CHAPITRE 15

Oscillateurs en régime libre

Dans toutes les branches de la physique on rencontre des systèmes, appelés **oscillateurs**, pour lesquels une grandeur physique oscille, c'est-à-dire varie de façon alternative et éventuellement périodique, autour de sa valeur moyenne.

Ces oscillations peuvent être :
▹ **forcées** par une intervention externe qui reste activée tout au long du mouvement : une excitation de nature sinusoïdale permet d'entretenir les oscillations, ce qui fera l'objet d'un chapitre ultérieur ;
▹ provoquées par un écartement du système par rapport à sa **position d'équilibre** : il oscille alors pendant un certain temps autour de l'équilibre avant d'y revenir à l'issue d'un régime qu'on qualifie de libre, car l'oscillateur n'est soumis à aucune excitation extérieure pendant cette phase.

Un **régime libre** peut être observé par exemple lorsqu'un pendule simple est écarté de sa position d'équilibre. La masse oscille avant de revenir à la verticale : on observe des **oscillations amorties**.

On devine que ce sont les **phénomènes dissipatifs** qui provoquent le retour à la position d'équilibre, et qu'en les rendant moins intenses les oscillations dureront plus longtemps avant de s'amortir.
Dans le cas limite, purement théorique, où il n'y aurait aucun phénomène dissipatif, les oscillations continueraient pendant une durée infinie et seraient régulières. Le modèle le plus universel d'un tel comportement est celui de l'**oscillateur harmonique**.

Dans ce chapitre :
▹ nous étudierons l'oscillateur harmonique et sa version **amortie** ;
▹ nous mettrons en évidence les **analogies** entre un **oscillateur électrique** et un **oscillateur mécanique**.

1 Oscillateur harmonique en régime libre

1.1 Définition et propriétés

En physique, on qualifie d'**oscillateur harmonique** tout système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Le nombre strictement positif ω_0^2 est le carré de la **pulsation propre de l'oscillateur**, ω_0, qui s'exprime en rad·s^{-1}. Cette pulsation est dite propre car sa valeur est reliée aux caractéristiques du dispositif oscillant.

La solution de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \mathrm{X}_m \cos(\omega t + \phi),$$

avec $X_m \geq 0$ l'**amplitude** des oscillations, qui correspond à la valeur maximale de $x(t)$. La grandeur $\Phi = \omega t + \phi$ est la **phase** à un instant quelconque, et ϕ est la **phase à l'origine**, qui impose la valeur de $x(t)$ à l'instant initial : $x(0) = X_m \cos(\phi)$.

Dans cette formulation, l'amplitude et la phase à l'origine sont les deux constantes d'intégration.

La grandeur

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

est la **période propre** de l'oscillateur harmonique, telle que pour tout instant t, $x(t + T_0) = x(t)$: elle correspond à la plus petite durée au bout de laquelle le signal $x(t)$ se répète identiquement à lui-même. La valeur de la période propre d'un oscillateur harmonique est indépendante des conditions initiales : on parle alors d'**isochronisme des oscillations**.

La **fréquence propre** est le nombre de répétitions du signal par unité de temps :

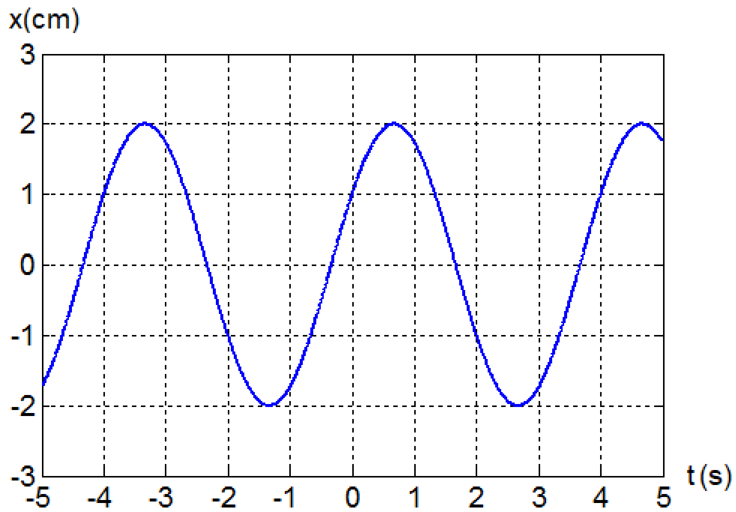
$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Elle s'exprime en hertz (Hz) dans le système international d'unités, avec 1 Hz$= 1$ s^{-1}.

