

## CHAPITRE 16

### Solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans les chapitres précédents, le système dont on étudiait le mouvement était systématiquement modélisé par un **point matériel** situé en son centre de masse.

Si le système est un solide en **translation**, il conserve son orientation et tous les points du système ont le même mouvement. Si on connaît celui du centre de masse, on connaît celui de tous les autres.

En dehors de ce cas particulier, avec une approche limitée à la mécanique du point, on perd de l'information sur le mouvement. C'est la raison pour laquelle ont été développées deux branches de la mécanique classique :

- ▷ en **mécanique des fluides**, on étudie les écoulements des gaz et des liquides ;
- ▷ en **mécanique du solide**, on étudie le mouvement de tous les points d'un solide.

Ce chapitre constitue une initiation à la mécanique du solide. Pour construire cette théorie, l'approche classique consiste à s'intéresser dans un premier temps à un système limité à un seul point, puis à plusieurs points, puis à regarder ce qu'il se passe quand le nombre de points tend vers l'infini.

On décompose par la pensée le mouvement en plusieurs mouvements plus simples :

- ▷ une **translation**, qui est un déplacement d'ensemble sans changer d'orientation ;
- ▷ des **rotations**, définies comme des mouvements au cours desquels tous les points d'un solide tournent autour d'un axe en conservant une distance fixe par rapport à ce dernier : ils ont une trajectoire circulaire ;
- ▷ des **déformations** : le système peut par exemple être élastique, ou encore décomposé en un ensemble de solides indéformables articulés par des liaisons.

Nous nous focaliserons sur le cas d'un **solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen**, qui permet de modéliser le mouvement d'un très grand nombre de systèmes rencontrés au quotidien : porte qui s'ouvre, tambour d'une machine à laver, barrière de péage, hélice d'un hélicoptère avant décollage, forêt d'une perceuse, aiguille d'une montre, carroussel, etc.

En guise d'ouverture, nous étudierons en fin de chapitre un **système déformable**, afin de mettre en évidence le rôle des actions internes dans son mouvement.

Nous aborderons le mouvement sous l'angle de la cinématique, puis de la dynamique, et enfin de l'énergétique.

## 1 Cinématique du solide en rotation

Dans tout ce chapitre, nous considérerons qu'un **solide** désigne un **système indéformable** : la distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante au cours du mouvement.

### Exercice d'application 1 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

*Décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.*



Le système solide dont on étudie le mouvement est en rotation autour d'un axe  $(\Delta) = (Oz)$ , fixe dans le référentiel d'étude. Pour fixer les idées, ce système est supposé cylindrique, sans perte de généralité dans les résultats que nous établirons.

1. Décrire le mouvement, puis la trajectoire d'un point quelconque du solide situé sur l'axe de rotation.
2. Justifier qu'on peut restreindre l'étude du mouvement du solide aux points situés dans un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe de rotation.

Dans ce qui suit, nous étudions les points du solide situés dans un plan  $(Oxy)$ , perpendiculaire à l'axe de rotation.

3. Décrire le mouvement, puis la trajectoire d'un point M du solide, situé dans le plan  $(Oxy)$ .
4. Identifier le système de coordonnées le plus adapté pour étudier son mouvement.
5. Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du point M dans ce système de coordonnées.
6. On note  $\omega = \dot{\theta}$  la **vitesse angulaire** autour de l'axe  $(\Delta)$ . Justifier qu'elle est la même pour tous les points du solide. Donner son unité dans le système international d'unités.
7. Réécrire le résultat de la question 5 en faisant apparaître la vitesse angulaire. Caractériser alors un mouvement de rotation uniforme en termes de vitesse angulaire, puis de sa dérivée par rapport au temps.
8. Décrire le mouvement du point M dans les cas suivants :  $\omega > 0$ ,  $\omega = 0$  et  $\omega < 0$ .

