

CHAPITRE 13

Dynamique du point matériel

La **cinématique** du point décrit le mouvement d'un point matériel indépendamment de ses causes.

Pour aller au-delà d'une simple description, dans ce chapitre nous allons nous appuyer sur les lois de la **dynamique**, énoncées en 1687 par Isaac Newton dans son ouvrage *Principia Mathematica*.

Suivant les situations, le but peut être d'expliquer un mouvement observé et enregistré, de reconstituer un mouvement passé qui n'a pas été observé, ou de décrire un mouvement qui n'a pas encore eu lieu.

1 Cadre de l'étude

Les hypothèses de travail et définitions ci-dessous s'ajoutent à celles du chapitre précédent. Les trois étapes décrites sont un préalable à toute étude dynamique du mouvement.

1.1 Étape 1 : Identification et modélisation du système

En dynamique du point, on commence par identifier le **système** dont on souhaite étudier le mouvement, puis on le modélise par un **point matériel** M auquel on associe une **masse** m .

La masse d'un système est une grandeur positive, additive, dont la valeur ne dépend pas du référentiel. Elle s'exprime en kilogramme (kg).

La chimie nous apprend qu'elle est proportionnelle à la quantité de matière, la mécanique nous enseigne qu'elle mesure la difficulté à mettre un système en mouvement ou à l'arrêter (elle mesure son **inertie**), et sa possibilité d'agir sur d'autres masses par gravitation.

Le modèle du point matériel est pertinent lorsque les dimensions du système sont très petites par rapport à l'échelle à laquelle on étudie le mouvement, ou pour décrire le mouvement d'un solide en **translation** (dont l'orientation ne change pas au cours du mouvement).

L'expérience montre que le point du système dont le mouvement est le plus "simple" est son **centre de masse**, aussi appelé **barycentre** ou **centre d'inertie**, noté G.

Le centre de masse d'un système étendu représente la position moyenne des points de ce système, coefficientés par leurs masses. Si le système est modélisé par un ensemble de N points, alors par définition la position du centre de masse est décrite par le vecteur :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i},$$

où $m_{tot} = \sum_{i=1}^N m_i$ représente la masse totale du système.

Cela implique en particulier que

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

Si la répartition de masse est homogène, le centre de masse coïncide avec le centre géométrique, et peut être trouvé en raisonnant sur les symétries spatiales du système, sinon on peut prévoir qualitativement qu'il est plus proche des zones les plus denses.

1.2 Étape 2 : Choix d'un référentiel

Une fois le système précisé, on choisit un **référentiel**, les plus courants étant le **référentiel terrestre** (ou du laboratoire), le **référentiel géocentrique** et le **référentiel héliocentrique**. On y choisit ensuite un système de coordonnées adapté à l'étude du mouvement.

1.3 Étape 3 : Liste des forces

En dynamique classique, on considère que les causes du mouvement (ou de son absence) sont les **actions mécaniques** qui s'exercent sur le système. Elles sont modélisées par des forces en dynamique du point.

Une **force** est représentée mathématiquement par un vecteur, souvent noté $\vec{F}$ de manière générique. Sa norme, qui s'exprime en newton (N), est appelée intensité (ou valeur) de la force. Sa direction et son sens traduisent ceux de l'action mécanique. Sur les schémas, on choisit le représentant du vecteur qui a pour origine le point matériel M qui subit la force.

Les forces ne dépendent pas du référentiel choisi, et sont additives. La somme vectorielle de toutes les forces qui s'exercent sur un système est appelée **résultante des forces**. Elle est souvent notée $\Sigma \vec{F}$.

Un point matériel est qualifié d'**isolé** s'il n'est soumis à aucune force. Il est **pseudo-isolé** s'il est soumis à des forces non nulles mais qui se compensent, autrement dit dont la résultante est nulle : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$.

2 Lois de Newton

Les trois **lois de Newton** sont les lois fondamentales de la dynamique classique. Elles permettent de faire le lien entre les forces et le mouvement observé.

2.1 Première loi de Newton (principe d'inertie)

La **première loi de Newton** (aussi appelée **principe d'inertie**) s'énonce ainsi :

▷ Il existe des référentiels, appelés **référentiels galiléens**, par rapport auxquels le mouvement de tout point matériel (pseudo-)isolé est rectiligne et uniforme.

Cela se traduit par le fait qu'un système qui est soumis à des forces qui se compensent est en mouvement à vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_0$. Bien sûr, on peut se trouver dans le cas particulier où il est **au repos** (immobile) : $\vec{v} = \vec{0}$, qui est le cas le plus intuitif.

En pratique, le principe d'inertie peut être utilisé pour :

- ▷ prédire ou expliquer le mouvement d'un système pseudo-isolé sous l'hypothèse que le référentiel choisi est galiléen ;
- ▷ déterminer les caractéristiques d'une force s'exerçant sur le système, connaissant celles de toutes les autres, si le système est au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme ;
- ▷ tester l'hypothèse qu'un référentiel est galiléen, souvent pour l'invalider en utilisant la **contraposée** du principe d'inertie.

On peut montrer la propriété suivante :

- ▷ Un référentiel est galiléen si et seulement si il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

Aux échelles de temps et d'espace usuelles dans les expériences de mécanique, on peut considérer en bonne approximation que les référentiels terrestre, géocentrique et héliocentriques sont galiléens.

2.2 Deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique)

La **deuxième loi de Newton**, aussi connue sous le nom de **relation fondamentale de la dynamique** (RFD) ou **principe fondamental de la dynamique** (PFD), fait le lien entre les actions mécaniques modélisées par des forces et le mouvement observé.

