

TD16 : Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

- ▷ Différencier un solide d'un système déformable : TLB1
- ▷ Décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire : TLB2,4
- ▷ Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni : TLB1,3, ex1,2,3,4,5
- ▷ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses : TLB1
- ▷ Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté, en privilégiant l'utilisation du bras de levier : TLB2,3, ex1,2,3,4,5
- ▷ Définir une liaison pivot et justifier la valeur du moment qu'elle peut produire : TLB2,3, ex1,2,3,4,5
- ▷ Déterminer l'équation du mouvement, le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation étant donné : TLB2,3, ex1,2,3,4,5
- ▷ Établir l'équation du mouvement d'un pendule pesant. Établir une intégrale première du mouvement : ex1,2
- ▷ Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, le moment d'inertie étant fourni : ex1,2,3,4,5
- ▷ Établir l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique : TLB3

1 Questions de cours :

QC1 : Moment d'une force.

QC2 : Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe.

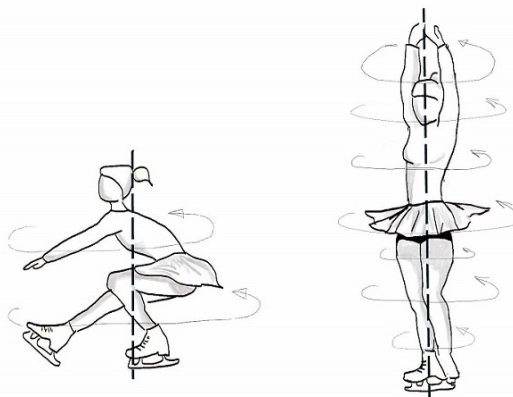
QC3 : Bras de levier.

QC4 : Couple de forces.

QC5 : Équivalence entre le théorème du moment cinétique scalaire et le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

2 Tester les bases

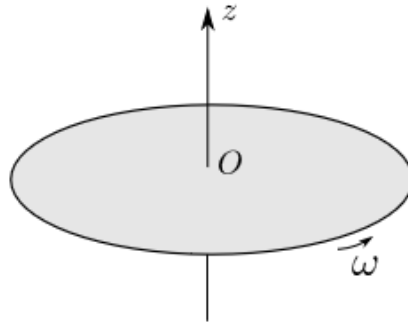
TLB1 : patinage artistique



1. En passant de la position de gauche à celle de droite sur le schéma ci-dessus, une patineuse sur glace augmente considérablement sa vitesse angulaire de rotation autour de l'axe représenté en pointillés. Expliquer pourquoi en vous appuyant sur des arguments physiques.
2. Quel est le signe du travail des actions mécaniques internes ?

TLB2 : disque en liaison pivot

Considérons un disque en liaison pivot parfait autour de l'axe (Oz). Son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) est noté J.



1. Ce disque est initialement lancé à la vitesse angulaire ω_0 . Évaluer l'évolution de la vitesse angulaire en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire. Décrire alors le mouvement d'un point quelconque du disque.

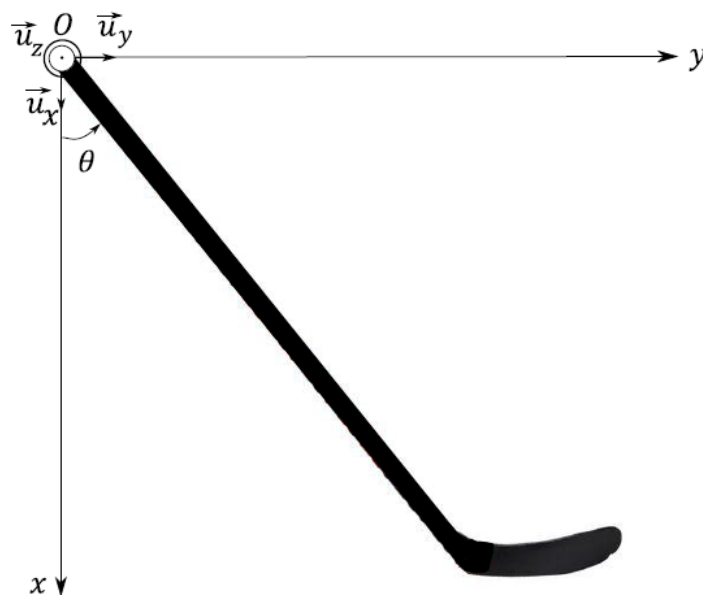
La liaison pivot n'est en fait pas parfaite, elle engendre un couple de frottement qu'on modélise mathématiquement par la loi $\mathcal{C} = -\alpha\omega$.