La **vitesse angulaire de rotation** d'un solide en rotation autour d'un axe est une **grandeur algébrique**, définie par analogie avec la **vitesse** :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

et l'**accélération angulaire**, qui ne possède pas de symbole particulier, par analogie avec l'**accélération** :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Tous les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe qui sont situés hors de l'axe ont la même vitesse angulaire et la même accélération angulaire.

Si le point M est situé à une distance R de l'axe de rotation, alors en coordonnées polaires ou cylindriques sa vitesse vaut :

$$\vec{v} = R\omega \vec{u}_\theta.$$

Ainsi, les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ont une vitesse d'autant plus élevée qu'ils se trouvent loin de cet axe. La valeur de la vitesse est proportionnelle à la distance à l'axe de rotation :

$$v = R\omega.$$

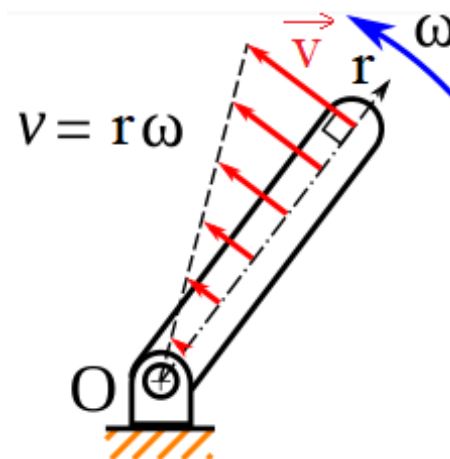


FIGURE 1 – Illustration du lien entre vitesse angulaire et vitesse

L'accélération d'un point M du solide hors de l'axe de rotation vaut :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 \vec{u}_r + R\frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta.$$

## 2 Dynamique du solide en rotation

Par rapport à la dynamique du point, celle d'un solide en rotation nécessite d'introduire de nouvelles notions, comme le laissent deviner les considérations suivantes :

► La seule notion de force ne permet plus de comprendre le mouvement dans sa globalité. Quand on retient une porte qui se ferme, il est d'autant plus facile de le faire qu'on appuie loin de son axe de rotation : la distance à l'axe de rotation doit intervenir dans la construction d'une grandeur qui traduit l'intensité de l'action mécanique exercée sur le solide.

► À masse égale, il est plus difficile de mettre en mouvement de rotation ou d'arrêter un solide en rotation que cette masse est répartie loin de l'axe : la répartition géométrique de la masse du solide autour de l'axe de rotation semble importante pour caractériser l'inertie.

► La deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse d'un solide homogène,  $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ , ne donne aucune information utile sur le mouvement du solide si le centre de masse est situé sur l'axe. Existe-t-il néanmoins une formule analogue, faisant intervenir une grandeur modélisant les actions mécaniques, une grandeur caractérisant l'inertie, et la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire de rotation ?

▷ En dynamique du point, on définit la quantité de mouvement  $\vec{p} = m\vec{v}$  : la deuxième loi de Newton s'écrit alors  $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . Existe-t-il une grandeur analogue à la quantité de mouvement dans le cas d'un mouvement de rotation ?

Comme dans le chapitre sur l'énergétique du point matériel, nous allons construire les grandeurs physiques pertinentes en nous appuyant sur des exemples et des expériences de pensée, puis nous établirons les lois de la physique qui décrivent la dynamique d'un solide en rotation.

## 2.1 Moment d'une force

### Exercice d'application 2 :

Une clé allen est une tige coudée qui permet notamment de serrer et de desserrer des boulons à tête hexagonale creuse. Indispensable dans une trousse à outils, elle permet de monter les meubles en kit.

On peut tenir la clé allen de deux façons pour effectuer un vissage : par la petite tige ou par la grande tige. Les deux situations sont illustrées ci-dessous.

