TD17 : Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

▹ *Établir et citer l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine* : TLB1,2,3, ex3,4

▹ *Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente* : TLB1,2,3, ex3,4

▹ *Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime sinusoïdal forcé* : TLB1,2,3, ex1,2,3,4

▹ *Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité* : ex2,3,4

▹ *Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase* : ex3, RP1,2

1 Questions de cours

QC1 : Régime sinusoïdal forcé.
QC2 : Impédance complexe d'un dipôle.
QC3 : Associations d'impédances complexes.
QC4 : Résonance.

2 Tester les bases

TLB1 : Impédances complexes

1. En vous appuyant sur la notion d'impédance complexe, établir :
a. l'impédance complexe d'une résistance ;
b. l'impédance complexe d'un condensateur ;
c. l'impédance complexe d'une bobine.

2. En vous appuyant sur la notion d'impédance complexe, établir :
a. la résistance équivalente de deux résistances en série ;
b. la capacité équivalente de deux condensateurs idéaux en série ;
c. l'inductance équivalente de deux bobines idéales en série.

3. En vous appuyant sur la notion d'admittance complexe, reprendre la question 2 pour des dipôles en parallèle.

4. En vous appuyant sur une analogie entre électricité et mécanique, déterminer la raideur équivalente pour deux ressorts en série, puis pour deux ressorts en parallèle.

TLB2 : circuit RLC en régime sinusoïdal forcé (CCINP 2023)

Un circuit RLC série est alimenté par source de tension sinusoïdale $e(t) = \mathrm{E}\cos(\omega t)$, où ω désigne la pulsation.

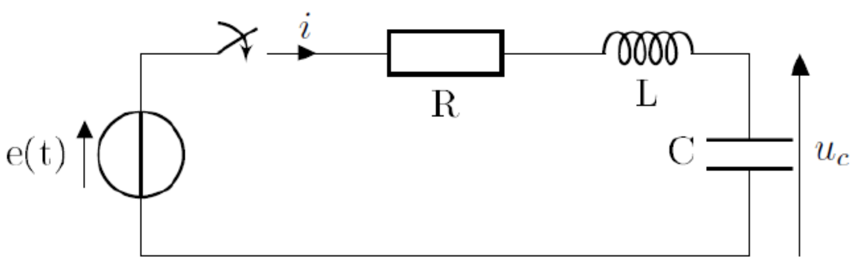


FIGURE 1 – Circuit RLC alimenté par une tension variable

1. Déterminer l'expression de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ à l'association en série des trois dipôles R, L et C.

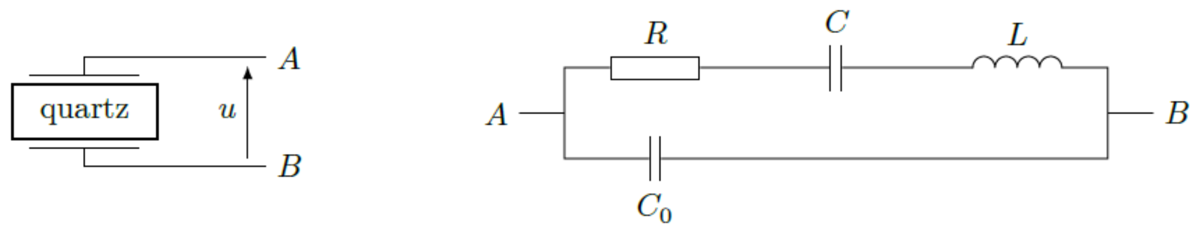
2. Sachant que l'intensité dans le circuit s'écrit $i(t) = I\cos(\omega t + \phi)$ où ϕ désigne la phase à l'origine, donner l'écriture complexe de la tension aux bornes du générateur $e(t)$ et de l'intensité dans le circuit $i(t)$.

3. Déterminer, grâce aux questions précédentes, l'expression de l'amplitude de l'intensité I en fonction de E, R, L, C et de ω.

4. En déduire l'expression de la fréquence d'oscillation pour laquelle l'amplitude de l'intensité I qui alimente l'antenne sera maximale. Donner alors l'expression de cette intensité maximale I_{max} en fonction de E et de R.