2. Quel est le signe de α ? Justifier par un argument énergétique.

3. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse angulaire en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire.

4. Résoudre cette équation différentielle et représenter graphiquement $\omega(t)$.

5. Expliquer qualitativement comment serait modifié le moment d'inertie si le disque avait la même masse, mais une forme de couronne au lieu d'être plein. Sans reprendre les calculs, représenter graphiquement $\omega(t)$ sur le même graphique qu'à la question 4.

TLB3 : crosse de hockey (CCINP20)

Pour manipuler le palet, les joueurs de hockey utilisent une crosse composée d'un manche

et d'une palette. La crosse est suspendue par l'extrémité supérieure du manche (point O) à un axe horizontal (Oz) fixe par une liaison pivot supposée parfaite et peut ainsi osciller. L'axe (Oz) est dirigé vers l'avant de la figure. L'écart de la crosse de hockey avec la verticale est repéré par l'angle θ . La crosse possède :

- une masse totale M ;
- un centre de masse G qu'on considérera situé sur le manche avec $OG = h$;
- un moment d'inertie total J (en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$) par rapport à l'axe (Oz).

Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont des vecteurs unitaires dirigés respectivement selon les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

1. Rappeler la loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe orienté (Oz). En l'appliquant et en négligeant les frottements de l'air, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la crosse peut se mettre sous la forme :

$$J\ddot{\theta} + Mgh \sin(\theta) = 0. \quad (1)$$

2. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre, réécrire l'équation (1). L'équation obtenue sera notée (2).

3. En déduire l'expression de la période des oscillations.

4. Établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation (1). Cette équation sera notée (3).

5. Expliquer en quoi cette équation (3) fait apparaître les différentes formes d'énergies. Vérifier, à partir des unités de base du Système International, que les différents termes sont homogènes à des énergies.

TLB4 : Ingenuity (CCINP23)



UN DRONE SUR MARS

En mai 2018, la NASA a annoncé que Perseverance embarquera un petit hélicoptère expérimental MHS (Mars Helicopter Scout) pesant 1,8 kilogramme. Baptisé *Ingenuity*, il testera l'intérêt du recours à des vols de reconnaissance optique. L'expérimentation doit durer une trentaine de jours.

Il se déplace dans les airs grâce à deux rotors bipales tournant en sens contraires. La vitesse de rotation est comprise entre 2 400 et 2 900 tours par minute, soit 10 fois celle des pales d'un hélicoptère sur Terre. En effet l'atmosphère martienne étant très ténue, l'air y est peu dense et nécessite donc une vitesse de rotation plus importante pour que l'appareil se soulève du sol.

Source : Dossier Presse Mars 2020 www.cnes.fr

La théorie de Rankine-Froude date de la fin du XIXe siècle. Ses concepteurs visaient à modéliser le fonctionnement macroscopique des hélices marines pour prédire leur poussée et la puissance nécessaire à leur rotation.

Elle permet également de mettre en relation la puissance P d'un hélicoptère et la force de poussée F fournie :

$$P = \sqrt{\frac{F^3}{2\rho S}}$$

où F est la force de poussée fournie, ρ la masse volumique de l'atmosphère martienne et S la surface balayée par les pales de l'hélicoptère (celles d'Ingenuity ont un rayon de 60 cm).