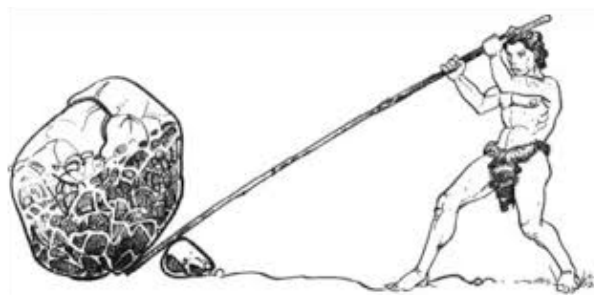


1. Laquelle des deux situations demande le moins d'effort pour effectuer un vissage ? En déduire deux grandeurs physiques pertinentes pour décrire l'efficacité du vissage. Quelle opération mathématique pourrait-on effectuer pour construire une nouvelle grandeur qui les regroupe ?

2. Expliquer dans quelle situation on privilégie chaque technique de vissage.

### Exercice d'application 3 :

Un levier est un dispositif qui permet de soulever de lourdes charges en fournissant un effort modéré. Dans sa version la plus simple, il est composé d'une barre (que nous considérerons rigide pour simplifier) en appui sur un point fixe.



1. Identifier les forces qui s'exercent sur le levier.

2. Expliquer qualitativement le principe de fonctionnement, en vous appuyant sur la grandeur construite dans l'exercice précédent.

3. Quelle doit être la direction de la force appliquée par l'opérateur pour maximiser l'efficacité du levier ? Quelle est sa direction lorsqu'elle est la moins efficace ? Proposer alors une modification à apporter à la grandeur construite dans l'exercice précédent pour en tenir compte.

4. Quel doit être le sens de la force exercée par l'opérateur pour qu'elle soit efficace ?

### 2.1.1 Bras de levier et moment scalaire d'une force

Les exercices d'application ci-dessus mettent en évidence l'importance de la notion de **bras de levier**, définie comme la distance  $d$  entre la droite d'application de la force et l'axe de rotation du solide.

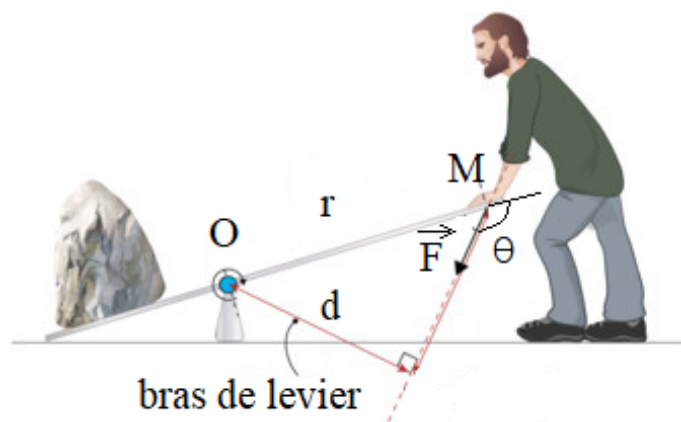


FIGURE 2 – Définition du bras de levier (en lien avec un levier)

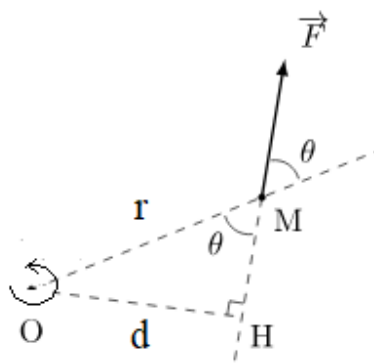


FIGURE 3 – Définition du bras de levier (plus abstraite)

L'expérience montre que :

▷ pour une force d'intensité donnée, l'action de cette force est d'autant plus efficace que le bras de levier a une valeur élevée : le produit du bras de levier et de l'intensité de la force,  $d \times F$ , rend bien compte de l'efficacité de l'action mécanique ;

▷ si l'angle  $\theta$  entre le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  et la force  $\vec{F}$  est compris entre 0 et  $\pi$ , l'action mécanique a tendance à faire tourner la solide dans le sens trigonométrique ;

s'il est compris entre  $\pi$  et  $2\pi$ , elle a tendance à le faire tourner dans le sens horaire : on peut définir une grandeur algébrique  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$  qui vaut  $+d \times F = rF \sin(\theta)$  dans le premier cas et  $-d \times F = rF \sin(\theta)$  dans le second cas. On l'appelle **moment scalaire de la force  $\vec{F}$  par rapport à l'axe de rotation ( $\Delta$ )**. La présence du sinus est en accord avec la discussion faite plus haut sur l'efficacité de l'action mécanique en fonction de l'angle  $\theta$ .

