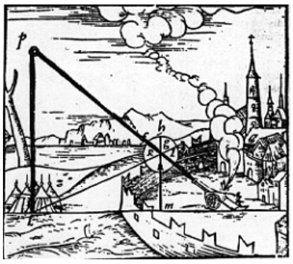
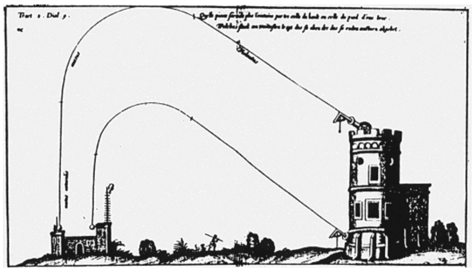
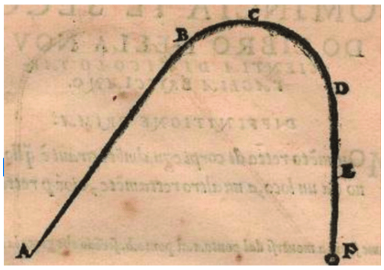
TP17 : Simuler une chute

CAPACITÉS NUMÉRIQUES TRAVAILLÉES :
Tracer la trajectoire d'un point matériel dans le cas d'une chute en présence de frottements.
Utiliser la bibliothèque matplotlib pour représenter un nuage de points.
Mettre en œuvre la méthode d'Euler afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.

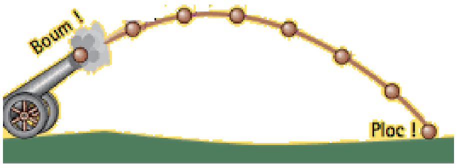
MATÉRIEL : Ordinateur avec Python.

Les armes à feu et les canons ont révolutionné la pratique de la guerre en Occident à partir du 14^e siècle, mais leur utilisation était au départ empirique : on utilisait des tables pour déterminer les angles de visée et la quantité de poudre nécessaire en fonction de la distance à la cible notamment. Un des premiers buts de la mécanique a été de décrire, puis d'expliquer et de prédire la trajectoire des boulets.

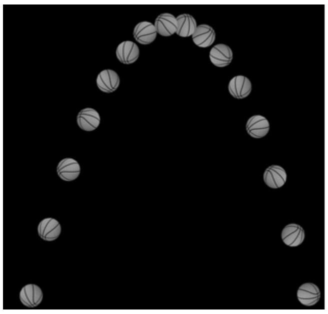
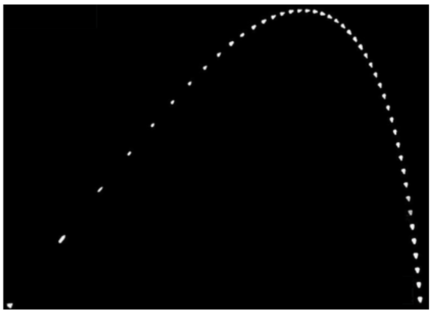
Les illustrations ci-dessous sont issues de traités antérieurs aux travaux de Galilée.

On n'y reconnaît pas la trajectoire parabolique décrite par Galilée dès 1638, puis prédite par Newton dans le cas d'une chute libre.

Les deux types de trajectoires illustrés plus haut peuvent être observés quand on réalise des chronophotographies de tirs dans les sports contemporains, ci-dessous le basket-ball et le badminton.

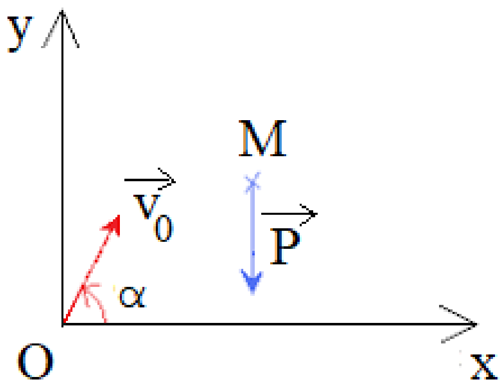



Pour expliquer les trajectoires non paraboliques, il va nous falloir prendre en compte les frottements fluides.

PROBLÉMATIQUE :
Comment les frottements fluides affectent-ils la trajectoire lors d'une chute dans un champ de pesanteur uniforme ?