1. L'atmosphère martienne est environ 100 fois moins dense que l'atmosphère terrestre et l'accélération de la pesanteur martienne a pour valeur $g_{Mars} = 3,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. À partir des données et du document fourni, montrer qu'on retrouve l'ordre de grandeur de la puissance nécessaire pour qu'Ingenuity effectue un vol stationnaire, c'est-à-dire, développe une force de poussée de valeur égale à celle de son propre poids.

2. À partir du document, évaluer la vitesse angulaire maximale de rotation d'une hélice en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. En déduire la vitesse correspondante d'un point en bout de pale.

4. Le moment d'inertie J d'une pale par rapport à son axe de rotation est approximativement $J = \frac{mR^2}{12}$, où m est sa masse et R sa longueur. Déterminer le moment d'inertie correspondant à une hélice de l'hélicoptère, constituée de deux pales (chacune ayant une masse de 100 g).

5. En déduire le moment cinétique lorsque cette hélice tourne à vitesse maximale.

6. Sur le document, on voit deux hélices contrarotatives, c'est-à-dire, pouvant tourner en sens inverse. Quel serait le moment cinétique de la deuxième hélice, tournant en sens contraire ?

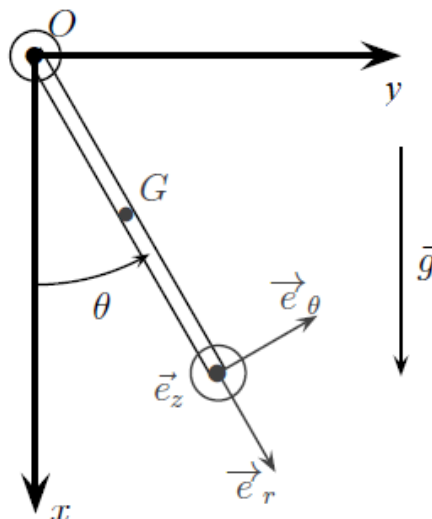
3 Exercices

Exercice 1 : approche énergétique du pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur l en liaison pivot parfait autour de l'axe (Oz). Sa position est repérée par l'angle θ entre la verticale descendante et la direction de la tige.

Le centre de masse de la tige est noté G . Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) est $J_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2$. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ les vecteurs unitaires de la base locale cylindrique.

On néglige les frottements fluides exercés par l'air sur la tige.



1. Exprimer l'énergie cinétique E_c de la tige à un instant quelconque, en fonction de J_{Oz} et $\omega = \dot{\theta}$.

2. Faire de même avec l'énergie potentielle de pesanteur E_p de la tige, d'abord en fonction de m , g et x_G puis en fonction de m , g , l et θ , en utilisant la convention $E_p(O) = 0$.

3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la tige en fonction notamment de θ et $\dot{\theta}$.

4. Justifier que le couple exercé par la liaison pivot sur la tige a une puissance nulle. En déduire que le mouvement est conservatif.

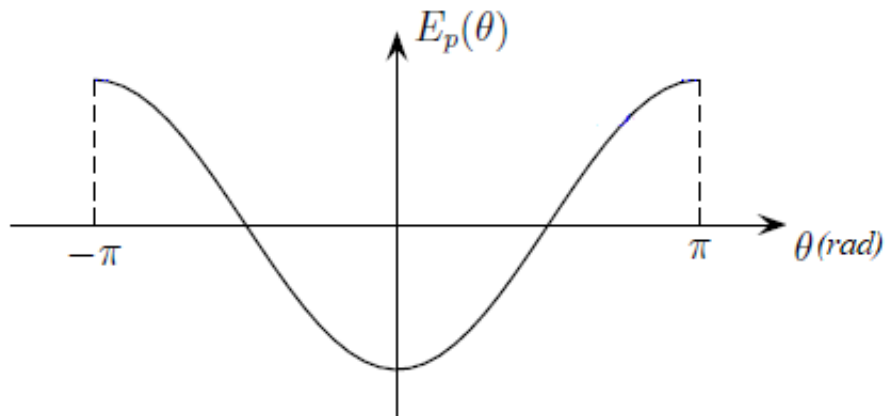


FIGURE 1 – Profil d'énergie potentielle de pesanteur

5. En vous appuyant sur le profil d'énergie potentielle de pesanteur représenté graphiquement ci-dessus, déterminer les valeurs de l'angle θ qui correspondent à une position d'équilibre, puis discuter leur stabilité.