### 2.1.2 Moment d'une force

On introduit une grandeur de nature vectorielle dont le moment scalaire constitue une projection sur un vecteur unitaire de l'axe de rotation.

Le **moment (dynamique) d'une force  $\vec{F}$**  (qui s'applique au point M) par rapport à un point O est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

où  $\wedge$  désigne le **produit vectoriel**.

On rappelle que si  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  sont trois vecteurs tels que  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$ , alors par définition

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times |\sin(\theta)|$$

où  $\theta$  est l'angle formé par les vecteurs  $\|\vec{A}\|$  et  $\|\vec{B}\|$ .

Par ailleurs, les vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  forment un **trièdre direct** (orienté suivant la **règle de la main droite**).

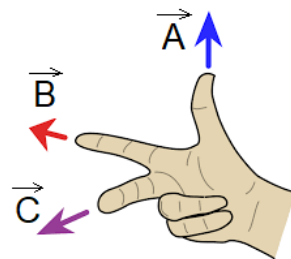


FIGURE 4 – Illustration de la règle de la main droite

Le moment d'une force a une norme d'autant plus grande que :

- ▷ la norme de la force est élevée ;
- ▷ le point M est éloigné du point O qui sert de référence ;
- ▷ le vecteur position et le vecteur force forment un angle proche de  $90^\circ$  en valeur absolue.

L'essentiel à retenir est l'information contenue dans la direction et le sens de ce vecteur : la force a tendance à faire tourner le point M autour du point O dans le sens positif dans un plan perpendiculaire au moment de la force si  $\theta$  est positif : le moment scalaire est alors positif.

### 2.1.3 Résumé : lien entre moment d'une force, moment scalaire et bras de levier

Par construction, le moment scalaire de la force  $\vec{F}$  par rapport à l'axe de rotation ( $\Delta$ ) vérifie :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = Fr \sin(\theta) = \pm Fd.$$

## 2.2 Moment cinétique par rapport à un point (H.P.)

Notre but est toujours de construire une loi de la physique analogue à la deuxième loi de Newton.

On a vu plus haut que le moment d'une force par rapport à un point O est un candidat pour remplacer la force  $\vec{F}$ . Au vu de la façon dont elle est construite, on devine la forme de la grandeur qui pourrait intervenir dans le membre de droite. On commence par la construire dans le cadre de la dynamique du point, pour généraliser ensuite au solide en rotation autour d'un axe fixe.

On introduit une grandeur vectorielle, appelée **moment cinétique d'un point M par rapport à un point O**, notée  $\vec{L}_O(M)$  et définie par :

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}.$$

où  $\vec{p} = m\vec{v}$  est la **quantité de mouvement** du point M.

Le vecteur moment cinétique a une norme d'autant plus grande que :

- ▷ la masse  $m$  est élevée ;
- ▷ le point M est éloigné du point O qui sert de référence ;
- ▷ la norme du vecteur vitesse est élevée ;
- ▷ le vecteur position et le vecteur vitesse forment un angle proche de  $90^\circ$  en valeur absolue.

Le moment cinétique est une grandeur relativement complexe, qui code beaucoup d'information. L'essentiel à retenir est l'information contenue dans la direction et le sens de ce vecteur : localement, le point M est en train de tourner autour du point O dans le sens positif dans un plan perpendiculaire au moment cinétique si cette grandeur est dans le même sens que le vecteur unitaire de l'axe, et dans le sens négatif si elle est dans le sens opposé.

Pour visualiser, si on prend la main droite et qu'on lève le pouce qui représente le moment cinétique, alors les quatre autres doigts, quand on les plie, tournent dans le même sens que le point M autour du point O.