Pour un système **fermé** (sans échange de matière avec l'extérieur), donc de masse constante, la deuxième loi de Newton s'énonce ainsi :

- ▷ Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel de masse constante est égale au produit de sa masse et de son accélération :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

La deuxième loi de Newton permet de :

- ▷ déterminer la résultante des forces connaissant l'accélération et la masse ;
- ▷ calculer l'accélération à partir du bilan des forces si on connaît leur expression mathématique. On remonte alors aux vecteurs vitesse et position par intégration ou par résolution d'équations différentielles. L'élimination du temps dans les équations horaires permet de trouver l'expression de la trajectoire.

Notons au passage que la deuxième loi de Newton est bien sûr en accord avec la première dans un référentiel galiléen. En effet, dire que la résultante des forces est nulle y est équivalent à dire que l'accélération est nulle, donc que le vecteur vitesse est constant, ce qui correspond bien à un mouvement rectiligne et uniforme.

Elle se généralise à un système de points en considérant la masse totale et l'accélération du centre de masse du système. On l'appelle alors parfois théorème du centre de masse :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{tot} \vec{a}(G).$$

Seules les forces extérieures (exercées par des éléments de l'environnement sur le système) interviennent alors, les forces internes exercées par les points du système les uns sur les autres se compensant deux à deux.

2.3 Troisième loi de Newton (principe des actions réciproques)

La troisième loi de Newton (aussi connue sous le nom de **principe des actions réciproques** ou **principe de l'action et de la réaction**) s'énonce ainsi :

▷ Dans un référentiel galiléen, si un point matériel A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un point matériel B, alors celui-ci exerce en retour sur le point matériel A une force $\vec{F}_{B/A}$ de même direction, de même norme, mais de sens opposé :

$$\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}.$$

3 Lois de force

Pour appliquer la deuxième loi de Newton afin d'étudier le mouvement d'un système, on identifie les principales forces qui s'exercent sur ce dernier.

3.1 Forces fondamentales

En physique moderne, on distingue quatre forces fondamentales. Leurs expressions sont des lois de la physique supposées valables dans tout l'Univers, qui font intervenir les constantes fondamentales des théories auxquelles elles sont associées.

3.1.1 Force de gravitation

Les systèmes massifs interagissent les uns avec les autres via la **force de gravitation**, dont l'expression a été découverte par Isaac Newton :

▷ Si deux points matériels A et B de masses respectives m_A et m_B sont éloignés l'un de l'autre d'une distance $AB = r$, le point A exerce à distance sur le point B une force attractive, proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance, appelée **force de gravitation** :

$$\vec{F}_{G,A/B} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB},$$

où $\vec{u}_{AB}$ est un vecteur unitaire orienté par la droite (AB) de A vers B. La constante de proportionnalité, appelée **constante de gravitation** ou constante de Cavendish, a pour valeur $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Newton a montré que l'expression de cette force reste inchangée si l'un des deux points matériels modélise un objet massif étendu qui possède une symétrie sphérique. Comme c'est un bon modèle pour une étoile ou une planète, on peut s'en servir pour retrouver un résultat déjà connu à l'époque :

▷ Dans un référentiel terrestre, un point matériel de masse m subit une force, appelée **poids** (ou **force de pesanteur**) et notée $\vec{P}$, proportionnelle à la masse du système :

$$\vec{P} = m \vec{g},$$

où le vecteur $\vec{g}$ est appelé **accélération de la pesanteur**. Au voisinage du sol, il a pour norme $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, une direction verticale et est orienté vers le bas : le **champ de pesanteur** est **uniforme**.

Newton a l'intuition que le poids est essentiellement la manifestation de la force de gravitation exercée par la Terre sur le système. Si on note R_T le rayon de la Terre et z l'altitude du point M, puisque $z \ll R_T$ dans les mouvements du quotidien, le champ est bien uniforme au voisinage du sol et on aboutit à $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ en égalant la force de gravitation et le poids. La valeur obtenue pour g par le calcul est en très bon accord avec la valeur expérimentale.

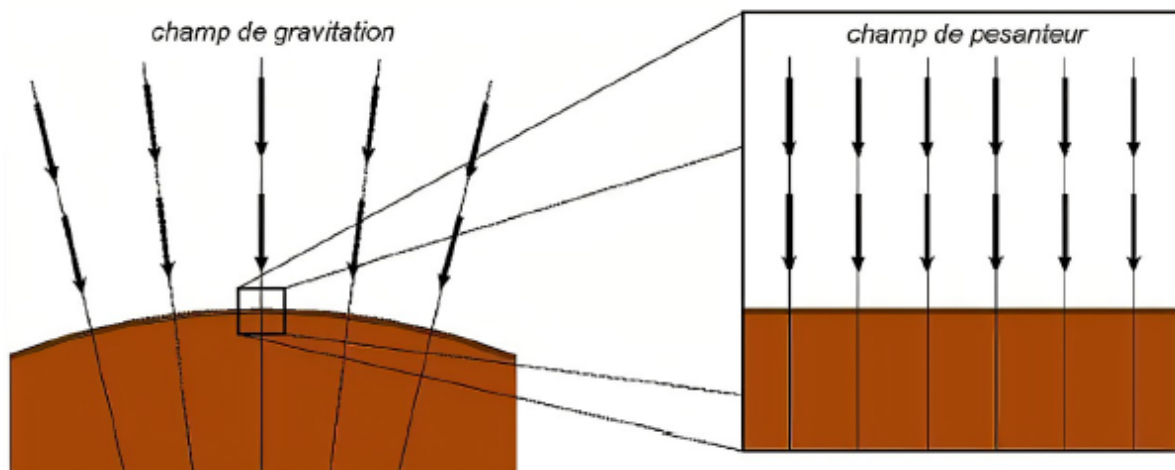


FIGURE 1 – Illustration de la vision de Newton

3.1.2 Force électrique, notion de champ et autres forces fondamentales (H.P.)

Pour modéliser l'interaction de nature électrostatique entre deux point matériels A et B chargés de charges respectives q_A et q_B , Coulomb procède par analogie avec la loi de la gravitation de Newton et propose la loi suivante :

$$\vec{F}_{E,A \rightarrow B} = K \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_{AB}.$$

où $\vec{u}_{AB}$ est un vecteur unitaire orienté par la droite (AB) de A vers B, et K une constante de proportionnalité. Cette loi rend compte du fait que la force peut être aussi bien attractive que répulsive suivant les signes des charges.

