPro permet de pointer la position du centre de la balle image par image, ce qui revient à obtenir une chronophotographie du mouvement du centre de la balle. Les axes qui servent à repérer le mouvement sont orientés vers la droite pour l'axe (Ox) et vers le haut pour l'axe (Oy). L'origine du repère (Oxy) est choisie au niveau de la position initiale du centre de la balle.

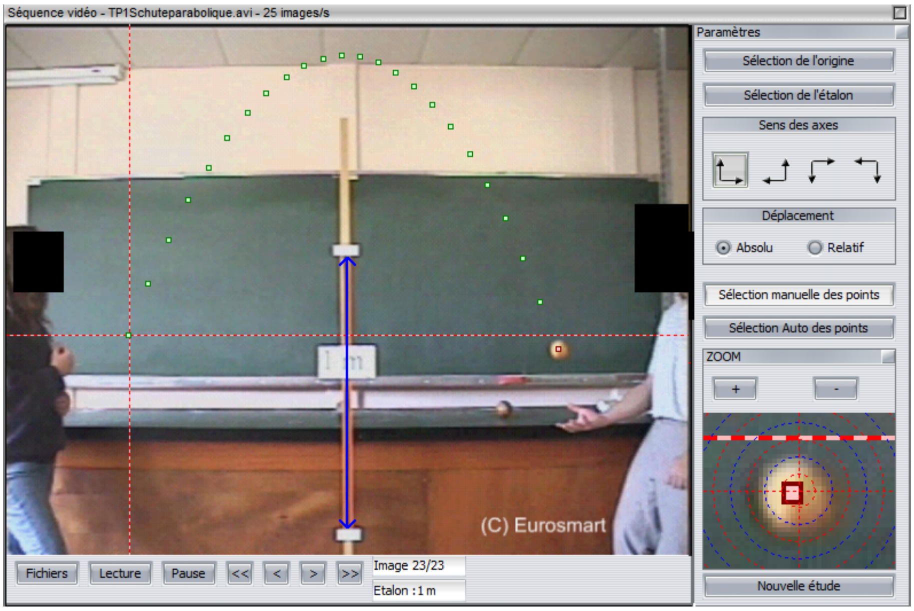


FIGURE 3 – Pointage des positions du centre de la balle sur le logiciel LatisPro

Le logiciel permet de représenter simultanément l'évolution temporelle des deux coordonnées du vecteur position et de les modéliser mathématiquement.