## 2.3 Théorème du moment cinétique pour un point matériel (H.P.)

Le lien entre le moment cinétique et le moment dynamique est donné par le **théorème du moment cinétique**, énoncé ci-dessous :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O est égale au moment par rapport au point O de la somme des forces qui s'exercent sur le point M :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O\left(\sum \vec{F}\right).$$

Ce résultat se démontre à partir des définitions et de la deuxième loi de Newton. Il est utile en mécanique du point pour justifier que les orbites des planètes sont planes dans le référentiel héliocentrique : comme elles sont soumises à la force de gravitation exercée par le Soleil, colinéaire à  $\vec{OM}$ , le moment cinétique reste constant, ce qui implique que le vecteur vitesse et le vecteur position restent dans un même plan. On peut aussi l'utiliser pour démontrer la **deuxième loi de Kepler**.

Concrètement, le **théorème du moment cinétique** constitue une alternative intéressante à la **deuxième loi de Newton** et aux **théorèmes énergétiques** pour établir l'équation du mouvement dans le cas d'un mouvement circulaire.

Pour obtenir une équation scalaire, on projette l'équation vectorielle sur le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  d'un axe  $\Delta$ , si celle-ci reste fixe. On obtient alors le **théorème du moment cinétique scalaire** :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \left( \sum \vec{F} \right) = rF \sin(\theta) = \pm dF,$$

où la grandeur  $d$  dans le membre de droite est le **bras de levier** de la force par rapport à l'axe  $\Delta$ . Le signe est positif si la force tend à faire tourner M dans le sens positif autour de l'axe  $(\Delta)$ , et négatif sinon.

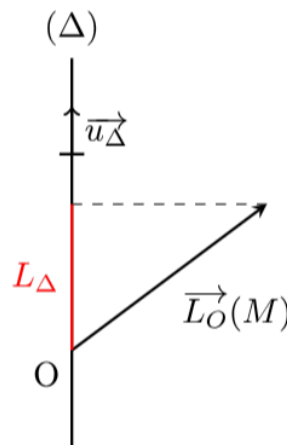


FIGURE 5 – Illustration : moment cinétique scalaire

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, où  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, qui a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe  $\Delta$ ,  $L_\Delta = mrv = mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega$ , où  $\omega$  est la vitesse angulaire. On appelle **moment d'inertie** du point matériel M par rapport à l'axe  $\Delta$  la grandeur  $J_\Delta = mr^2$ , qui est le coefficient de proportionnalité entre le moment cinétique scalaire et la vitesse angulaire.

On peut alors réécrire le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à un axe  $\Delta$  sous la forme :

$$\frac{d(J_\Delta \omega)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \left( \sum \vec{F} \right).$$

et si le mouvement est circulaire,

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \left( \sum \vec{F} \right).$$



## 2.4 Théorème du moment cinétique scalaire pour un solide

On généralise les résultats obtenus plus haut à un solide en rotation autour d'un axe fixe. Pour ce faire, on considère que le solide est un ensemble de points.

Le **moment d'inertie**  $J_{\Delta}$  d'un solide par rapport à un axe de rotation fixe  $\Delta$  est une grandeur qui quantifie l'inertie, autrement dit la résistance du solide, à une mise en rotation autour de cet axe ou à un ralentissement de cette rotation. Sa valeur est d'autant plus élevée que la masse totale du solide est élevée et que les différents éléments de masse constituant le solide sont éloignés de cet axe.

Si le système est modélisé par un ensemble discret de points matériels de masses  $m_i$  situés à des distances  $r_i$  de l'axe  $\Delta$ , alors par définition :

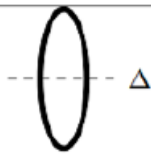
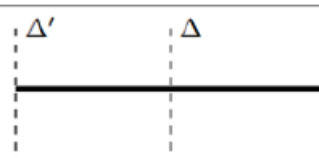
$$J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2.$$

Si le système est modélisé par un ensemble continu de points matériels de masses élémentaires  $dm$  situés à des distances  $r$  variables de l'axe  $\Delta$ , alors on obtient une somme continue, autrement dit une intégrale :

$$J_{\Delta} = \int_{(S)} r^2 dm.$$

Cette intégrale est simple si le solide est modélisé par une courbe plane, double s'il est modélisé par une surface plane, et triple s'il est modélisé par un volume.