L'expérience est en accord avec cette loi de force. La théorie de l'électromagnétisme précise le sens de la constante de proportionnalité : $K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$, où ϵ est la permittivité diélectrique du milieu entre les deux charges.

Plus tard, Faraday reprend et approfondit l'idée de Newton qui avait fait le lien entre force de gravitation et force de pesanteur. Il remarque que dans la force de pesanteur,

on découple ce qui dépend du système (sa masse m) et ce qui n'en dépend pas, mais dépend de son environnement ($\vec{g}$). Ainsi, plutôt que de considérer que l'environnement agit à distance de façon instantanée sur le système, Faraday décompose l'action en deux étapes : l'environnement crée dans tout l'espace un champ de gravité ou de pesanteur $\vec{g}$. Une masse qui se trouve plongée dans ce champ subit alors une force de contact de la part de ce champ.

Par analogie avec le champ de pesanteur, Faraday définit un champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}.$$

Les autres forces fondamentales, identifiées au 20^e siècle, sont la force nucléaire faible, qui provoque la radioactivité, et la force nucléaire forte, qui permet la cohésion des noyaux des atomes. Comme elles agissent à l'échelle microscopique, elles ne peuvent être traitées correctement que dans le cadre de la théorie quantique.

3.2 Forces phénoménologiques

Les forces phénoménologiques traduisent l'effet combiné de forces fondamentales infinitésimales à l'échelle microscopique, qui s'additionnent en très grand nombre pour donner une résultante macroscopique dont les caractéristiques sont déterminées expérimentalement. Dans certains cas, on sait les exprimer mathématiquement, mais il faut connaître une grandeur issue de l'expérience pour faire l'application numérique.

3.2.1 Tension d'une corde ou d'un fil inextensible

Un point matériel accroché à un fil inextensible subit une **force de tension** (ou **force de traction**), souvent notée $\vec{T}$, selon la direction du fil et orientée du point vers le fil ; sa norme est une inconnue a priori.

Un fil idéal (sans masse) exerce des tensions opposées à ses deux extrémités. Si le fil passe sur une poulie idéale (sans masse et sans frottement), la tension change de direction mais sa norme reste la même aux deux extrémités.

3.2.2 Tension (ou force de rappel) d'un ressort

Un **ressort** linéaire est caractérisé par sa **longueur au repos** l_0 et sa **raideur** k . Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur l par rapport à la longueur au repos produit sur chacune de ses extrémités une force dont l'expression mathématique est donnée par la **loi de Hooke** :

$$\vec{F}_R = -k(l - l_0)\vec{u},$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire orienté du point d'accroche du système vers l'autre extrémité du ressort.

3.2.3 Forces de pression

Un fluide exerce sur la paroi plane et verticale d'un récipient qui le contient une **force pressante** $\vec{F}_P$ orientée vers l'extérieur, perpendiculaire à la paroi, et proportionnelle à l'aire de cette dernière. La constante de proportionnalité entre la valeur de la

force et l'aire est la **pression**, notée P . En toute rigueur, comme la pression dépend de l'altitude, il faut raisonner sur une surface infinitésimale :

$$P = \frac{dF_P}{dS}.$$

La pression s'exprime en pascal (Pa), l'analyse dimensionnelle montre que $1\text{Pa} = 1\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$.

Lorsqu'un corps est immergé dans un fluide au repos (qui ne s'écoule pas), malgré l'immobilité apparente du fluide, il subit les impacts des entités qui constituent ce fluide.

Cela engendre des forces de pression, dont la résultante est appelée **poussée d'Archimède**. Si le système a un volume V , il déplace un même volume V de fluide. La masse de fluide déplacée est égale au produit $\rho_f V$, où ρ_f désigne la masse volumique du fluide. L'expression de la poussée d'Archimède est :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g}.$$

Le signe $-$ dans l'expression traduit le fait que la poussée d'Archimède a un sens opposé au poids et a tendance à favoriser la flottaison de l'objet.

3.2.4 Réaction d'un support solide

Lorsqu'un point matériel ou un solide en translation se déplace sur un support solide, ce support exerce sur le système une force de contact $\vec{R}$ appelée **réaction du support**.

On la décompose en deux termes : $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$ avec $\vec{R}_n$ la **réaction normale** (orthogonale au support et orientée vers l'extérieur de ce dernier) et $\vec{R}_t$ la **réaction tangentielle**, ou **force de frottement solide**, orientée en sens inverse du vecteur vitesse ou du sens dans lequel se déplacerait le système s'il n'était pas soumis aux frottements.

Les **lois de Coulomb** (hors programme) précisent le lien entre les composantes tangentielle et normale.

Dans le modèle sans frottement, $\vec{R}_t = \vec{0}$, soit $\vec{R} = \vec{R}_n$.

3.2.5 Force de frottement fluide (ou visqueux)

Lorsqu'un objet est en mouvement dans un fluide (liquide ou gaz), ce dernier s'oppose au mouvement à travers une action mécanique modélisée par une **force de frottement fluide**, dont l'intensité dépend de la valeur de la vitesse.