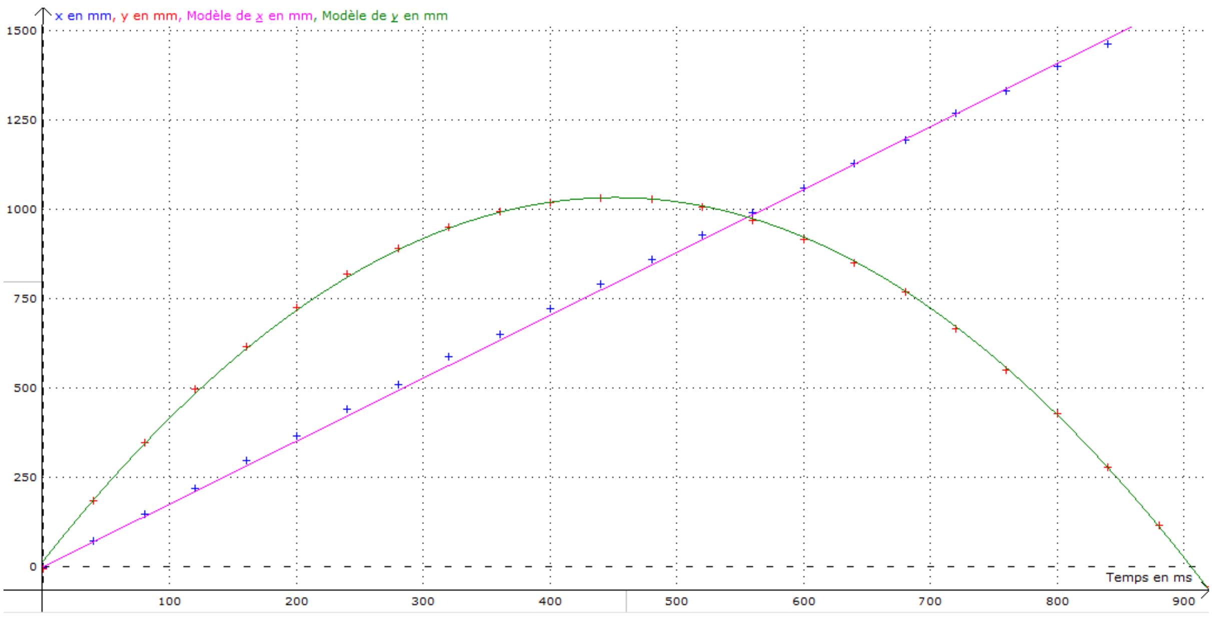


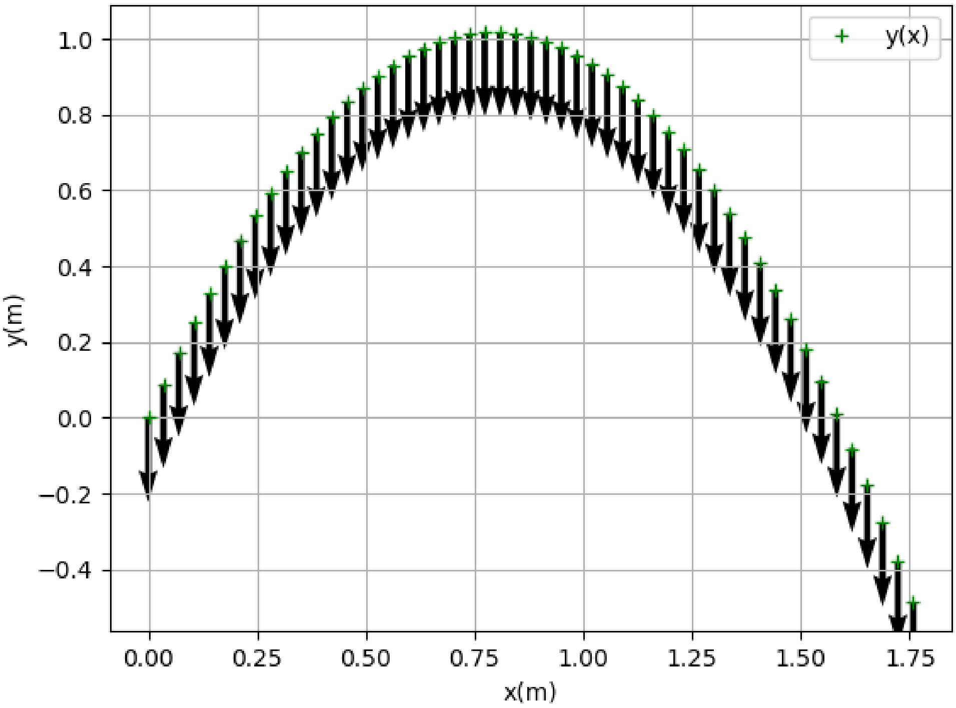
FIGURE 4 – Évolution temporelle des coordonnées du vecteur position et modélisation

▹ Le modèle choisi pour $x(t)$ est linéaire : $x(t) = 1,758t$.
▹ Le modèle choisi pour $y(t)$ est parabolique : $y(t) = -4,995t^2 + 4,507t$.

Un programme écrit en langage de programmation python permet de simuler le mouvement avec un échantillonnage plus fin que le logiciel, à partir des équations du mouvement issues de la modélisation.

Le but est de représenter le vecteur accélération en différents points de la trajectoire.

Quand on exécute le programme, le graphe ci-dessous s'affiche :



1. Pourquoi repère-t-on la position du centre de la balle pour étudier le mouvement de cette dernière ?

2. À quoi sert la règle placée en arrière-plan dans la vidéo ?

3. Comment a-t-on placé la caméra et pourquoi ?

4. Quelle est, approximativement, la durée de l'expérience ?

5. En utilisant les expressions mathématiques de $x(t)$ et $y(t)$, trouver l'expression mathématique des coordonnées du vecteur vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$, puis celles du vecteur accélération $a_x(t)$ et $a_y(t)$. Calculer la norme du vecteur accélération. Commenter.

6. En utilisant les expressions mathématiques de $x(t)$ et $y(t)$, trouver l'expression mathématique de la trajectoire $y(x)$. Commenter.

