AP7 : Introduction à la méthode d'Euler

CAPACITÉS NUMÉRIQUES TRAVAILLÉES :

▹ Mettre en oeuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

▹ Mettre en oeuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.

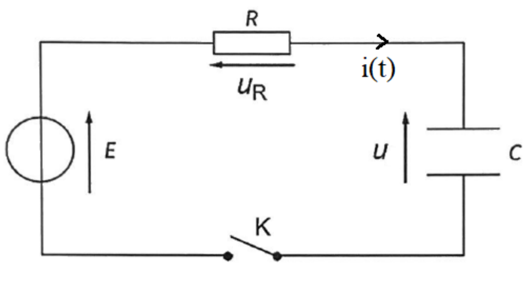
Leonhard Euler est parfois considéré comme le plus grand mathématicien de tous les temps. Il a largement contribué à tous les domaines des mathématiques (et de la physique) connus de son temps, créé de nouvelles branches des mathématiques, et laissé à la postérité une œuvre colossale (environ 50 000 pages).

FIGURE 1 – Portrait de Leonhard Euler (1707-1783)

Euler a notamment développé une méthode pour résoudre numériquement, de façon approchée, des équations différentielles. L'avènement de l'informatique n'a fait qu'accroître la pertinence de cette méthode, encore utilisée de nos jours.

Le but de cette séance est d'apprendre à mettre en œuvre la **méthode d'Euler** pour résoudre numériquement une équation différentielle simple issue de la physique. L'algorithme de résolution sera implémenté dans le langage de programmation Python.

1 Charge d'un condensateur



On considère un circuit RC alimenté par un générateur de tension continue. Le condensateur, de capacité $\mathrm{C} = 1{,}0\mu\mathrm{F}$, est initialement déchargé. La résistance vaut $\mathrm{R} = 10\ \mathrm{k}\Omega$ À l'instant $t = 0^-$, l'interrupteur est fermé brusquement, si bien qu'on peut considérer que le circuit RC est soumis à un échelon de tension $\mathrm{E} = 10\mathrm{V}$.

Q1. Montrer que la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}, \tag{1}$$

et donner les expressions de τ et u_∞ en fonction des données du problème.

Q2. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale.

Pour visualiser, on souhaite à présent représenter graphiquement la solution de cette équation différentielle en utilisant le langage de programmation Python. On commence par décider sur quel intervalle de temps on va représenter la fonction.

Q3. Calculer $u(t = 5\tau)$ et en déduire qu'une représentation de $u(t)$ sur l'intervalle $[0; 10\tau]$ est pertinente pour bien visualiser la charge du condensateur.

Dans l'absolu, le programme devrait stocker la valeur de $u(t)$ pour une infinité de points, puisque tout intervalle contient une infinité de points. C'est matériellement impossible, les programmes informatiques ne stockent qu'un échantillon de valeurs. Ici, il y aura un nombre $\mathrm{N}+1$ de valeurs de temps et de tension : $\{t_0, t_2, \cdots, t_\mathrm{N}\}$ et $\{u_0, u_2, \ldots u_\mathrm{N}\}$ avec $u_i = u(t_i)$ et $t_\mathrm{N} = t_f$, le temps final. Ce stockage peut se faire aux choix sous forme de liste (list en anglais) ou de tableau (array en anglais).

On choisit en général un découpage régulier de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ en N parties égales, de sorte que

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t.$$

Δt est le pas de l'algorithme (step size en anglais), il est ici le même pour tous les intervalles de temps.

Q4. Montrer par récurrence que $t_i = t_0 + i \times \Delta t$.

On peut alors faire tracer par un programme en langage Python l'évolution théorique de la tension $u(t)$ en fonction du temps, point par point.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t0=...........
E=...........
tau=...........
u0=...........
tf=...........