Pour les géométries les plus simples, l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe est tabulée.

| cylindre vide de rayon $R$                                                          | cylindre plein de rayon $R$                                                         | sphère (vide) de rayon $R$                                                            | boule (pleine) de rayon $R$                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |   |  |
| $J_{\Delta} = mR^2$                                                                 | $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$                                                      | $J_{\Delta} = mR^2$                                                                   | $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$                                                        |
| cercle de rayon $R$                                                                 | disque de rayon $R$                                                                 | barre de longueur $L$                                                                 |                                                                                       |
|  |  |  |                                                                                       |
| $J_{\Delta} = mR^2$                                                                 | $J_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}$                                                       | $J_{\Delta'} = \frac{1}{3}mL^2$                                                       | $J_{\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$                                                       |

### Exercice d'application 1 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

*Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.*

1. Justifier qualitativement l'évolution des moments d'inertie dans le tableau ci-dessus, en lien avec la distribution de la masse autour de l'axe de rotation du solide.

2. Parmi ces moments d'inertie, lesquels peuvent être calculés le plus facilement ?

Le **moment cinétique scalaire**  $L_{\Delta}$  d'un solide par rapport à son axe de rotation est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  :

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega.$$

Cette grandeur est d'autant plus grande (en valeur absolue) que :

- ▷ la distribution de masse se concentre à grande distance de l'axe ;
- ▷ la vitesse de rotation est élevée.

Le **théorème du moment cinétique scalaire** par rapport à l'axe  $\Delta$  indique que pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique scalaire par rapport à cet axe est égale au moment scalaire des forces par rapport à cet axe :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}).$$

Il est plus utile sous la forme faisant apparaître le moment d'inertie et la vitesse de rotation, ainsi que le bras de levier :

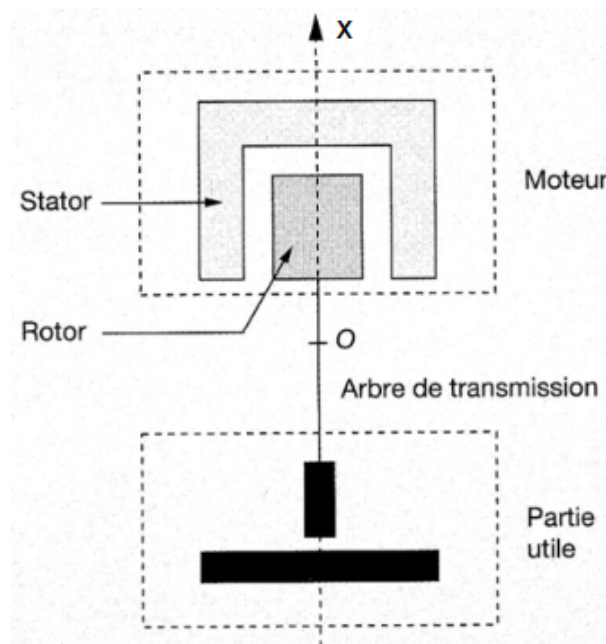
$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = rF \sin(\theta) = \pm dF.$$

#### Exercice d'application 4 :

##### CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

*Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.*

*Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté, en privilégiant l'utilisation du bras de levier.*



On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (par exemple une perceuse). Le **rotor**, partie tournante du moteur, entraîne la partie

tournante utile de la machine grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté (Ox). La vitesse angulaire de rotation du rotor autour de cet axe orienté est notée  $\omega$ , avec  $\omega > 0$ .

La partie fixe du moteur (le **stator**) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple (qui est de même nature qu'un moment) dont la valeur en projection sur  $\vec{u}_x$  est  $\mathcal{M}_s > 0$ .