Exercice d'application 1 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.



On enregistre le signal sinusoïdal ci-dessus, qui représente le déplacement du centre de masse d'un mobile lors d'un mouvement à un degré de liberté, par rapport à sa position d'équilibre le long d'un axe (Ox).

1. Déterminer son amplitude, sa période, sa fréquence propre, sa pulsation et sa phase à l'origine.
2. Écrire explicitement l'expression mathématique de ce signal.

On voit sur cet exemple qu'écrire la solution de l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique sous la forme

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

n'est pas très pratique si cela demande de déterminer la phase à l'origine.

En général, les conditions initiales sont connues : $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$. La forme suivante est bien plus pratique pour tenir compte de telles conditions :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Exercice d'application 2 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Résoudre l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales.

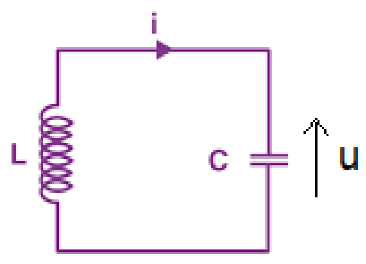
1. Vérifier que $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ est solution de l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique.
2. Exprimer les deux constantes d'intégration A et B en fonction de $x_0 = x(t=0)$ et de $v_0 = \dot{x}(t=0)$.
3. Faire explicitement le lien entre les deux expressions possibles d'un signal harmonique, en exprimant A et B en fonction de X_m et ϕ.

1.2 Exemples d'oscillateurs harmoniques en physique

1.2.1 Circuit LC en régime libre

Exercice d'application 3 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.
Réaliser le bilan énergétique du circuit LC.

On considère un circuit LC, constitué d'une bobine d'inductance L branchée en série avec un condensateur de capacité C. On note u la tension aux bornes du condensateur, en convention récepteur.



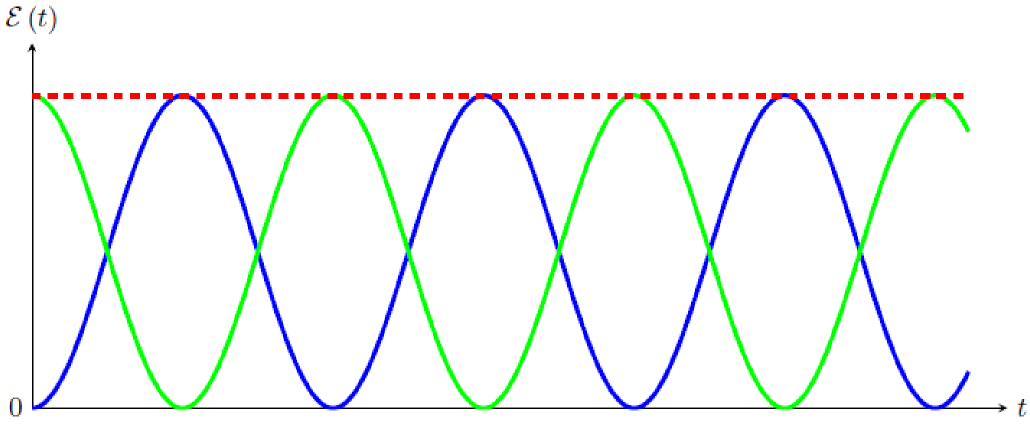
1. En appliquant la loi des mailles au circuit et en utilisant les lois de comportement des dipôles, montrer que la charge $q = Cu$ est solution de l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

2. Retrouver le même résultat par un bilan énergétique. On exprimera l'énergie électrique stockée dans le condensateur, l'énergie magnétique stockée dans la bobine, et on s'appuiera sur la conservation de l'énergie totale.

3. Le condensateur est initialement déchargé, l'intensité du courant qui circule dans le circuit vaut alors $i(t=0) = \mathrm{I}_0$ à l'instant initial. Résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales.

4. Le graphique ci-dessous représente l'évolution temporelle des énergies électrique et magnétique emmagasinées dans le circuit, ainsi que celle de l'énergie totale. Identifier ce que représente chacune des courbes et commenter.