Lorsque la vitesse du système est "faible", on adopte un modèle linéaire :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v},$$

où λ est un coefficient positif qui peut être déterminé expérimentalement. Il dépend, entre autres, de la nature du fluide et de la géométrie de l'objet qui subit la force. Par exemple, pour un système de forme sphérique et de rayon R , la loi de Stokes donne :

$$\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v},$$

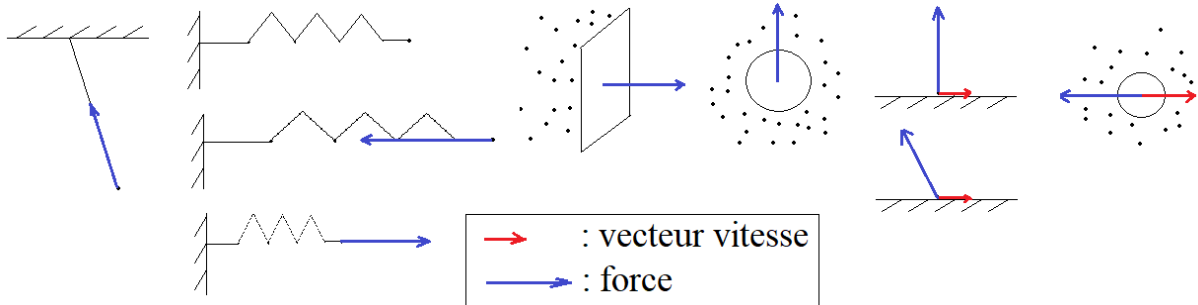
où η désigne la **viscosité dynamique** du fluide.

Si la vitesse est "élevée", on emploie souvent un modèle quadratique, de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha v \vec{v}.$$

Exercice d'application 1 :

Identifier les forces phénoménologiques représentées ci-dessous :



4 Exemples d'études de mouvements (grands classiques !)

4.1 Méthode

Pour résoudre un problème de mécanique en utilisant les lois de la dynamique, on suit les étapes suivantes :

- ▷ on définit le système, qu'on modélise par un point matériel : son centre de masse ;
- ▷ on précise le référentiel choisi pour l'étude. On le suppose galiléen. On choisit un système de coordonnées adapté à la situation ;
- ▷ on liste les principales forces qui s'exercent sur le système, en essayant de les classer par ordre d'importance, puis on choisit lesquelles on néglige (dans un premier temps). On représente ces forces sur un schéma, où on indique les paramètres utiles à la résolution ;
- ▷ on applique la deuxième loi de Newton pour exprimer l'accélération ;
- ▷ si l'accélération est constante, des calculs de primitives permettent de trouver les vecteurs vitesse et position en utilisant les conditions initiales ;
- ▷ on peut aussi aboutir à une ou plusieurs équation(s) différentielle(s) dont la résolution, en tenant compte des conditions initiales, donne les coordonnées du vecteur position ;
- ▷ en éliminant la variable temps par combinaison des équations horaires du mouvement, on trouve l'équation de la trajectoire ;
- ▷ on compare, dans l'idéal, à des mesures expérimentales. En cas de désaccord, on revient sur les hypothèses. On peut par exemple prendre en compte les forces qu'on avait négligées dans un premier temps.

4.2 Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

4.2.1 Chute libre

En physique, un objet est dit **en chute libre** si on peut considérer que la seule force à laquelle il est soumis est la force de pesanteur.

Exercice d'application 2 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

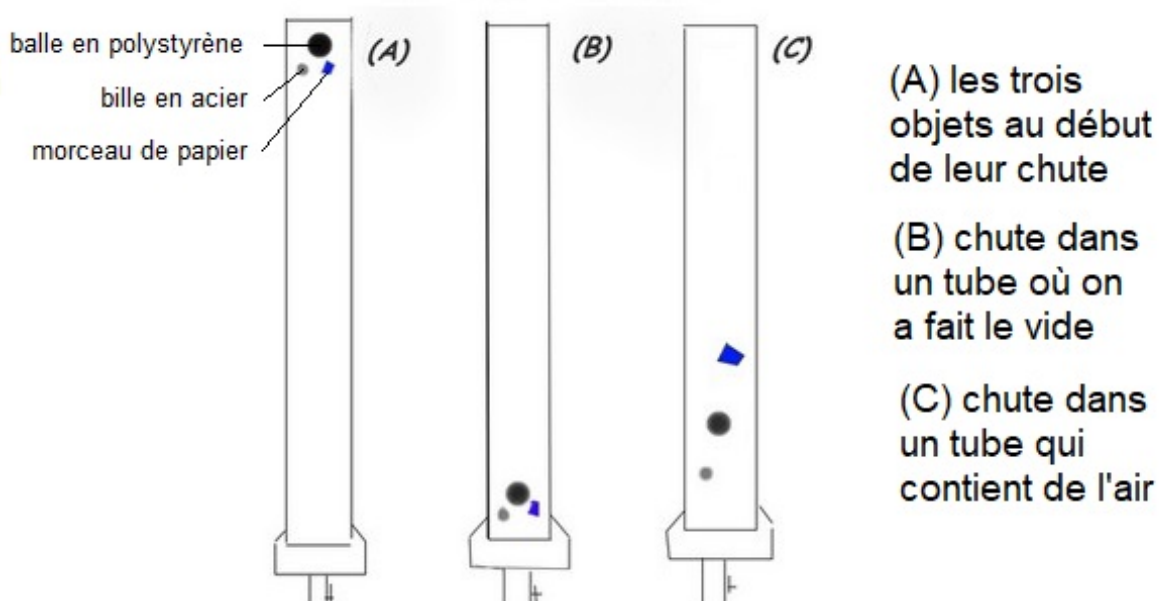
Établir un bilan des forces et en rendre compte sur un schéma.

Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel.

Mettre en équation le mouvement sans frottement d'un point matériel et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.

Un tube de Newton est un tube creux dont les parois sont transparentes. Il contient des objets de tailles, formes et masses différentes. Un dispositif d'aspiration permet de retirer tout l'air contenu dans le tube, autrement dit d'y faire le vide.