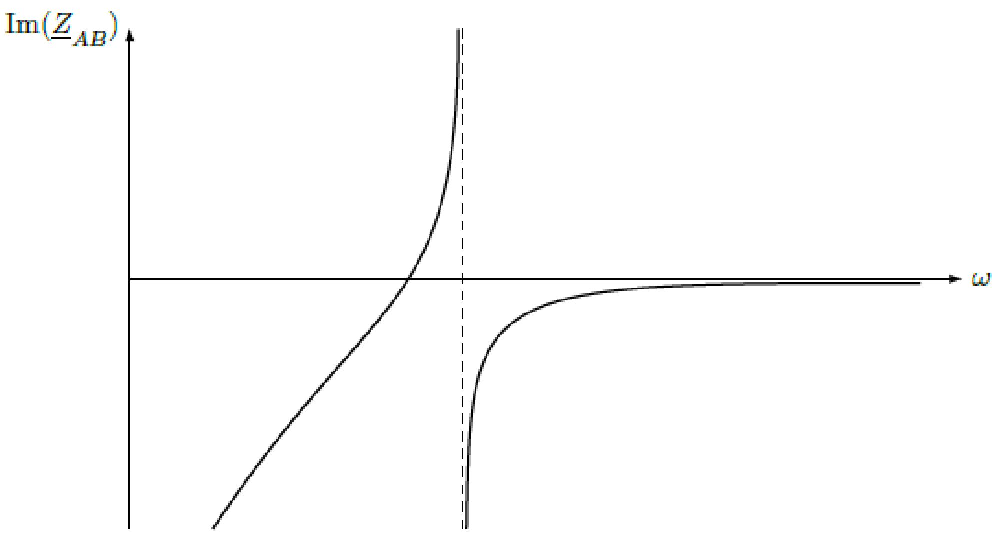
TLB3 : modélisation d'un quartz (CCS 2020)

On donne fréquemment pour un oscillateur à quartz le modèle électrique de la figure ci-dessous, qui résume assez bien son comportement.



1. Étudier le comportement asymptotique du modèle : il s'agit, qualitativement, de trouver une représentation simplifiée du quartz pour les cas $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$.

La courbe de la figure ci-dessous représente l'allure de la partie imaginaire de l'impédance équivalente du modèle électrique du quartz : Im($\underline{Z}_{AB}$) en fonction de la fréquence lorsque la résistance R est négligeable.



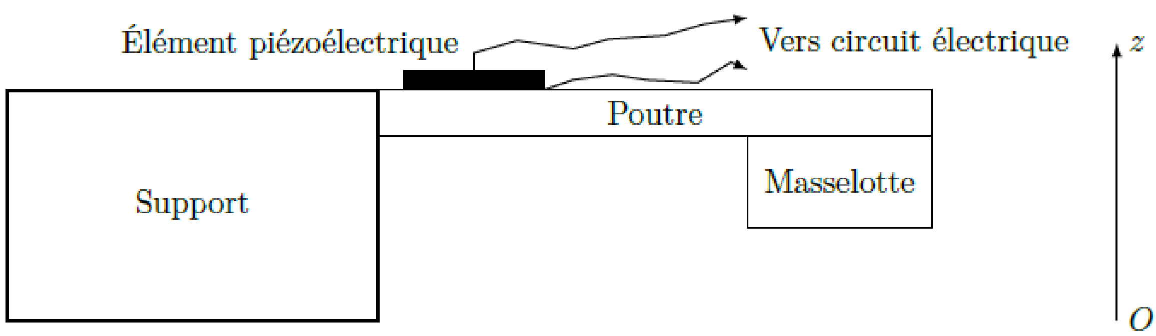
2. Quelles sont les pulsations remarquables ?

3. Dans quel(s) intervalle(s) peut-on dire que le comportement du quartz est capacitif ?

3 Exercices

Exercice 1 : microgénérateur piézoélectrique (CCS 2020)

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.



On appelle $\vec{F}_E$ la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\vec{F}_E = F_E\vec{u}_z = F_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$. On se place en régime sinusoïdal forcé.

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique

$$M\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + kz = F_E.$$

1. Que représente le terme $M\frac{d^2z}{dt^2}$?

2. Indiquer à quel type de forces correspondent $-kz$ et $-\alpha\frac{dz}{dt}$. Expliquer qualitativement quelles caractéristiques de la poutre sont modélisées par ces forces.

3. On pose $z(t) = \mathrm{Re}(\underline{Z}_m e^{i\omega t})$. Exprimer $\underline{Z}_m$, amplitude complexe de la vibration mécanique suivant l'axe vertical (Oz).