1. Déterminer le signe du couple  $\mathcal{M}_u$  exercé par la partie utile tournante sur le rotor.

Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux (huile) dont l'action sur le rotor se ramène à un couple  $\mathcal{M}_f = -\alpha\omega$ . On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de sorte que leur moment projeté sur  $\vec{u}_x$ , noté  $\mathcal{M}_c$ , est nulle (c'est ce qu'on appellera une liaison pivot parfaite). On note J le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\omega(t)$ .

3. En supposant que  $\mathcal{M}_s$  et  $\mathcal{M}_u$  sont constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de  $\omega(t)$  sachant qu'on met le rotor en marche à l'instant  $t = 0$ .

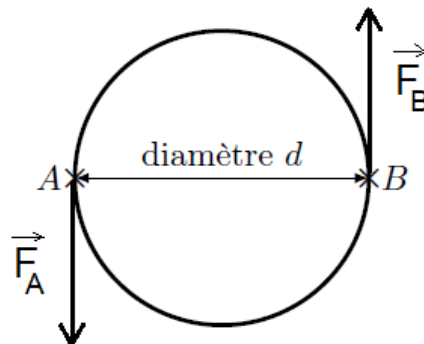
4. En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Commenter.

5. Que dire des valeurs relatives des couples  $\mathcal{M}_s$  et  $\mathcal{M}_u$  ?

## 2.5 Couple de forces

Deux forces dont la résultante est nulle peuvent avoir un effet sur le mouvement, à condition de ne pas avoir le même point d'application. Il faut alors que ces forces aient un moment global non nul.

Un cas simple est celui de deux forces opposées  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ , appliquées en deux points A et B diamétralement opposés d'un volant :



Ici,  $\mathcal{M}_\Delta = dF$ , où  $\Delta$  est l'axe de rotation du volant orienté "vers le haut" et F est la norme commune à chacune de ces deux forces.

On appelle **couple de forces** un ensemble de forces dont la résultante est nulle mais dont le moment total est non nul :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0},$$

$$\sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \neq \vec{0}.$$

En sciences de l'ingénieur, le torseur dynamique a sa première composante nulle et la seconde non nulle. On peut définir un couple sans référence à la moindre force.

## 2.6 Liaison pivot

Une **liaison pivot** est une liaison entre un bâti fixe et une pièce mobile, ne donnant à celle-ci qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ .

Pour un **pivot parfait**, le moment scalaire par rapport à l'axe  $\Delta$  est nul.

En présence de frottements, on introduirait un couple de frottement, de moment scalaire par rapport à l'axe  $\Delta$  non nul.

### Exercice d'application 5 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

*Définir une liaison pivot et justifier la valeur du moment qu'elle peut produire.*

*Déterminer l'équation du mouvement, le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation étant donné.*

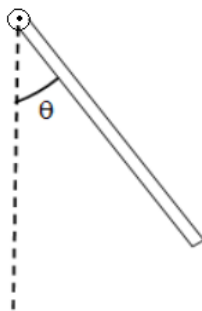
*Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.*

Un **pendule pesant** est un solide en liaison pivot avec un bâti horizontal. Il peut osciller sous l'effet du poids.

On considère un pendule pesant constitué d'une tige métallique dont la répartition de masse est homogène, attachée au point O et pouvant osciller librement dans un plan vertical. La tige, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , est supposée en liaison pivot parfait autour d'un axe (Ox). Sa position est repérée par l'angle  $\theta$  formé par la verticale descendante et la tige.

On note  $J$  le moment d'inertie du pendule pesant par rapport à l'axe (Ox).

On lâche le pendule pesant sans vitesse initiale depuis un angle initial  $\theta_0$ .