En retournant rapidement le tube, on peut observer la chute des objets. La situation est schématisée ci-dessous. Dans un cas, on a fait le vide. On observe que les objets chutent tous de la même manière. Dans le cas où on ne vide pas le tube de l'air qu'il contient, on observe une légère différence dans la façon dont les objets chutent dans le tube.



On modélise un objet chutant dans le tube par un point matériel M de masse m . Son mouvement est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen. On se donne un axe (Ox) dont l'origine O coïncide avec la position initiale du système. Cet axe est vertical, orienté vers le bas. On suppose que la vitesse initiale des objets est nulle : $v_0 = v(t=0) = 0$. L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g}$, sa norme vaut $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1. Dans le cas où on a fait le vide dans le tube, indiquer à quelle force l'objet est soumis lors de sa chute (on considère qu'il est en chute libre). Donner l'expression mathématique de cette force. La représenter sur un schéma sans souci d'échelle.

2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique, et montrer qu'elle revient à écrire $\vec{a} = \vec{g}$, où $\vec{a}$ désigne l'accélération de l'objet.

3. Projeter cette relation sur l'axe (Ox) . En déduire l'expression de la vitesse $v_x(t)$ et de la position $x(t)$.

4. La hauteur de chute vaut $h = 1,0 \text{ m}$. Exprimer la durée de chute t_c . Commenter l'expression littérale, puis calculer la valeur de cette durée.

5. On mesure $t_c = 0,45 \text{ s}$. L'hypothèse de la chute libre est-elle vérifiée ?

6. Si on ne fait pas le vide dans le tube de Newton, l'hypothèse de la chute libre est-elle vérifiée ? Expliquer pourquoi.

Exercice d'application 3 :

Un pilote veut effectuer la cascade de l'année, en sautant en voiture par-dessus le Grand Canyon du Colorado, aux États-Unis.

Il connaît les caractéristiques du canyon à l'endroit choisi (largeur du canyon $L = 1,25$ km, profondeur du canyon $H = 1,70$ km). Le tremplin fait un angle $\alpha = 30^\circ$ au-dessus de l'horizontale. La voiture et son équipage sont modélisés par un point M de masse $m = 1230$ kg. Les forces autres que le poids sont négligées.

La position initiale du système est l'origine O du repère. La taille du tremplin est négligeable dans ce problème. Le mouvement étant plan, on ne considère que les coordonnées x (horizontale) et y (verticale) du système.

L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. En vous appuyant sur un schéma, exprimer les coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le repère cartésien $(O; x, y)$ en fonction de la valeur v_0 de la vitesse initiale et de l'angle α .

2. En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'accélération du système.

3. Projeter la relation vectorielle obtenue à la question précédente sur les axes (Ox) et (Oy) , et en déduire les équations horaires de la vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$.

4. Montrer alors que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du système vérifient :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos(\alpha) t \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t.\end{aligned}$$

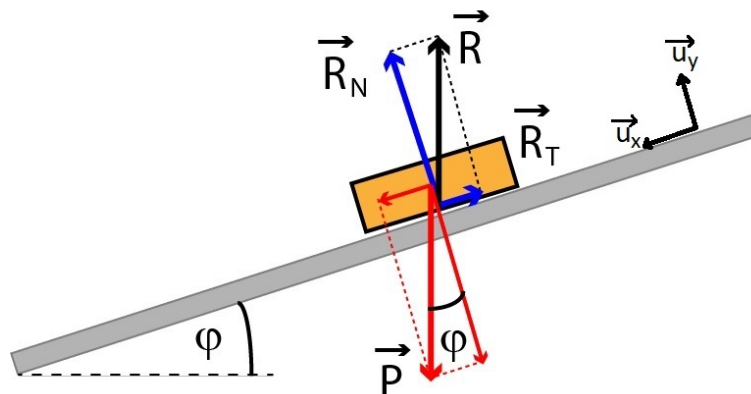
5. En supposant que le saut est réussi, déterminer l'expression de la durée du saut Δt_{saut} , puis celle de la distance D parcourue horizontalement pendant le saut, en fonction de v_0 , α et g .

6. Quelle condition D doit-elle vérifier pour que le saut soit réussi ? En déduire la valeur de la vitesse initiale v_0 nécessaire à la réussite du saut, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Commenter.

4.2.2 Glissement sur un plan incliné

Exercice d'application 4 :

Un palet en bois de masse m , modélisé par un point matériel M, est posé sans vitesse initiale au point O sur un plan incliné en bois faisant un angle ϕ par rapport à l'horizontale. On définit un repère cartésien lié au support, dont les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont représentés sur le schéma ci-dessous.



On donne les **lois de Coulomb** pour le frottement solide :

▷ si le palet est à l'équilibre (situation statique), les composantes tangentielle R_T et normale R_N de la réaction du support $\vec{R}$ vérifient : $|R_T| \leq f_s R_N$, où f_s est un coefficient de frottement statique ;

▷ si le palet est en mouvement (situation dynamique), les composantes tangentielle R_T et normale R_N de la réaction du support $\vec{R}$ vérifient : $|R_T| = f_d R_N$, où f_d est un coefficient de frottement dynamique.

La valeur de l'angle ϕ ainsi que celle du coefficient de frottement doivent avoir une influence sur le mouvement du palet. On se propose dans un premier temps d'analyser la possibilité d'un équilibre, correspondant à une situation d'adhérence au support.

1. En mécanique, un système est à l'équilibre s'il est immobile. Décrire qualitativement l'effet attendu des paramètres ϕ et f_s sur la possibilité d'un équilibre.

2. Effectuer le bilan des principales forces s'exerçant sur le palet. Exprimer leurs composantes dans la base cartésienne définie ci-dessus.