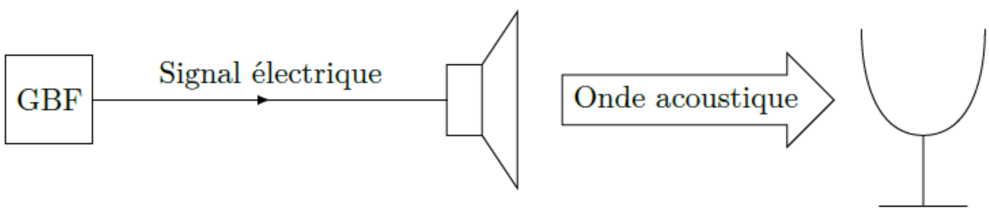
Dans la suite, on se place à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4. Décrire, à cette pulsation, le mouvement du centre d'inertie de la poutre.

5. Déduire de ce qui précède l'expression de la vitesse de déplacement vertical v_z du centre d'inertie de la poutre en fonction de F_0, α, ω_0 et du temps.

Exercice 2 : étude de la résonance en amplitude d'un verre (CCS 2018)

Un haut-parleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f. Un verre, placé à proximité du haut-parleur, est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.



L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$, position d'un bord du verre modélisé par un point matériel le long d'un axe (Ox) passant par le centre du verre, est de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et Φ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \phi).$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t + \phi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X}\exp(j\omega t)$.

1. Comment nomme-t-on la grandeur $\underline{X}$? Que représente son module, son argument ?
2. Établir l'expression du module de $\underline{X}$ en fonction de ω, ω_0, A_0 et Q.

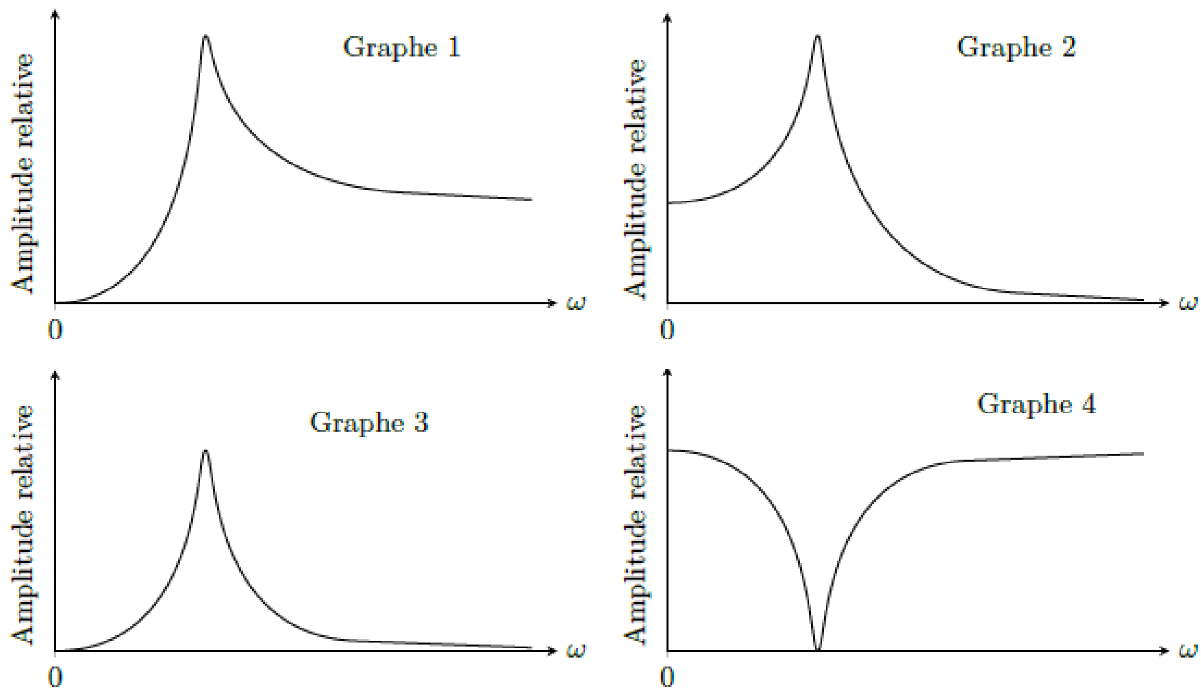


FIGURE 2 – Module de $\underline{X}$ en fonction de ω

3. À partir d'une étude qualitative, justifier le numéro de graphe de la figure ci-dessus compatible avec le tracé du module de $\underline{X}$ en fonction de la pulsation ω.
4. À quelle condition sur le facteur de qualité peut-on envisager une résonance d'amplitude ? On note Q_0 cette condition.
5. Dans le cas d'une résonance d'amplitude, exprimer la pulsation correspondante, notée ω_r, en fonction de ω_0 et Q.

Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_0$.

6. Quelle est alors l'expression de la pulsation de résonance ω_r ?
7. On note X_r le module de X pour $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_0, A_0 et Q.
8. Définir les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) du module de $\underline{X}$. Rappeler la relation liant ω_0, Q et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Exercice 3 : détermination des paramètres d'un circuit RLC série

Un circuit RLC série est alimenté par une source de tension $e(t) = \mathrm{E}\cos(\omega t)$.

On note I la mesure de l'intensité efficace affichée par un ampèremètre lorsque la fréquence f du générateur varie. Un oscilloscope en mode bicourbe donne accès au déphasage ϕ entre l'intensité $i(t)$ et la tension $e(t)$.

1. Rappeler le lien entre la fréquence f et la pulsation ω.
2. Comment doit-on brancher et régler l'ampèremètre ?
3. Donner un ordre de grandeur des valeurs prises usuellement par l'amplitude de la tension E, la résistance R, l'inductance L de la bobine et la capacité C du condensateur en travaux pratiques.
4. Rappeler l'impédance complexe associée à une résistance R, à une bobine d'inductance L et à un condensateur de capacité C.
5. Établir en notation complexe l'expression de l'intensité du courant, $\underline{i}(t)$, parcourant le circuit, en fonction de $\underline{e}(t)$.
6. Déterminer l'expression de l'amplitude i_0 de l'intensité réelle $i(t)$:

$$i_0 = \frac{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{R}^2}\left(\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}\right)^2}}.$$

7. Rappeler en quoi consiste le phénomène de résonance en intensité. Exprimer la pulsation de résonance ω_r en fonction des paramètres du circuit et donner la valeur de i_0 associée.
8. Rappeler la définition des pulsations de coupure. Les exprimer en fonction des paramètres du circuit.
9. Montrer que la bande passante, qui correspond à la largeur de l'intervalle entre les pulsations de coupure, vaut $\Delta\omega = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}$.

On admettra l'expression du déphasage ϕ en fonction de la pulsation :

$$\tan(\phi) = -\left(\frac{\mathrm{L}\omega}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{RC}\omega}\right).$$

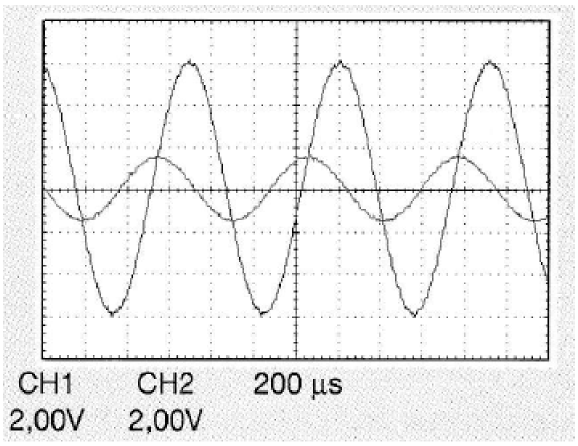
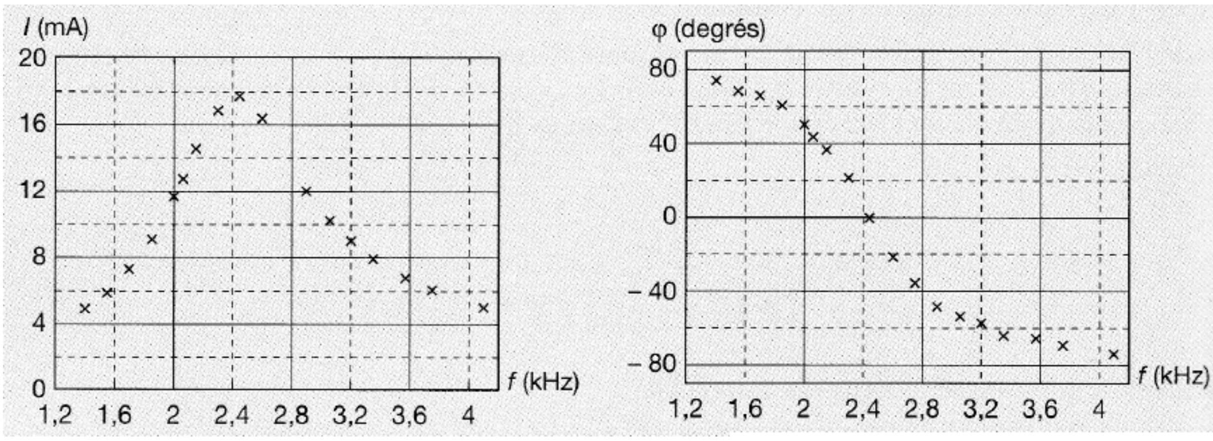