1.2.2 Masse accrochée à un ressort linéaire en l'absence de frottement

Une approche dynamique permet d'établir qu'en l'absence de frottement, une masse accrochée horizontalement à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0 oscille sinusoïdalement autour de sa position d'équilibre,

$$l_{eq} = l_0,$$

avec une pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

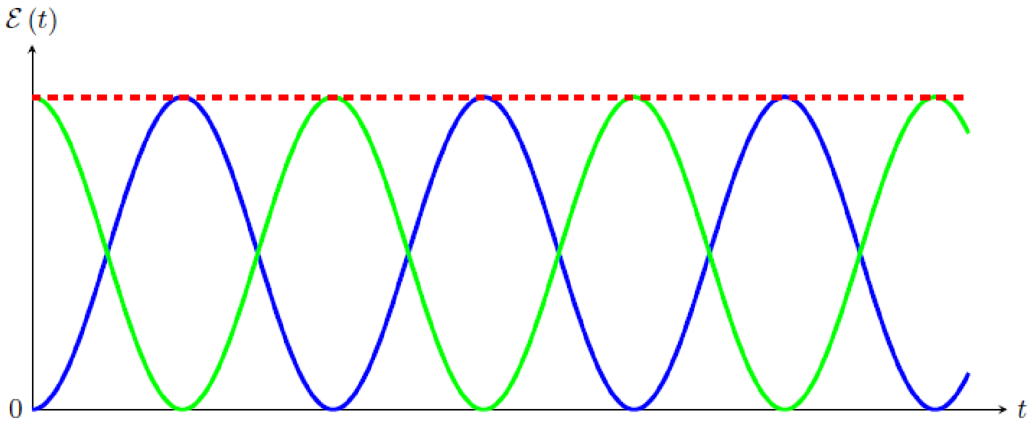
Exercice d'application 4 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Réaliser le bilan énergétique d'un oscillateur mécanique en absence de frottement en régime libre.

On considère le système décrit dans le paragraphe ci-dessus.

1. Exprimer l'énergie mécanique du système.
2. Justifier que l'énergie mécanique du système est conservée.
3. En déduire l'équation du mouvement. La mettre sous forme canonique.
4. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte des conditions initiales : on impose une vitesse initiale v_0 à la masse afin de l'écarter de sa position d'équilibre.
5. Le graphique ci-dessous représente l'évolution temporelle de l'énergie potentielle élastique, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique. Identifier chacune des courbes et commenter.



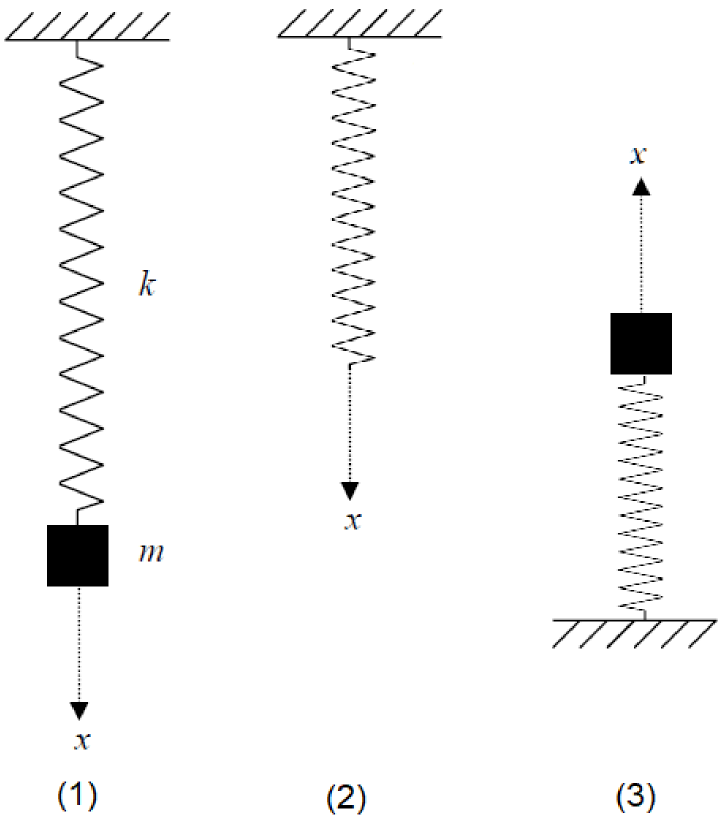
6. Dresser un tableau d'analogies entre ce système et le circuit LC.

Exercice d'application 5 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Déterminer, en s'appuyant sur des arguments physiques et une analyse dimensionnelle, la position d'équilibre et le mouvement d'une masse fixée à un ressort vertical.

Un ressort linéaire sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0 peut être suspendu verticalement à un bâti ou accroché à la verticale au-dessus d'un bâti, au choix. On décide d'accrocher ou non une masse m à ce ressort. On suppose que le mouvement est à un degré de liberté.