Afin de vérifier la cohérence des résultats établis à la question 2, on considère deux cas particuliers.

3. Exprimer directement le poids dans la base cartésienne dans le cas particulier où $\phi = 0$ (plan à l'horizontale), et vérifier l'accord avec son expression obtenue à la question 2.

4. Exprimez directement le poids dans la base cartésienne dans le cas particulier où $\phi = \pi/2$ (plan à la verticale), et vérifier l'accord avec son expression obtenue à la question 2.

5. Montrer que le palet reste à l'équilibre à condition que $\tan(\phi) \leq f_s$. Ce résultat est-il en accord qualitatif avec votre réponse à la question 1 ? Calculer l'angle critique ϕ_c au-delà duquel le palet ne peut pas rester statique.

6. Proposer un protocole expérimental pour mesurer la valeur du coefficient de frottement statique f_s .

On suppose à présent que le palet n'est plus à l'équilibre, mais qu'il glisse le long du support. Le coefficient de frottement statique f_s doit alors être remplacé par le coefficient de frottement dynamique $f_d = 0,4$.

On note d la distance sur laquelle le palet peut glisser avant de se retrouver au bas du plan incliné, et v_f la norme de sa vitesse au moment où il atteint le bas de la pente.

7. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au palet en mouvement.

8. Projeter cette relation sur l'axe (Ox) .

9. En déduire la vitesse $v_x(t)$ du palet puis la distance parcourue $x(t)$ depuis le début de la chute.

10. En déduire l'expression de v_f en fonction de d et ϕ . Commenter.

4.2.3 Prise en compte des frottements fluides

Exercice d'application 5 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Exploiter une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite.

L'objectif de l'exercice est d'étudier la remontée des bulles dans le champagne, liquide de masse volumique $\rho_{liq} \approx 1\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Les bulles sont constituées de dioxyde de carbone à la pression $p \approx 1$ bar.

La force de viscosité $\vec{f}$ exercée par le champagne sur la bulle est modélisée par la relation de Stokes,

$$\vec{f} = 6\pi\eta r \vec{v},$$

où $\eta \sim 10^{-3}\text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ est la viscosité dynamique du champagne, $r \approx 1$ mm le rayon de la bulle et $\vec{v}$ la vitesse de la bulle.

L'étude est menée dans le référentiel terrestre, auquel on adjoint un repère d'espace $(O, \vec{u}_z)$ vertical orienté vers le haut.

1. Justifier, en raisonnant en ordre de grandeur, que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède.

2. En négligeant le poids, établir l'équation différentielle vérifiée par la composante v de la vitesse de la bulle selon l'axe (Oz) et l'écrire sous la forme canonique

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_l}{\tau}.$$

Exprimer les paramètres v_l et τ en fonction des masses volumiques ρ_{liq} et ρ_{gaz} , et de η , g et r . Donner leur interprétation physique.

3. Calculer numériquement τ . Quelle approximation peut-on a priori effectuer ?

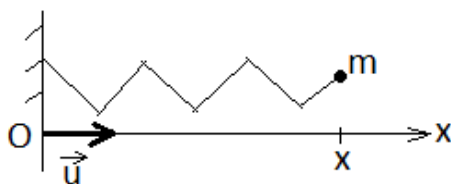
4. Résoudre l'équation différentielle et représenter l'allure de v_z au cours du temps.

4.3 Mouvements d'oscillation à un degré de liberté

Exercice d'application 6 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.



On considère un ressort dont un des points d'attache (à gauche sur le schéma ci-dessus) est fixe, et l'autre (à droite sur le schéma ci-dessus) mobile. Un objet de masse m assimilé à un point matériel, qui jouera le rôle de système, est accroché à l'extrémité libre du ressort. À un instant quelconque, on note x la longueur du ressort entre les points d'accroche fixe et mobile.

On suppose dans un premier temps que le système est immobile (à l'équilibre) dans le référentiel terrestre choisi pour étudier le mouvement.

1. Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur le système.

2. Justifier que les forces orientées verticalement se compensent, et en déduire que la réaction du support a pour expression $\vec{R} = -m\vec{g}$, où $\vec{g}$ désigne l'accélération de la pesanteur.

3. Justifier que la seule force orientée horizontalement est nulle, et en déduire que la longueur du ressort à l'équilibre est égale à sa longueur à vide : $l_{eq} = l_0$.

Le système est alors écarté de sa position d'équilibre puis lâché. On néglige les frottements fluides et les frottements solides.

4. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le système.

5. Quelle relation vectorielle existe-t-il entre ces forces quand le système est en mouvement ?

6. Projeter cette relation sur l'axe (Ox) , et en déduire que $m \frac{d^2x}{dt^2} + k(x - l_0) = 0$.

7. Montrer que cette équation différentielle peut être mise sous la forme canonique suivante : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$. Vous préciserez l'expression de la position d'équilibre x_{eq} et de la **pulsation propre** ω_0 en fonction de m , k et l_0 .

8. On pose $X = x - x_{eq}$. Cette grandeur X représente l'écart à la position d'équilibre. Montrer que X vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0$. Commenter.

9. Vérifier que $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, où A et B sont des constantes d'intégration, est solution de cette équation différentielle.

10. À l'instant initial, le système se trouve au niveau de la position d'équilibre : $X(t=0) = 0$. Il possède une vitesse $v(t=0) = \frac{dX}{dt}(t=0) = v_0$. En déduire l'expression des constantes d'intégration A et B .

11. En déduire que le système a un mouvement d'oscillation périodique autour de la position d'équilibre, de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

12. On vient de prévoir que le système oscille périodiquement sans jamais s'arrêter. Pourtant, lorsqu'on fait l'expérience, le système finit toujours par s'immobiliser après quelques oscillations. Quel phénomène faudrait-il prendre en compte pour améliorer la modélisation ?