FIGURE 3 – Oscillogrammes obtenus sur l'écran d'un oscilloscope en mode bicourbe

10. Quel montage a-t-on réalisé afin d'obtenir sur l'oscilloscope les courbes données ci-dessus ? Identifier laquelle correspond à $u_{\mathrm{R}}(t)$ et à $e(t)$ respectivement. Déterminer le déphasage et vérifier la cohérence avec le diagramme de Bode expérimental fourni ci-dessous.



11. Déterminer la valeur numérique de la pulsation de résonance ω_r.

12. Déterminer la valeur de la résistance R à partir du graphe de $I(f)$.

13. Évaluer les pulsations de coupure ainsi que la bande passante.

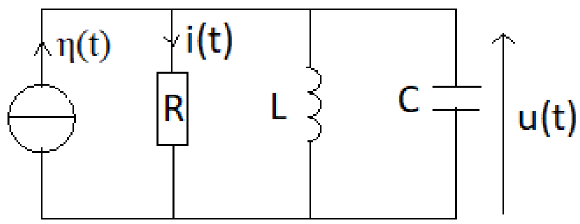
14. Évaluer la valeur du facteur de qualité $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$. En déduire la nature du régime transitoire.

15. Déterminer la valeur de l'inductance L.

16. Déterminer la valeur de la capacité C.

Exercice 4 : résonance en intensité dans un circuit RLC parallèle

On considère un circuit RLC parallèle alimenté par une source idéale de courant d'intensité $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la résistance. On suppose que le régime est sinusoïdal forcé, on emploiera la notation complexe pour les différentes grandeurs impliquées.



1. Déterminer sans calcul la valeur du courant $i(t)$ à basse et à haute fréquence, en raisonnant sur les dipôles équivalents à la bobine et au condensateur. En déduire que ce circuit est a priori le siège d'une résonance en intensité.

2. En exprimant la tension $\underline{u}(t)$ aux bornes des dipoles de deux manières différentes, calculer explicitement $\underline{i}$ en fonction de $\underline{\eta}$.