6. Montrer que suivant la valeur de $\dot{\theta}_0$ deux types de mouvement sont possibles. Les décrire. Quelle valeur de $\dot{\theta}_0$, notée $\dot{\theta}_c$, est à la limite des deux situations ?

7. Établir l'équation du mouvement, puis la mettre sous la forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0.$$

Vous préciserez l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction des paramètres du problème.

8. Résoudre cette équation différentielle dans le cadre de petites oscillations, sachant qu'initialement la tige est dans la position verticale $\theta = 0$ avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0 > 0$. Donner une condition sur $\dot{\theta}_0$ pour que l'approximation des petits angles soit valide.

Exercice 2 : marcher à son rythme pour aller plus loin (CCINP19)

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel des muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillation d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_o et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $(O, \vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O, \vec{e}_x)$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la figure). La liaison pivot en O est supposée

parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est noté J . On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O . La jambe ne touche pas le sol dans cette étude, γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH) .

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ et supposée uniforme.

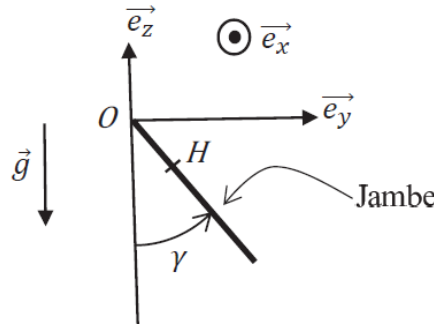


FIGURE 2 – Jambe et repère cartésien

1. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire, L_{Ox} , de la jambe par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ en fonction de γ et J .
2. Que vaut le moment par rapport à $(O, \vec{e}_x)$ de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.
3. Déterminer l'expression du moment Γ_{Ox} du poids de la jambe par rapport à $(O, \vec{e}_x)$ en fonction de g , m_o , d' et γ .
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ , caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

5. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

L'énergie potentielle de la jambe s'écrit :

$$E_p = -m_o g d' \cos(\gamma) + \text{constante}.$$

6. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.
7. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.
8. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre T d'oscillation de la jambe est :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_o g d'}}.$$

9. Le moment d'inertie est de la forme $J = k m_o d'^2$, où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

10. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période propre d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?

11. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse "naturelle" de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Exercice 3 : volant d'inertie (CCINP24, Modélisation)

Le stockage inertiel d'énergie utilise le plus souvent des volants d'inertie mis en rotation de façon à stocker l'énergie électrique sous forme d'énergie cinétique. Dans cette optique, des centrales inertielles constituées de plusieurs centaines de volants d'inertie ont été développées.

1 - Moment d'inertie

On veut pouvoir stocker 3,0 kWh par volant d'inertie, ce qui représente une énergie de $1,0 \cdot 10^7 \text{ J}$.

Le principe du volant d'inertie consiste à faire tourner un solide 1 dans une enceinte de confinement liée au bâti 0. On note $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère associé à 0 et on supposera le référentiel associé galiléen.

Le solide 1 est un cylindre plein et homogène et on donne :

- hauteur H , rayon R ;
- masse m ;
- centre d'inertie G sur son axe de rotation $(O, \vec{z}_0)$;
- moment d'inertie J_1 autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$.

On note $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega \vec{z}_0$ le vecteur rotation du cylindre 1 autour d'un axe fixe (figure 3).