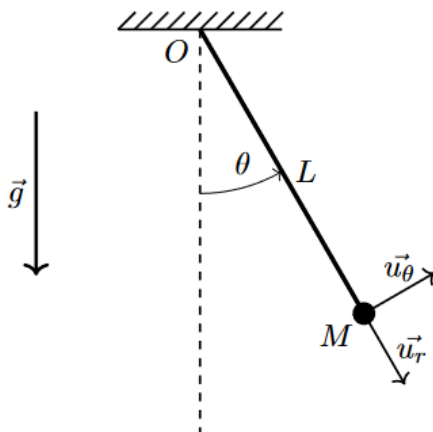
Exercice d'application 7 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Établir l'équation du mouvement du pendule simple.

Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

On considère un **pendule simple** modélisé par une masselotte de masse m accrochée à un fil tendu de longueur L constante et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixe en O . La position du point M est repérée en coordonnées polaires par l'angle θ formé par le fil et la verticale descendante.



À la date $t = 0$, on lâche le pendule de la position $\theta_0 \ll 1$ rad, sans vitesse initiale.

On néglige les frottements.

Données : $L = 50,0 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$, $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Définir le système étudié, choisir un référentiel et faire un bilan des forces. Les représenter sur un schéma.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ , et la mettre sous forme canonique. Expliquer ce qui la rend difficile à résoudre analytiquement.
3. Que devient l'équation différentielle de la question précédente dans l'hypothèse des petits angles ? Commenter. Résoudre l'équation différentielle approchée.
4. Exprimer la pulsation propre ω_0 et la période T du mouvement dans l'hypothèse des petits angles en fonction des constantes du problème et faire les applications numériques.

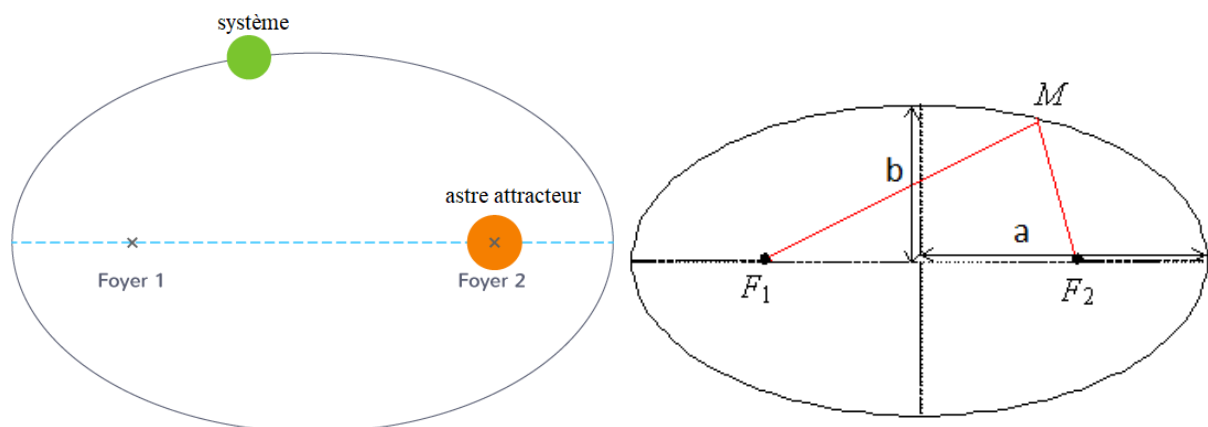
4.4 Mouvement dans un champ de gravitation

4.4.1 Lois de Kepler

Historiquement, les **lois de Kepler** décrivent les principales propriétés du mouvement des planètes dans le référentiel héliocentrique. L'astronome Johannes Kepler les a établies de manière empirique à partir des observations des planètes faites par son mentor Tycho Brahe, très précises pour l'époque. Il a publié ses deux premières lois en 1609 dans *Astronomia Nova* puis la troisième en 1619 dans *Harmonices Mundi*.

S'appuyant sur les travaux de Galilée, Kepler, Huygens et d'autres, Isaac Newton a ensuite découvert la loi de la gravitation, qui lui a permis de fournir une explication théorique aux trois lois découvertes par Kepler.

► La **première loi de Kepler** (ou **loi des orbites**) stipule que si un système est en orbite sous l'effet de l'attraction gravitationnelle d'un unique astre sphérique beaucoup plus massif que lui, sa trajectoire dans le référentiel astrocentrique est une ellipse dont l'astre occupe un des foyers.



Une **ellipse** désigne les lieux géométriques, dans un plan, de tous les points M tels que $F_1M + F_2M = \text{constante}$, où F_1 et F_2 sont des points fixes appelés **foyers** de l'ellipse. Une ellipse peut être caractérisée par son **demi grand axe** a et son demi petit axe b .

La première loi de Kepler s'applique en particulier :

- aux planètes du système solaire sous l'attraction gravitationnelle du Soleil ;
- aux satellites naturels des planètes ;

- aux satellites artificiels placés en orbite autour de la Terre. Ils ne consomment pas de carburant pour se maintenir sur cette orbite, c'est l'attraction gravitationnelle de la Terre qui permet leur mouvement ;
- aux exoplanètes (planètes qui orbitent autour d'une autre étoile que le Soleil) ;
- aux astres en orbite autour du trou noir au centre de notre galaxie.

► La **deuxième loi de Kepler** (ou **loi des aires**) stipule lorsqu'un système est en orbite sous l'influence de l'attraction gravitationnelle d'un astre, le **rayon-vecteur** qui relie le centre d'un astre et le système, balaie des aires égales dans des intervalles de temps égaux.

La deuxième loi de Kepler est valable dans toutes les situations où la première l'est. On la discute plus en profondeur ci-dessous dans le cas particulier d'une planète du système solaire en orbite autour du Soleil.