Les trois situations envisagées dans cet exercice sont schématisées ci-dessous :



1. En vous appuyant sur des arguments physiques et une analyse dimensionnelle, proposer une expression pour la longueur l_{eq} du ressort à l'équilibre dans chacune des trois situations.

2. Proposer, sans faire de calcul, une description mathématique du mouvement du centre de masse de la masse dans chacune des trois situations, en négligeant les frottements de l'air.

2 Oscillateur amorti en régime libre

Les situations dans lesquelles on rencontre le modèle de l'oscillateur harmonique en physique théorique ont en commun l'absence de prise en compte des phénomènes dissipatifs (**frottements**, **effet Joule**, etc...). Pour un meilleur accord avec l'expérience, il faut les ajouter, ce qui rend la résolution sensiblement plus complexe.

2.1 Régimes d'amortissement pour un oscillateur amorti

2.1.1 Analyse qualitative

Un système amorti non oscillant en régime libre (circuit RC lors de la phase de décharge, par exemple) est régi par une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = 0,$$

tandis qu'un système oscillant idéal modélisé par un oscillateur harmonique en régime libre (circuit LC par exemple) est régi par une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

La présence d'une dérivée d'ordre 1 dans la première équation différentielle traduit l'existence d'un phénomène dissipatif.

On devine alors que si on incorpore ce phénomène dissipatif à la description d'un oscillateur harmonique, on obtiendra une équation différentielle contenant à la fois une dérivée d'ordre 1 et d'ordre 2.

L'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle d'une grandeur associée à une version amortie de l'oscillateur harmonique en régime libre peut être mise sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

où Q est une grandeur positive sans unité appelée **facteur de qualité** de l'oscillateur amorti.

▹ On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique lorsque $\mathrm{Q} \to +\infty$. Les oscillations ne sont pas amorties et ont lieu pendant un temps infini.

▹ Une valeur de Q "élevée" est la marque d'un système fortement amorti. On s'attend à rencontrer un régime quasiment sinusoïdal, où des oscillations existent mais s'amortissent progressivement jusqu'à ne plus être visibles, au bout d'un temps "long".

▹ Une valeur de Q "faible" est la marque d'un système fortement amorti. On s'attend à ce que le système retourne à l'équilibre rapidement, sans osciller.

Pour visualiser l'effet du facteur de qualité sur l'évolution temporelle de x(t), on résout numériquement l'équation différentielle ci-dessus, pour des conditions initiales données.

