

TP20 : Mesure de l'intensité de l'accélération de la pesanteur avec un pendule

CAPACITÉS EXPÉRIMENTALES TRAVAILLÉES :

- ▷ Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.
- ▷ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).
- ▷ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
- ▷ Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
- ▷ Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.
- ▷ Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
- ▷ Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
- ▷ Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.
- ▷ Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

MATÉRIEL :

Masselottes marquées, potence munie d'un rapporteur pour pendule simple, fil, chronomètre, mètre-ruban.

Pour prévoir le résultat d'une expérience de mécanique dans un référentiel terrestre, il est souvent nécessaire de connaître la valeur de l'intensité de l'accélération de la pesanteur, g . De nombreuses expériences permettent de la mesurer.

L'une des plus simples consiste à accrocher une masse à un fil, à l'écartier légèrement de la verticale descendante et à la faire osciller. Le système ainsi réalisé s'appelle un **pendule**. En mesurant la longueur du fil et la durée d'une oscillation, on peut calculer g .

Le but de cette séance est d'approfondir la notion d'incertitude associée à la valeur d'une grandeur mesurée.

Quelle que soit la façon dont on mesure une grandeur X , il subsiste toujours une **incertitude** sur sa valeur.

Cette incertitude a de nombreuses causes qui s'additionnent, parmi lesquelles le manque de précision des instruments de mesure, des défauts de protocole, des différences entre les conditions expérimentales et le modèle théorique choisi, l'impossibilité de réaliser deux fois d'affilée la même expérience dans les mêmes conditions, etc.

Quand bien même on manipulerait de façon "parfaite", on observerait forcément à un certain degré de précision la **variabilité intrinsèque des grandeurs physiques** au cours du temps, dues à des fluctuations de nature statistique ou quantique.

Pour souligner l'existence de cette variabilité, on limite toujours le **nombre de chiffres significatifs** dans l'écriture du résultat de la mesure. Pour le faire encore plus proprement, on associe à la valeur de la grandeur mesurée une **incertitude-type** $u(X)$.

Un expérimentateur consciencieux écrira toujours le résultat d'une mesure sous la forme : "La grandeur X mesurée a pour valeur X_{mes} , avec une incertitude-type $u(X)$ ", ou, sous forme mathématisée : $X = X_{mes} \pm u(X)$. Le sens à donner à cette écriture est le suivant : si on réalise deux fois d'affilée la même expérience, on trouvera des valeurs centrées en moyenne sur X_{mes} , et l'écart typique entre les résultats de deux mesures successives sera $u(X)$.

Si le résultat d'une mesure doit être comparé à une **valeur de référence** (une valeur tabulée par exemple) pour voir s'il lui est compatible, on utilisera un outil appelé **écart normalisé** (ou z-score) :

$$z = \frac{|X_{mes} - X_{ref}|}{\sqrt{u(X_{mes})^2 + u(X_{ref})^2}}.$$

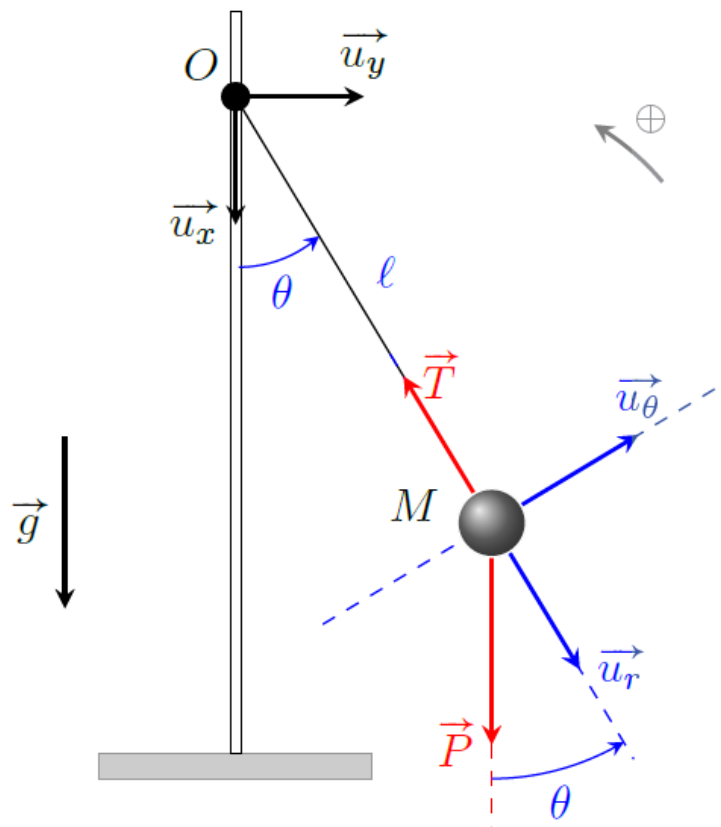
Le z-score ne doit pas être trop grand pour conclure à une probable compatibilité. On se donne souvent, de manière arbitraire, la valeur $z = 2$ comme limite.