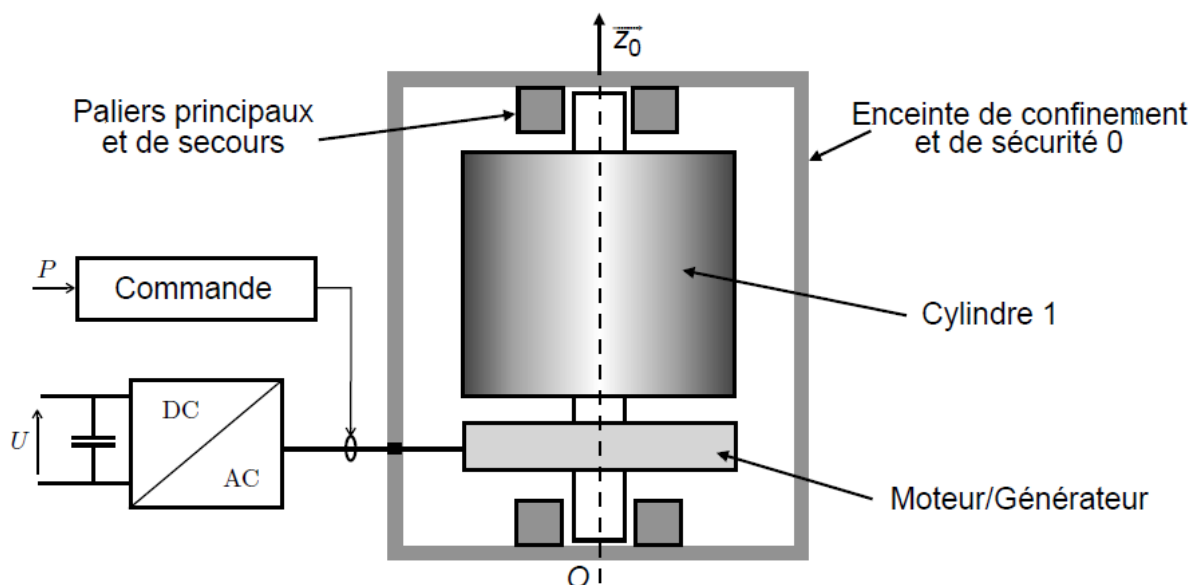


FIGURE 3 – Principaux composants d'un accumulateur inertiel

1. Exprimer l'énergie cinétique E_c d'un tel dispositif en fonction de J_1 et de ω .

Afin d'optimiser le fonctionnement du volant d'inertie, on souhaite maintenir une vitesse angulaire minimale ω_{min} . De plus, pour résister aux contraintes mécaniques liées à la rotation du volant, on définit également une vitesse angulaire maximale ω_{max} .

Un cycle classique d'utilisation prendra l'allure suivante :

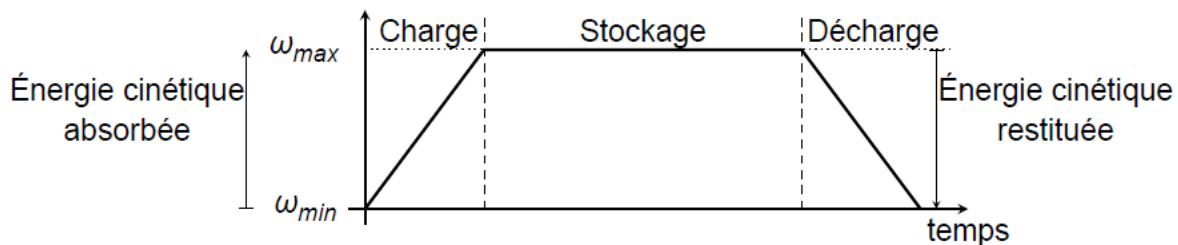


FIGURE 4 – Principe du cycle de récupération d'énergie cinétique

L'énergie cinétique employable correspond donc à la différence d'énergie entre les situations de vitesses angulaires maximale et minimale.

2. Pour des vitesses de rotation $\omega_{min} = 30000$ tr/min et $\omega_{max} = 40000$ tr/min, exprimer la valeur du moment d'inertie J_1 nécessaire afin de disposer des 3,0 kWh demandés. Réaliser l'application numérique.