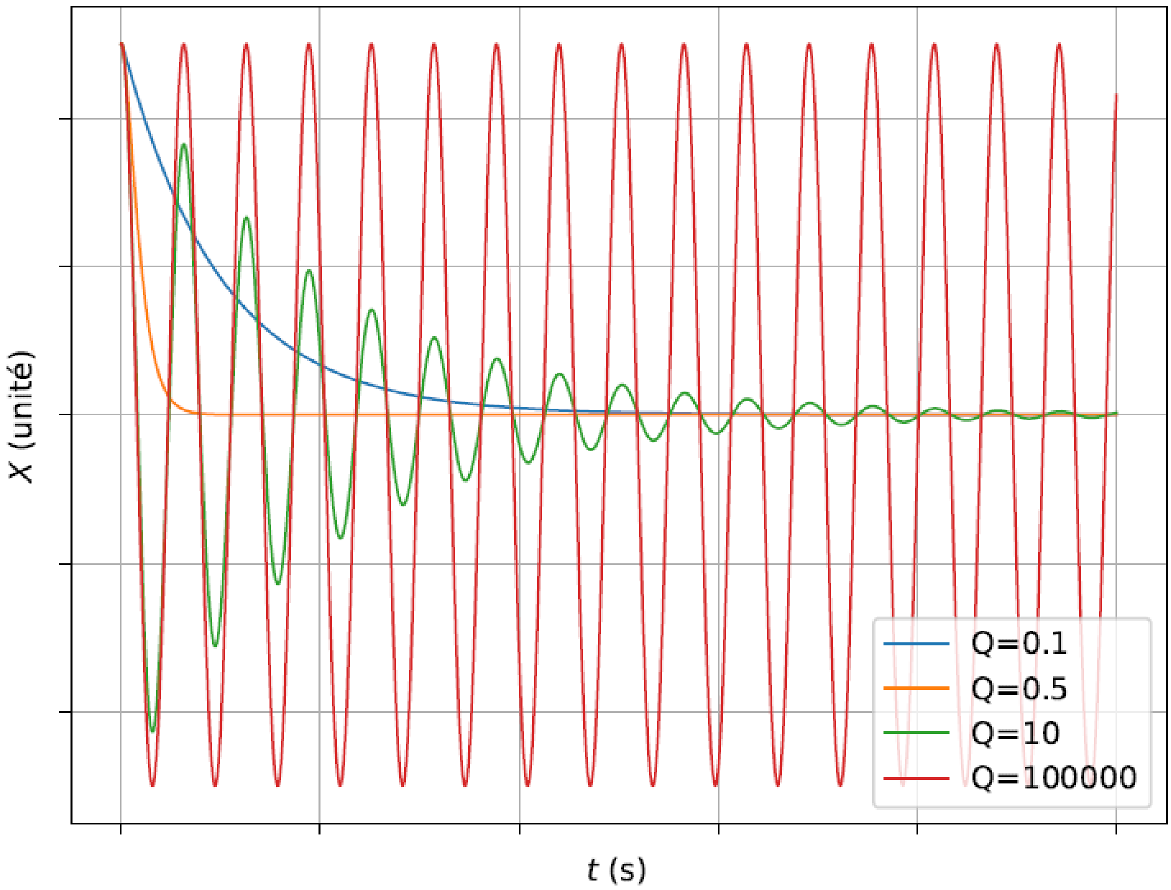


FIGURE 1 – Évolution temporelle d'un oscillateur amorti en régime libre pour différentes valeurs du facteur de qualité Q

On retrouve bien les comportements qualitatifs prédits plus haut. À cela s'ajoute qu'il existe apparemment une valeur de transition ($Q = 1/2$?) pour laquelle le retour à l'équilibre est le plus rapide.

2.1.2 Analyse quantitative par résolution de l'équation différentielle

On cherche à présent à résoudre explicitement l'équation différentielle associée à un oscillateur amorti.

On s'attend à avoir une combinaison de termes exponentiels (a priori décroissants en régime libre) et de termes oscillants, qui sont la partie réelle ou imaginaire d'une exponentielle avec un argument imaginaire pur (on rappelle que $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$).

La linéarité de l'équation suggère alors de chercher des solutions sous la forme

$$x(t) = e^{rt},$$

avec r un **nombre complexe**, et d'en écrire une combinaison linéaire à deux termes (car l'équation différentielle est du deuxième ordre) pour former des solutions réelles, ce qui est une condition nécessaire pour qu'elles aient un sens physique.

En injectant cette forme dans l'équation différentielle, on se ramène à une équation polynomiale, appelée **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

La nature (réelle ou complexe) des racines de ce polynôme de degré deux dépend du signe du discriminant

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right),$$

et donc de la valeur du facteur de qualité Q.

2.1.3 Régime pseudo-périodique

▹ Le cas où $\Delta < 0$, soit $Q > 1/2$, correspond à un régime peu amorti que l'on qualifiera de **pseudo-périodique**.

Les deux solutions de l'équation caractéristique sont alors de la forme

$$r_{1/2} = -\frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega_p,$$

avec i le nombre complexe imaginaire pur tel que $i^2 = -1$ et où

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

et

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

est une grandeur appelée **pseudo-pulsation** de l'oscillateur amorti.

La grandeur

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p},$$

appelée **pseudo-période** de l'oscillateur amorti, représente la durée de ses oscillations : elles sont régulières dans le temps mais d'amplitude décroissante.

La combinaison linéaire qui permet d'obtenir une solution réelle de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = \left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Les valeurs des constantes d'intégration A et B s'obtiennent à partir des conditions initiales.

On peut faire les remarques suivantes :

▹ En régime pseudo-périodique, on observe des oscillations (comme dans le cas harmonique) à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle décroissante qui traduit un amortissement progressif.

▹ On peut vérifier que la solution est bien de la forme proposée ci-dessus à titre d'exercice. Si on n'avait pas construit méthodiquement la solution mais deviné sa forme, on trouverait les expressions les expressions de ω_p et τ en imposant que le membre de droite de l'équation différentielle s'annule.

▹ Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, il existe une forme alternative équivalente :

$$x(t) = C\cos(\omega_p t + \phi)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On peut la voir comme un signal sinusoïdal de (pseudo-)période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$, d'amplitude variable (et décroissante) $C(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$.