1. Définir une liaison pivot, puis une liaison pivot parfait, et en déduire le moment, par rapport à l'axe (Ox), associé à la liaison pivot.
2. Déterminer l'expression du moment scalaire du poids par rapport à l'axe (Ox).
3. Appliquer le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe (Ox) et en déduire l'équation du mouvement, qu'on notera (1).
4. Simplifier l'équation du mouvement dans le cadre de l'approximation des petits angles, la mettre sous la forme canonique et la résoudre.
5. On se place maintenant hors de l'approximation des petits angles. On considère donc que l'équation du mouvement est (1). Multiplier cette équation par  $\dot{\theta}$  et calculer une primitive pour obtenir une **intégrale première du mouvement**.

### 3 Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  est la somme des énergies cinétiques de ses points. Elle a pour expression :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2.$$

Les théorèmes énergétiques vus en mécanique du point restent valables lorsqu'on s'intéresse au mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe. Comme le solide est indéformable, le travail et la puissance des forces internes au système sont tous les deux nuls.

Le théorème de l'énergie cinétique prend alors la forme :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_{ext})$$

où  $W$  désigne le travail, et celui de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{ext})$$

où  $P$  désigne la puissance.

#### Exercice d'application 6 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

*Établir l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.*

1. Rappeler l'expression du théorème du moment cinétique scalaire.
2. Multiplier par  $\omega$ , et identifier la correspondance avec le théorème de la puissance cinétique, si  $P = \mathcal{M}_{\Delta} \omega$ .
3. En déduire l'expression du travail  $W$  associé, sous forme d'une intégrale. Écrire alors le théorème de l'énergie cinétique.

### 4 Ouverture aux systèmes déformables

Un système déformable peut changer de forme au cours du temps. C'est par exemple le cas d'un être vivant. La distance entre ses points n'est plus constante, or ils interagissent entre eux via des forces électriques et gravitationnelles, ce qui donne lieu à une puissance interne ou un travail interne non nul.

Le **théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable** s'exprime alors sous la forme :

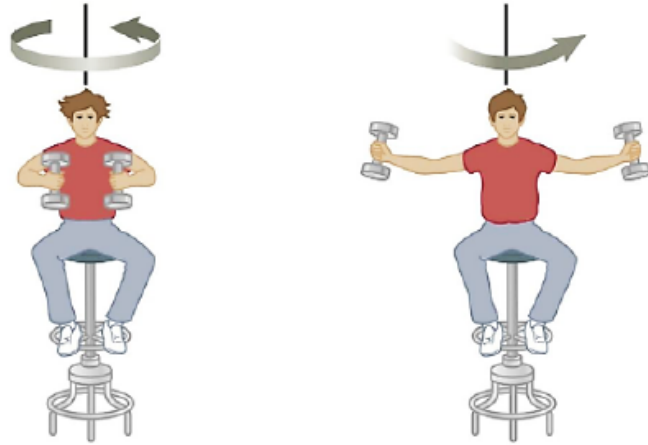
$$\Delta E_c = W(\vec{F}_{ext}) + W(\vec{F}_{int}).$$

#### Exercice d'application 7 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

*Prendre en compte le travail des forces intérieures. Réaliser le bilan énergétique du tabouret d'inertie.*

Une personne est assise sur un **tabouret d'inertie**. Il s'agit d'un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical ( $\Delta$ ). La personne se met en rotation, les bras repliés sur elle-même, à la vitesse angulaire  $\omega_1$  (état 1). Ensuite, elle étend les bras et sa rotation se fait à une vitesse angulaire différente, notée  $\omega_2$  (état 2).



1. Justifier que le moment cinétique scalaire  $L_\Delta$  du système {personne+siège du tabouret} est constant pendant cette opération.
2. Dans les états initial et final, le système est assimilable à un solide indéformable, de moments d'inertie respectifs  $J_1$  et  $J_2$  par rapport à l'axe  $\Delta$ . Comparer qualitativement  $J_1$  et  $J_2$ .
3. Donner la relation entre les moments d'inertie et les vitesses angulaires de rotation dans les états initial et final. Commenter.
4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système pour exprimer le travail des forces internes. Commenter.
5. L'expérience est plus spectaculaire si la personne tient dans ses mains des haltères. Expliquer pourquoi.