Le dispositif pouvant présenter des pertes (cas étudié en sous-partie 2), on prendra une marge de sécurité avec une valeur de J_1 de 3,0 kg·m². La forme du volant d'inertie est imposée : il s'agit d'un cylindre plein et homogène de masse m , de hauteur H et de rayon R .

3. Exprimer la masse m du cylindre en fonction de sa masse volumique ρ , ainsi que de ses dimensions H et R .

Le moment d'inertie d'un cylindre autour de son axe de révolution ($O, \vec{z}_0$) est donné par la relation :

$$J_1 = \frac{\pi \rho H R^4}{2}.$$

4. Montrer que :

$$J_1 = \frac{m R^2}{2}.$$

En déduire la valeur du rayon R permettant d'obtenir un cylindre de 300 kg.

2 - Auto-décharge

Après une phase de charge, le volant d'inertie doit conserver son énergie cinétique jusqu'à la phase de décharge. Durant cette phase de stockage, différentes pertes dans le mécanisme peuvent dissiper une partie de l'énergie emmagasinée et induire un phénomène d'autodécharge (figure 5).

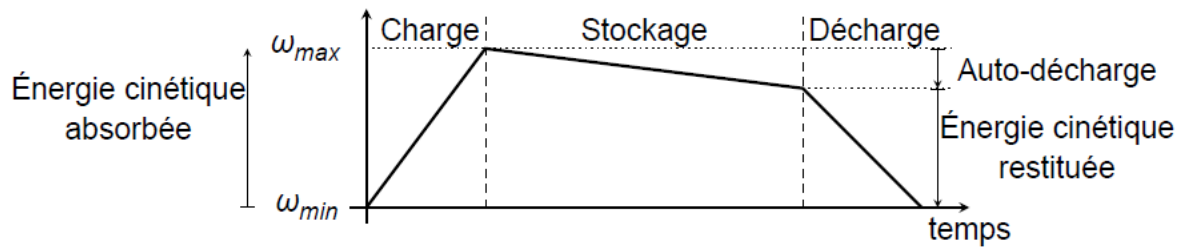


FIGURE 5 – Principe du cycle de récupération d'énergie cinétique avec prise en compte des pertes

Pour limiter ces pertes, on envisage d'abord un guidage par roulements pour réaliser la liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ entre le cylindre 1 et le bâti 0.

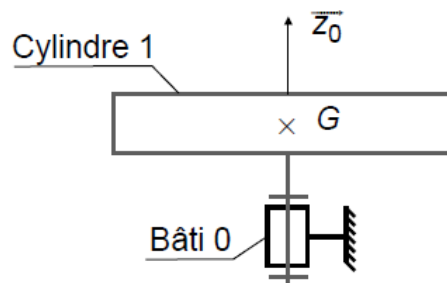


FIGURE 6 – Schéma cinématique simplifié du système

Un couple résistant $C_{res}\vec{z}_0$ modélise les frottements visqueux et secs qui s'appliquent sur le cylindre 1, tel que $C_{res}\vec{z}_0 = (C_s + C_v)\vec{z}_0$. On note alors C_s le couple résistant constant lié au frottement sec et $C_v = \mu\omega$ le couple résistant lié au frottement visqueux où μ est le coefficient de frottement visqueux en $N \cdot m / (rad/s)$ supposé constant.

5. Identifier qualitativement les éléments mécaniques et phénomènes physiques pouvant être à l'origine de ces différents frottements.

6. Préciser le solide isolé et la démarche employée afin de montrer que :

$$J_1 \frac{d\omega}{dt} + \mu\omega = -C_s. \quad (2)$$

7. Résoudre l'équation différentielle (1) lorsque C_s est une constante et pour la condition initiale $\omega(0) = \omega_{max}$.