▹ La pseudo-période, qui représente la durée des oscillations, est plus longue que la période propre en l'absence d'amortissement. Si $Q \gg 1$ on n'observe quasiment aucune différence entre les deux : $T_p \simeq T_0$.

▹ La durée τ_{rt} du régime transitoire, où les oscillations sont suffisamment fortes pour qu'on puisse les observer, est de l'ordre de 5τ, avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. Ainsi, le nombre d'oscillations qu'on peut observer avant amortissement complet est de l'ordre de

$$N \sim \frac{\tau_{rt}}{T_p} \sim Q$$

si $Q \gg 1$.

2.1.4 Régime apériodique

▹ Le cas où $\Delta > 0$, soit $Q < 1/2$, correspond à un régime que l'on qualifiera d'**apériodique**, car il n'y a pas de périodicité en l'absence d'oscillations. Il correspond à un régime fortement amorti.

Les deux solutions réelles de l'équation caractéristique sont de la forme :

$$r_{1/2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) < 0.$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

avec A et B des constantes d'intégration qu'on détermine grâce aux conditions initiales et où on a posé $\tau_1 = -\frac{1}{r_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$.

2.1.5 Régime apériodique critique

▹ Le cas où $\Delta = 0$, soit $Q = 1/2$, est purement théorique. On qualifie ce régime d'apériodique **critique**. C'est dans ce cas-là que l'amortissement est le plus rapide, on trouve alors que la solution est de la forme :

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}.$$

2.1.6 Résumé

Facteur de qualité	$Q > 1/2$	$Q = 1/2$	$Q < 1/2$
Régime	pseudo-périodique	critique	apériodique
$x(t) =$	$(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t))e^{-t/\tau}$	$(At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}$	$Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$

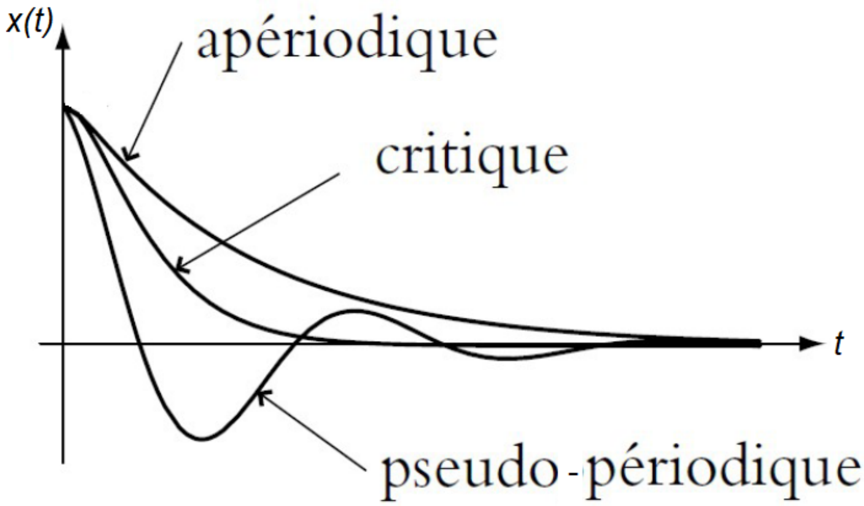
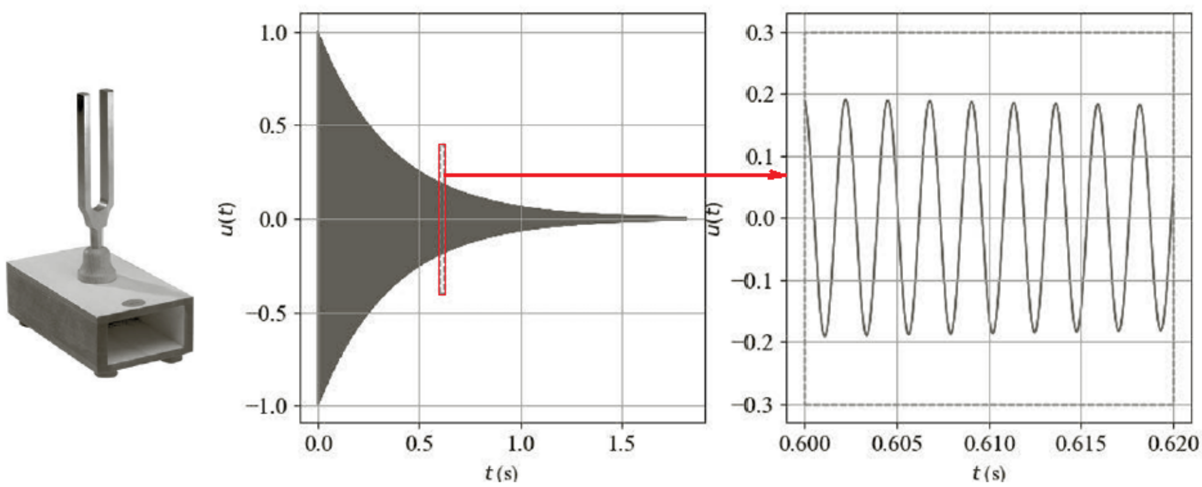