PROBLÉMATIQUE :

L'intensité de l'accélération de la pesanteur g_{mes} mesurée à l'aide d'un pendule est-elle compatible avec la valeur tabulée de référence, $g_{ref} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

1 Approche théorique

On considère le **pendule simple** représenté schématiquement ci-dessous :



Le mouvement de la masse accrochée à l'extrémité du fil est paramétré par l'angle θ , qui est une fonction du temps.

Q1. Définir le modèle du pendule simple.

Q2. En négligeant les frottements fluides, établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0.$$

Q3. On se place désormais dans l'approximation des petits angles. Rappeler en quoi elle consiste, et s'en servir pour simplifier l'équation différentielle. En déduire que le mouvement est périodique et exprimer sa période T en fonction des paramètres du problème. Commenter l'expression obtenue.

Q4. Proposer alors un protocole pour mesurer l'intensité de l'accélération de la pesanteur. Appeler l'enseignant pour validation.

2 Approche expérimentale

2.1 Protocole 1 - Mise en place du pendule et mesure de la période

- Construire un pendule qui pourrait être modélisé par un pendule simple de longueur $l = 60$ cm.
- Avec un chronomètre, mesurer une seule fois la période T de ce pendule pour un angle initial $\theta_0 < 25^\circ$.

Q5. Expliquer quelle masse vous avez choisie et pourquoi.

Q6. Noter la valeur de T obtenue.

2.2 Évaluation de l'incertitude-type sur la période

L'**incertitude-type** associée à une grandeur est une mesure de l'écart typique entre les résultats de deux mesures consécutives de cette grandeur.

Il existe deux méthodes indépendantes pour évaluer une incertitude-type.

Une évaluation de l'incertitude-type **de type B** repose sur une mesure unique. Après avoir listé les causes d'incertitude et avoir chiffré leur impact de façon aussi raisonnable que possible, on estime l'incertitude-type en faisant l'expérience de pensée dans laquelle on reproduirait la mesure.

Q7. Proposer, en justifiant, une incertitude-type $u_B(T)$ associée à la mesure de la période du pendule.

Une évaluation de l'incertitude-type **de type A** repose quant à elle sur une évaluation de nature statistique. On effectue plusieurs fois d'affilée la même expérience, et on obtient une liste de valeurs de la grandeur X : $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, où N représente le nombre de mesures effectuées. Les valeurs aberrantes dues à une erreur de manipulation évidente sont écartées car non représentatives.

La valeur retenue pour la grandeur X est en général la **moyenne arithmétique** des valeurs mesurées ("mean" en anglais) :

$$X_{mes} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

L'incertitude-type est quant à elle évaluée par l'**écart-type expérimental** ("standard deviation" en anglais), une grandeur qui mesure la dispersion des valeurs obtenues :

$$u_A(X) = s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Q8. Faire au moins quatre mesures de la période T du pendule et remplir un tableau de valeurs.