Dans tout ce qui suit, nous paramétrerons le problème ainsi :

On se donne un repère cartésien direct (Oxy), où l'axe (Ox) est horizontal. Le boulet, modélisé par un point matériel M, est tiré depuis l'origine du repère avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Il chute alors dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.



Dans un premier temps, on néglige les frottements fluides dus à l'air, ce qui revient à faire l'étude dans le cadre de la chute libre.

1 Chute libre

<u>Protocole 1 :</u>
- Ouvrir le programme Python intitulé "programme 1", à télécharger sur Cahier de Prépa.
- Analyser son fonctionnement (par exemple, en modifiant les valeurs des paramètres). Commenter les lignes de code (pour rappel, un commentaire est séparé de la ligne de code correspondante par le symbole #).

Q1. Appeler l'enseignant pour lui expliquer le fonctionnement du code.
Q2. Décrire la trajectoire du centre de masse du boulet.

On souhaite à présent justifier certaines observations théoriquement.

Q3. Établir les équations horaires du mouvement du centre de masse du boulet :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t \tag{1}$$

et

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t. \tag{2}$$

Q4. En déduire que le mouvement est parabolique, d'équation

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2(\alpha))x^2 + \tan(\alpha)x. \quad (3)$$

Q5. Montrer que la portée horizontale du tir vaut

$$d = \frac{2v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}. \quad (4)$$

Q6. Montrer qu'un tir vertical permet au centre de masse du boulet d'atteindre l'altitude

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (5)$$

Q7. Tester l'accord entre l'équation (4) et la simulation lorsque $v_0 = 10$ m·s^{-1} et $\alpha = 45°$. Appeler l'enseignant pour validation.

Q8. Tester l'accord entre l'équation (5) et la simulation lorsque $v_0 = 10$ m·s^{-1}. Appeler l'enseignant pour validation.

Protocole 2 :

— Ouvrir le programme Python intitulé "programme 2", à télécharger sur Cahier de Prépa.

— Analyser son fonctionnement (par exemple, en modifiant les valeurs des paramètres). Commenter les lignes de code.

Q9. Appeler l'enseignant pour lui expliquer le fonctionnement de ce nouveau code.

Q10. On appelle "courbe de sécurité" la courbe au-dessus de laquelle il faut se placer pour être certain de ne pas être atteint par le boulet pour une vitesse initiale de tir donnée. Au vu de la simulation, formuler une hypothèse quant à la nature de cette courbe.

Q11. On constate que deux angles de tir différents α et β peuvent donner lieu à la même portée. En vous appuyant sur la simulation, formuler une hypothèse quant au lien qui existe entre ces angles α et β.

Q12. En vous appuyant sur le programme Python, formuler une hypothèse quant à la valeur de l'angle α qui maximise la portée pour une vitesse initiale donnée.

Q13. Démontrer les résultats conjecturés dans les questions **Q10** à **Q12** en vous appuyant sur les équations établies précédemment.

2 Chute avec frottements

Pour étudier une chute en présence de frottements fluides, on ajoute au bilan des forces une force de frottement fluide. Cette dernière peut être :

▹ fonction linéaire de la vitesse, autrement dit de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, avec α un coefficient de proportionnalité appelé coefficient de frottement. Ce modèle est privilégié lorsque la vitesse est "faible".

▹ fonction quadratique de la vitesse, autrement dit de la forme $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$, avec β un coefficient de frottement. Ce modèle est privilégié lorsque la vitesse est "élevée".

Le but de cette partie est de visualiser l'impact d'un terme de frottement linéaire ou quadratique sur la trajectoire.

Protocole 3 :

- Ouvrir le programme Python intitulé "programme 3", à télécharger sur Cahier de Prépa.
- Analyser son fonctionnement (par exemple, en modifiant les valeurs des paramètres). Commenter les lignes de code.

Q14. Appeler l'enseignant pour lui expliquer le fonctionnement de ce code.

Q15. Décrire qualitativement l'effet d'un terme de frottement linéaire sur la trajectoire et sur la portée du tir.

Protocole 4 :

- Ouvrir le programme Python intitulé "programme 4", à télécharger sur Cahier de Prépa.
- Analyser son fonctionnement (par exemple, en modifiant les valeurs des paramètres). Commenter les lignes de code.

Q16. Appeler l'enseignant pour lui expliquer le fonctionnement de ce code.

Q17. Décrire l'effet d'un terme de frottement quadratique sur la trajectoire et sur la portée du tir.