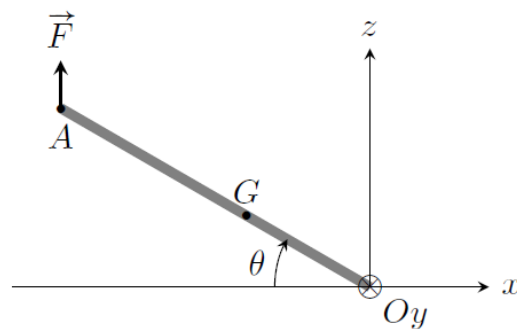
8. Exprimer la durée Δt pour que le système s'autodécharge jusqu'à ω_{min} . On trouve alors $\Delta t \approx 1 \times 10^4$ s.

9. Exprimer la durée d'autodécharge en heure et conclure.

Exercice 4 : monter un mur

Un expérimentateur utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale. Le mur est initialement posé sur le sol ($\theta = 0$). La grue le soulève en exerçant à l'une de ses extrémités A une force $\vec{F}$ constante. Le mur pivote alors autour de l'axe (Oy) fixe. Le mur est de hauteur $H = OA = 3,0$ m, de masse $m = 5,0 \times 10^3$ kg et son

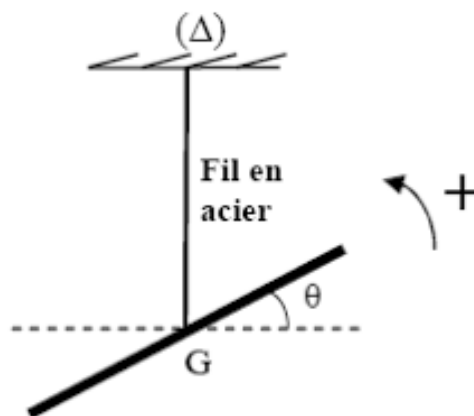
centre de masse G se situe à $OG = a = 1,2 \text{ m}$ de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe (Oy) est $J = 2,8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.



1. Faire la liste des actions mécaniques qui s'exercent sur le mur.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique au mur par rapport à l'axe (Oy) . En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ .
3. Le mur pivote autour de l'axe (Oy) avec une vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega_0 = 0,20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminer et calculer la norme de la force $\vec{F}$ exercée par la grue.
4. Exprimer la puissance P de la force $\vec{F}$ puis son travail W pour dresser complètement le mur (depuis sa position horizontale jusqu'à sa position verticale). Quand est-ce que la puissance de la grue est maximale ? Faire les applications numériques.

Exercice 5 : pendule de torsion

On considère une tige homogène fixée orthogonalement en son centre à une ficelle verticale (d'axe Oz) suspendue à un bâti. On fait tourner la tige sur elle-même de façon à tordre la ficelle et on la lâche sans vitesse initiale. La tige se met alors à tourner autour de l'axe (Oz) , sous l'effet d'un **couple de torsion**. On note θ l'angle algébrique entre la position d'équilibre de la tige et sa position à un instant quelconque. On note θ_0 l'angle initial. On note J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz) .



1. Par analogie avec la loi de Hooke, proposer une expression pour la valeur algébrique du couple de torsion.
2. Utiliser le théorème du moment cinétique scalaire pour déterminer l'équation du mouvement.

3. La mettre sous forme canonique et la résoudre en tenant compte des conditions initiales.

On souhaite à présent faire une étude énergétique du pendule de torsion.

4. Exprimer la puissance du couple de torsion.

5. En déduire le travail W du couple entre deux instants t_1 et t_2 .

6. Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. L'exprimer explicitement. Quelle analogie peut-on faire ?

7. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation du mouvement du pendule de torsion.

4 Résolution de problème : un œuf dur en rotation

Un œuf dur posé sur une table est mis en rotation autour de son petit axe.

Montrer qu'il existe une vitesse angulaire critique Ω_c au-delà de laquelle l'œuf se redresse spontanément et se met à tourner autour de son grand axe. Déterminer l'ordre de grandeur de sa valeur.

Indication : si plusieurs configurations sont possibles, un système mécanique adopte spontanément celle qui minimise son énergie mécanique.