FIGURE 2 – Les trois régimes d'un oscillateur amorti

Exercice d'application 6 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

Un diapason peut être modélisé par un système masse-ressort amorti. L'amortissement provient principalement de la transmission des oscillations des tiges métalliques à l'air sous forme de vibration sonore. On a enregistré les vibrations des branches, un signal $u(t)$ proportionnel au déplacement de ces dernières s'affiche sur l'écran d'un oscilloscope.



1. Rappeler l'équation différentielle qui régit un oscillateur amorti sous forme canonique, en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

2. À partir de l'enregistrement représenté ci-dessus, identifier le type de régime amorti et estimer le facteur de qualité Q.

3. Déterminer graphiquement la pseudo-période T_p et en déduire la valeur de la pseudo-pulsation ω_p.

4. Relier la pseudo-pulsation à la pulsation propre. Calculer ω_0 puis la période propre T_0 et la fréquence f_0 ; commenter.

5. Déterminer par le calcul l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire et comparer à une valeur estimée expérimentalement.

2.2 Autres exemples d'oscillateurs amortis en physique

2.2.1 Circuit RLC

Exercice d'application 7 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

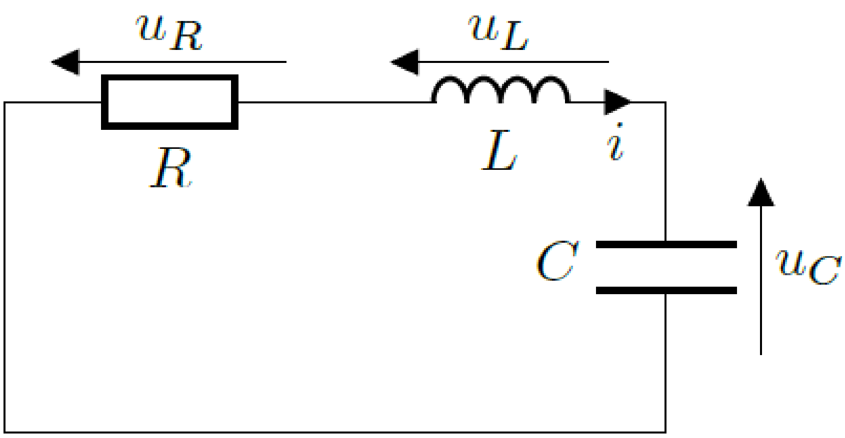
Décrire la nature de la réponse en fonction du facteur de qualité.

Établir l'expression de la réponse dans le cas d'un régime libre.

Réaliser le bilan énergétique du circuit RLC série.

Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Soit un **circuit RLC série** en régime libre (ce qui se traduit par l'absence de générateur dans le circuit).



1. En vous appuyant sur la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle que vérifie la tension u_C peut s'écrire sous la forme canonique

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0.$$

Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de L et C, puis le facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.