Q9. Utiliser le programme Python ci-dessous (à compléter) pour évaluer la période et son incertitude-type.

```
import statistics as sta
T=[.....]
print(sta.mean(T))
print(sta.stdev(T))
```

Sous l'hypothèse que les valeurs mesurées de la grandeur ont une **densité de probabilité** qui suit une **loi normale** (ou gaussienne), ce qui est souvent le cas lorsqu'on fait un grand nombre de mesures, les mathématiques nous enseignent qu'on peut attribuer un intervalle de confiance à la valeur moyenne mesurée :

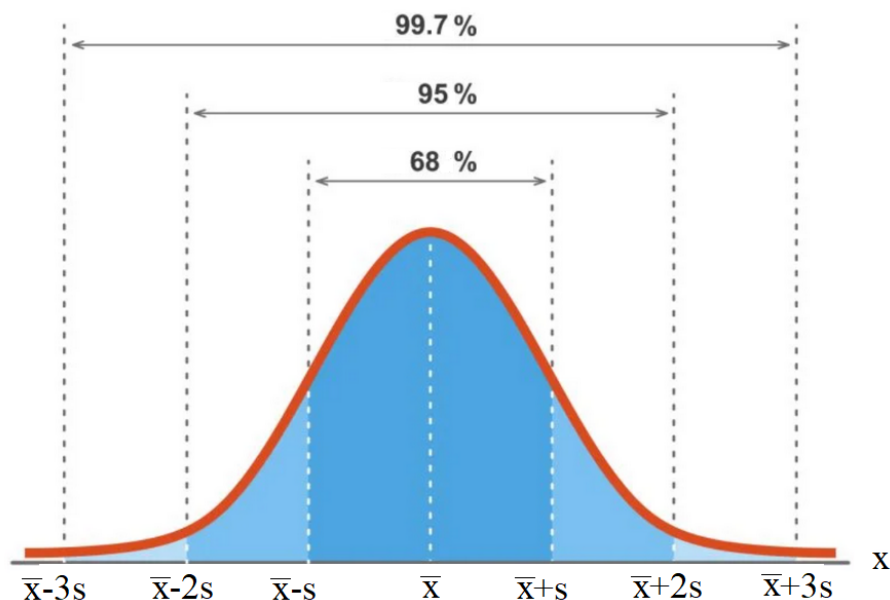


FIGURE 1 – Densité de probabilité et intervalles de confiance associées à la loi normale

Q10. Estimer l'intervalle dans lequel la période du pendule a 95% de chance de se situer d'après l'approche de type A.

Q11. Les deux approches (évaluation de type A et de type B) sont censées donner des résultats très similaires. Est-ce bien le cas ?

2.3 Propagation des incertitudes

Il arrive parfois qu'on mesure une grandeur de manière indirecte : on mesure d'autres grandeurs, dont la valeur permet ensuite de calculer celle qui nous intéresse. Dans ce cas, les incertitudes sur chacune des grandeurs mesurées se combinent pour donner lieu à une incertitude globale sur la grandeur d'intérêt, issue du calcul. On dit des incertitudes qu'elles se propagent.

Si la grandeur calculée C est une fonction monomiale des grandeurs A et B mesurées, autrement dit de la forme $C = kA^\alpha B^\beta$, alors

$$\frac{u(C)}{|C|} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(A)}{A}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(B)}{B}\right)^2}.$$

Parfois, une des deux incertitudes relatives sur A ou B prédomine nettement, ce qui permet de négliger l'autre et d'obtenir une formule approchée plus simple d'utilisation.

Q12. Écrire la **formule de propagation des incertitudes** pour exprimer $u(g)$ en fonction de $u(l)$, $u(T)$, l et T .

Q13. Proposer une estimation de $u(l)$ en expliquant votre démarche.

Q14. En déduire la valeur mesurée de g et son incertitude-type, puis comparer à la valeur tabulée et conclure. Vous listerez les principales causes d'incertitude qui expliquent l'écart constaté entre la valeur mesurée et la valeur tabulée.

Pour visualiser la propagation des incertitudes et vérifier numériquement la validité de la formule de propagation fournie ci-dessus, on pourrait écrire un programme Python pour simuler la propagation des incertitudes, sous l'hypothèse que l et T ont une densité de probabilité qui suit la loi normale.