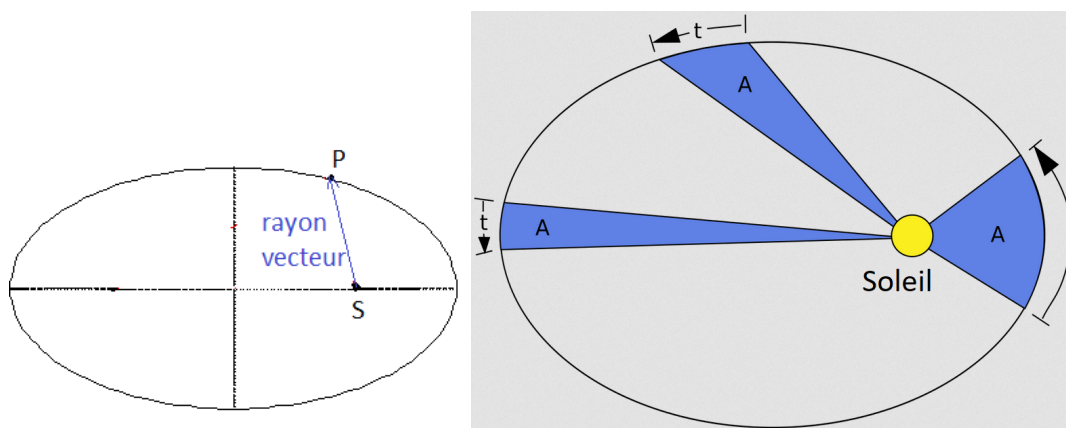


FIGURE 2 – Définition du rayon-vecteur $\vec{SP}$, qui relie le centre du Soleil S et le centre d'une planète P et illustration de la deuxième loi de Kepler

On constate sur le schéma que lorsqu'une planète passe au plus près du Soleil, elle parcourt une plus grande distance en un temps donné qu'elle ne le ferait lorsqu'elle se trouve au plus loin du Soleil : si la trajectoire n'est pas circulaire, la vitesse à laquelle est parcourue l'orbite est variable : elle est plus grande au **périhélie** (point le plus proche du Soleil) qu'à l'**aphélie** (point le plus éloigné du Soleil). Si en revanche le mouvement est circulaire, alors il est uniforme.

► La **troisième loi de Kepler** (ou **loi des périodes**) stipule que le rapport du carré de la période de révolution (durée nécessaire pour que le système parcoure son orbite) et du cube du demi grand axe de l'orbite, est une constante : elle a la même valeur pour tous les systèmes en orbite autour de l'astre attracteur. Plus précisément,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

où G est la constante de gravitation et M la masse de l'astre attracteur.

La troisième loi de Kepler a le même cadre d'application que les deux premières. Dès qu'on connaît la valeur du demi-grand axe d'une orbite elliptique et la période de révolution, on peut remonter à celle de la masse de l'astre attracteur.

Si on connaît certaines positions et qu'on arrive à les extrapoler pour trouver l'orbite d'un astre, on peut trouver sa période de révolution. Cela permet de prédire quand

reviendront les comètes, notamment la célèbre comète de Halley.

Exercice d'application 8 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.

On modélise la Soleil par un point matériel S de masse M_S et la Terre par un point matériel T de masse M_T . L'orbite de la Terre dans le référentiel héliocentrique est modélisée par un cercle de rayon r_{ST} .

1. Exprimer la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre, $\vec{F}_{G,S \rightarrow T}$, en fonction de la constante de gravitation G , de M_S , M_T , r_{ST} et un vecteur $\vec{u}_{ST}$ dont vous préciserez les propriétés.

2. Sur un schéma, représenter qualitativement en un même point de la trajectoire la force exercée par le Soleil sur la Terre et le vecteur vitesse du point T.

Le tableau ci-dessous contient les données nécessaires pour vérifier la validité de la troisième loi de Kepler dans le système solaire.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Demi-grand axe a en unités astronomiques	0,39	0,72	1,00	1,52	5,20	9,54	19,18	30,07
Période de révolution T en années terrestres	0,24	0,62	1,00	1,88	11,86	29,46	84,01	164,78

3. Déterminer la valeur de la constante $k = \frac{T^2}{a^3}$, en détaillant votre démarche.

4. Newton a montré que si T est exprimée en seconde et a en mètre, $k = \frac{4\pi^2}{GM_S}$, où $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, et $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$. On rappelle que la distance Soleil-Terre vaut une unité astronomique, soit $1 \text{ u.a.} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$. Calculer la valeur de k trouvée par Newton, et la comparer à celle que vous avez obtenue avec les données. Conclure.

5. Le résultat obtenu par Newton se retrouve assez facilement si on approxime le mouvement d'une planète à un mouvement circulaire. On se propose de le démontrer dans ce cas particulier. Dans ce qui suit, on note R le rayon de l'orbite de la planète.

5.a. Déterminer, par une étude cinématique, l'expression de la vitesse $\vec{v}$, puis de l'accélération $\vec{a}$ dans un système de coordonnées adapté à l'étude du mouvement.

5.b. En appliquant la deuxième loi de Newton à une planète dans le référentiel héliocentrique, et en tenant compte uniquement de la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la planète dans le bilan des forces, trouver une autre expression de l'accélération.

5.c. Égaler les deux expressions de l'accélération obtenues en 5.a. et en 5.b. pour montrer que le mouvement est uniforme, puis exprimer la vitesse v de la planète en fonction du rayon R de l'orbite, de G et de M_S .

5.d. Exprimer la vitesse v en fonction de la durée de révolution T et du rayon de l'orbite R .

5.e. Combiner les résultats de 5.c. et 5.d. pour obtenir l'expression de la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'un mouvement circulaire.