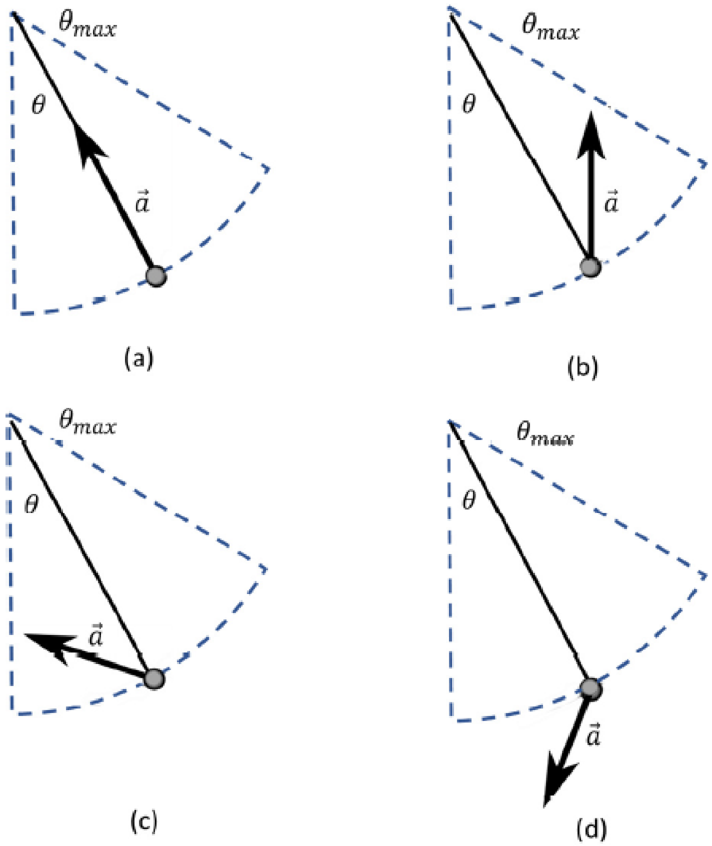
5 Résolution de problèmes :

1. Une voiture roule à 50 km/h. Elle freine brusquement jusqu'à arrêt total, sur une distance $d = 15$ m. En supposant l'accélération uniforme, déterminer sa valeur.

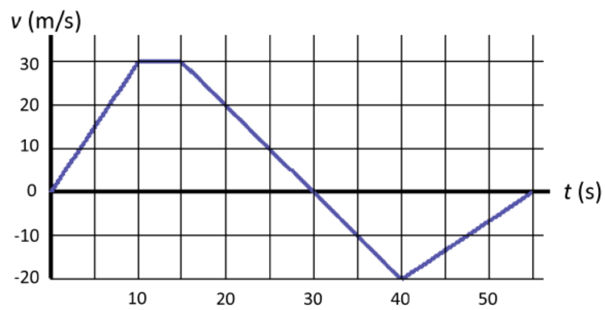
2. Une voiture, initialement animée d'une vitesse $v_0 = 90$ km·h^{-1} sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a = 4,2$ m·s^{-2}. Calculer la durée et la distance de freinage.

6 QCM (IPhO)

1. On considère une particule ponctuelle accrochée à un pendule, fait d'un fil inextensible. On considère la particule à l'instant où le fil fait un angle θ avec la verticale, égal à la moitié de la valeur de l'angle maximum θ_{max}. On se place dans la phase ascendante du mouvement. Quelle représentation graphique du vecteur accélération est correcte ?



2. On considère un objet qui se déplace selon un axe orienté [Ox). Le graphique suivant représente la vitesse en fonction du temps de cet objet le long de cet axe. De quelle distance s'est déplacé l'objet sur cet axe entre les instants t $= 0$ s et t $= 35$ s ?

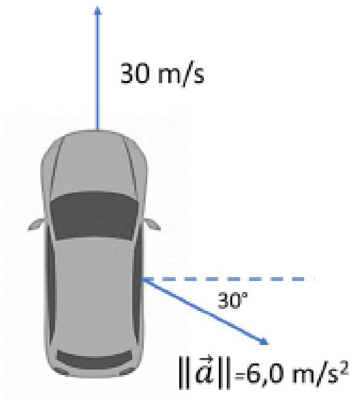


a) 100 m
b) 500 m
c) 525 m
d) 550 m

3. Un homme part se promener en marchant à une vitesse de 2 km·h^{-1}. Une heure après, un autre homme part avec un chien pour le rejoindre, en marchant à une vitesse de 4 km·h^{-1}. Le chien étant agité, il fait des allers-retours entre les deux hommes, à une vitesse de 10 km·h^{-1} jusqu'à-ce que les deux hommes se rejoignent. Quelle distance D le chien aura-t-il parcourue ?

a) D $= 2$ km
b) D $= 8$ km
c) D $= 10$ km
d) D $= 20$ km

4. Une voiture se déplace sur une piste qui présente un virage de rayon de courbure R. Dans ce virage, la vitesse et l'accélération de la voiture sont fournies. Les données dont reproduites sur la figure ci-dessous. Quel est le rayon de courbure R de la route au niveau du virage ?



a) $5,8$ m
b) $1,0 \times 10^1$ m
c) $1,7 \times 10^2$ m
d) $3,0 \times 10^2$ m