3. Déterminer l'amplitude de $i(t)$. Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ? Commenter le résultat.

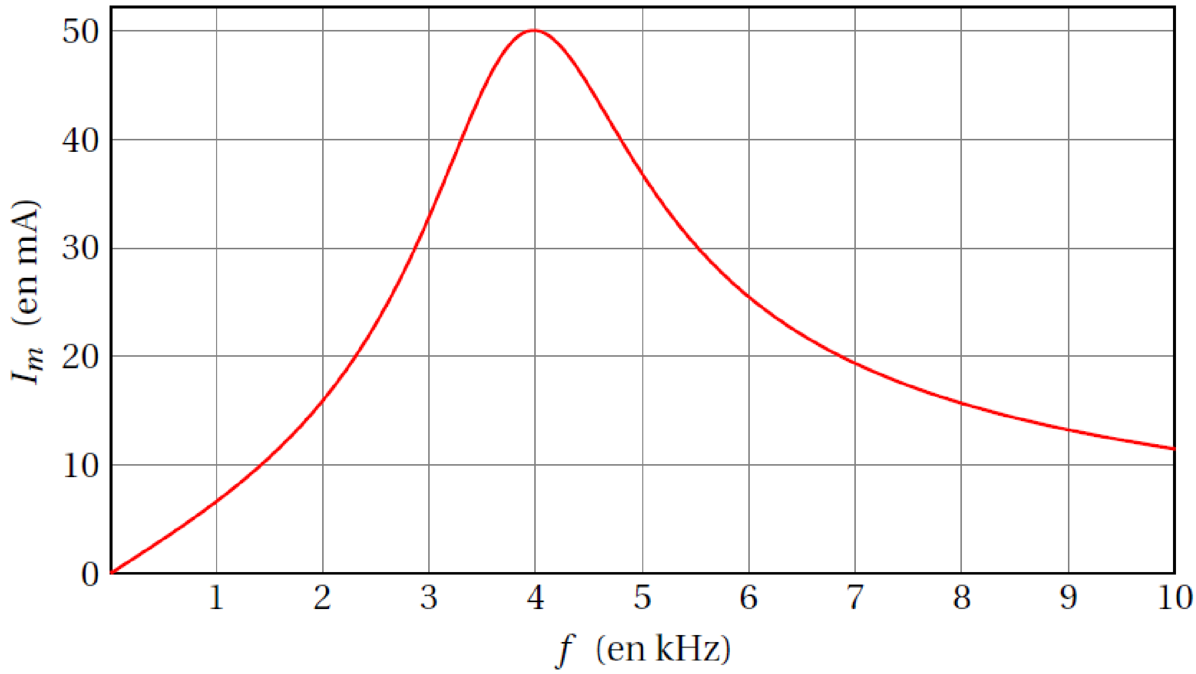
4. Déterminer les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2}, ainsi que la bande passante $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.

5. Exprimer le facteur de qualité, qui vérifie $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, en fonction de R, L et C. Commenter le résultat.

4 Résolution de problèmes :

RP1 : résonance en intensité

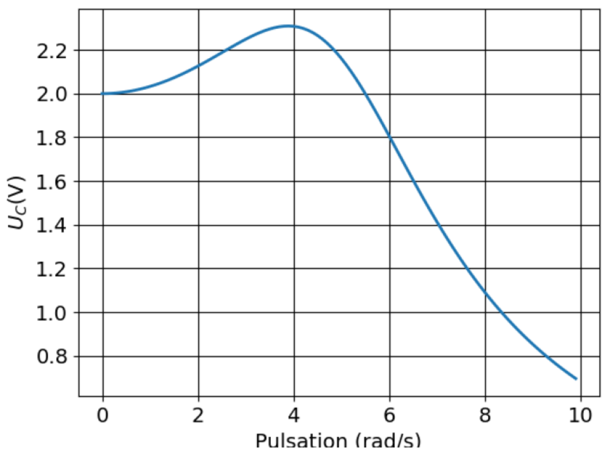
On effectue l'étude de la résonance en intensité d'un circuit RLC série alimenté par un générateur basse fréquence délivrant un signal sinusoïdal d'amplitude $\mathrm{E}_0 = 5,0\mathrm{V}$. Le graphique ci-dessous représente l'amplitude I_m du courant parcourant le circuit en fonction de la fréquence f.

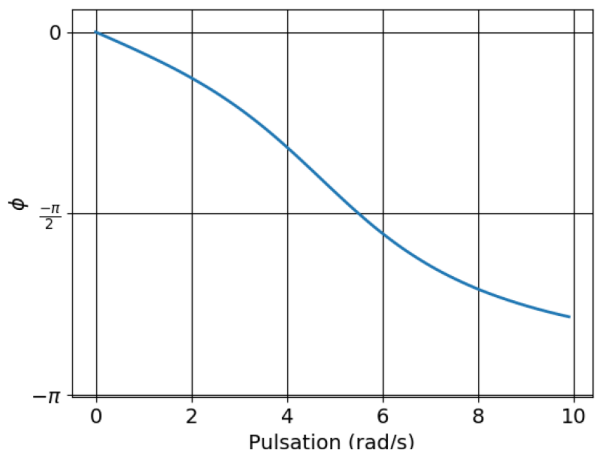


Déterminer numériquement la fréquence propre du circuit, le facteur de qualité ainsi que les valeurs de R, L et C.

RP2 : résonance en tension

On considère les graphes d'amplitude et de phase pour la résonance en tension d'un condensateur dans un circuit RLC alimenté par un générateur basse fréquence délivrant une tension sinusoïdale.





Estimer la pulsation propre, la pulsation de résonance et le facteur de qualité.