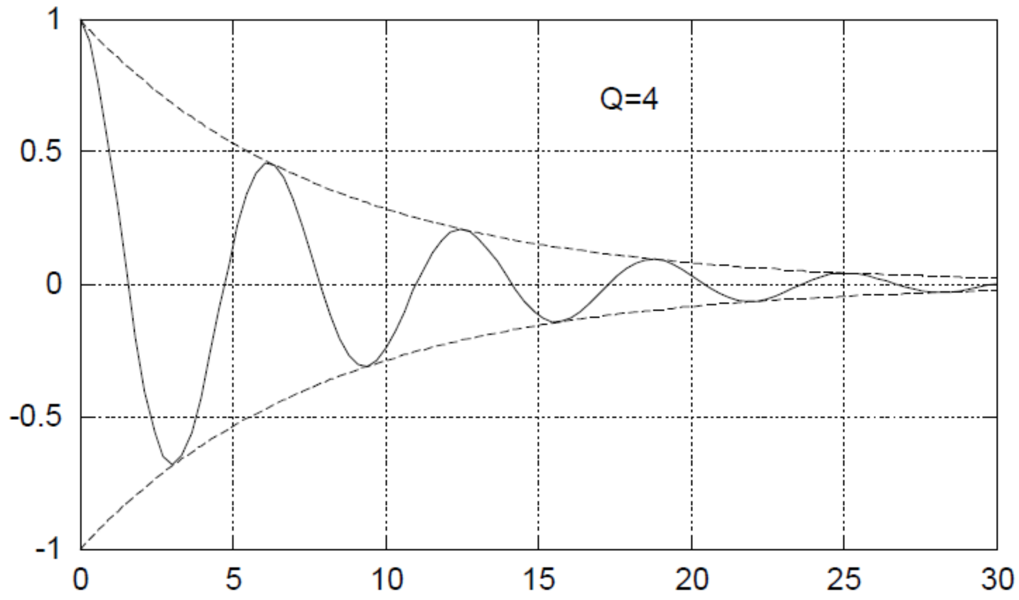


FIGURE 3 – Décharge du condensateur : tension en fonction du temps pour $Q = 4$. Les échelles sont normalisées : $u_C(t)/(q_0/C)$ en ordonnée, et $\omega_0 t$ en abscisse.

2. Résoudre l'équation différentielle dans le cas où le facteur de qualité vaut $Q = 4$. Vous tiendrez compte des conditions initiales, qui sont $q(t=0) = q_0$ et $i(t=0) = 0$.

3. Réaliser le bilan énergétique du circuit RLC série. Vous montrerez que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = -Ri^2$$

et interpréterez chacun des termes. Prévoir qualitativement l'évolution de l'énergie totale stockée dans le système.

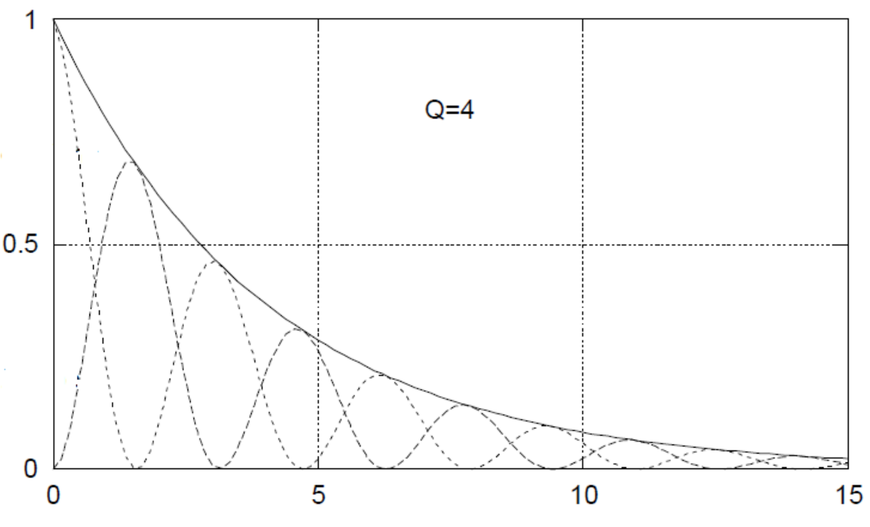


FIGURE 4 – Décroissance de l'énergie dans un circuit RLC série. Les échelles sont normalisées : énergie $E/E(t=0)$ en ordonnée, et $\omega_0 t$ en abscisse

4. On a représenté ci-dessus l'évolution de l'énergie totale, de l'énergie stockée dans le condensateur et de l'énergie stockée dans la bobine. Identifier chacune des trois courbes, en justifiant votre réponse.

2.2.2 Mouvement amorti par frottement visqueux d'une masse accrochée à un ressort

On considère un objet de masse m modélisé par un point matériel M, relié à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0, lui-même accroché à un bâti au point O. Pour simplifier l'analyse, on considère que ce ressort est horizontal et que le point M se déplace le long d'un axe (Ox) au cours de son mouvement.

Pour tenir compte de l'amortissement, on ne néglige pas les frottements fluides, qui sont modélisés par une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse du point M dans le référentiel du laboratoire.
On néglige les frottements solides.

On écarte la masse de sa position d'équilibre de $u_0 = x_0 - l_{eq}$, puis on la lâche sans vitesse initiale.

1. Montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement est celle d'un oscillateur amorti, la mettre sous forme canonique en identifiant les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité en fonction des données du problème.
2. Construire un tableau d'analogies avec le circuit RLC.