Time=[]
Uth=[]
for t in np.linspace(0,tf,101):
    uth=...........
    Time.append(t)
    Uth.append(uth)
plt.plot(Time,Uth,'b-')
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("u(V)")
plt.show()
```

Q5. Recopier sur votre copie les lignes de code incomplètes, avant de les compléter dans l'ordre.

Le graphique que renvoie le programme est donné en annexe.

Q6. Faire sur le graphique en annexe, à rendre avec la copie, une construction permettant de trouver la valeur de la constante de temps τ. Commenter le résultat.

La solution exacte de l'équation différentielle (1) étant connue, elle va nous permettre de tester la validité de la méthode d'Euler, en comparant la solution numérique approchée et la solution analytique.

L'algorithme connu sous le nom de **méthode d'Euler** est décrit ci-dessous :
On commence par réécrire l'équation différentielle, de sorte à isoler la dérivée :

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

où f est une fonction qu'on identifie.
Q7. Montrer qu'ici, $f(u) = \frac{\mathrm{E}-u}{\tau}$.

On se rappelle ensuite de la définition de la dérivée d'une fonction. En chaque point, la valeur du nombre dérivé est défini comme la limite du taux d'accroissement de la fonction :

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{(t+\Delta t) - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Les programmes informatiques ne peuvent pas gérer la notion de limite, qui est une opération continue.

La méthode d'Euler s'appuie sur l'hypothèse que, si le pas de temps Δt est "suffisamment petit", alors

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{\Delta u}{\Delta t},$$

ce qui conduit à la formule approchée :

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f(u)$$

Q8. Montrer qu'alors, sous une forme adaptée à un traitement informatique :

$$u_{i+1} = u_i + f(u_i) \times \Delta t.$$

La construction de la solution de l'équation différentielle se fait alors pas à pas, de proche en proche : on calcule chaque valeur de la tension à partir de la précédente, du pas de temps, de la fonction f connue et de la valeur initiale u_0.
Pour nous familiariser avec la méthode, nous allons l'implémenter à la main dans un premier temps.

Q9. Recopier, puis compléter à la main le tableau ci-dessous, en appliquant la méthode d'Euler pour obtenir u_i et en utilisant la solution exacte de l'équation différentielle pour obtenir $u_{i,th}$ en respectant le pas de temps $\Delta t = 0,005$ s imposé (le tableau s'arrête avant que l'algorithme n'ait abouti). Les valeurs des tensions en volt seront données avec deux chiffres après la virgule.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_i(s)$	0,000	0,005									
$u_i(V)$											
$u_{i,th}(V)$											

Q10. On constate que le résultat théorique et celui de la méthode d'Euler ne coïncident pas. Proposer deux causes à l'écart observé, puis expliquer comment modifier l'algorithme pour améliorer cet accord.

On implémente à présent la méthode d'Euler en langage de programmation Python, dans le but de faire une représentation graphique de la construction.

Le script fourni ci-dessous fait suite à celui donné plus haut pour représenter la solution exacte de l'équation différentielle. On y a défini une fonction d'Euler qui dépend du nombre N d'intervalles de temps choisis.

```
def f(u):
    .........

def Euler(N):
    stepsize=.........
    u=u0
    U=[u0]
    t=t0
    T=[t0]
    for i in range(N):
        u=u+stepsize*f(u)
        t=t+stepsize
        U.append(u)
        T.append(t)
    return U,T

U,T=Euler(.........)

plt.plot(T,U,'r+')
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("u(V)")
.........
```

Q11. Recopier sur votre copie les lignes de code incomplètes, avant de les compléter dans l'ordre. On prendra $N = 100$ pour fixer les idées.

Les résultats du programme complet sont représentés ci-dessous, pour différentes valeurs de N :

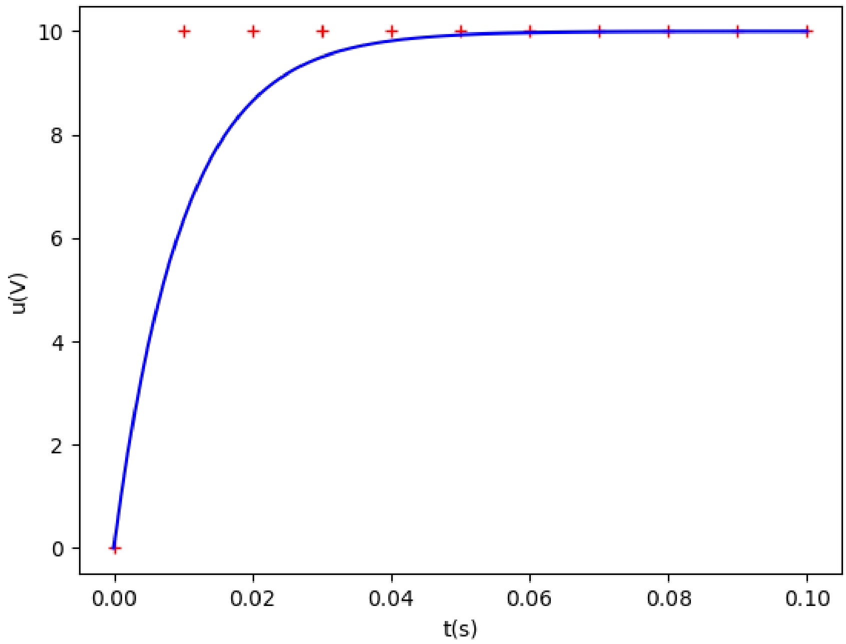


FIGURE 2 – Courbe représentative de $u(t)$ obtenue par la méthode d'Euler (croix) et comparaison avec la courbe théorique (en ligne continue) pour $\mathrm{N} = 10$

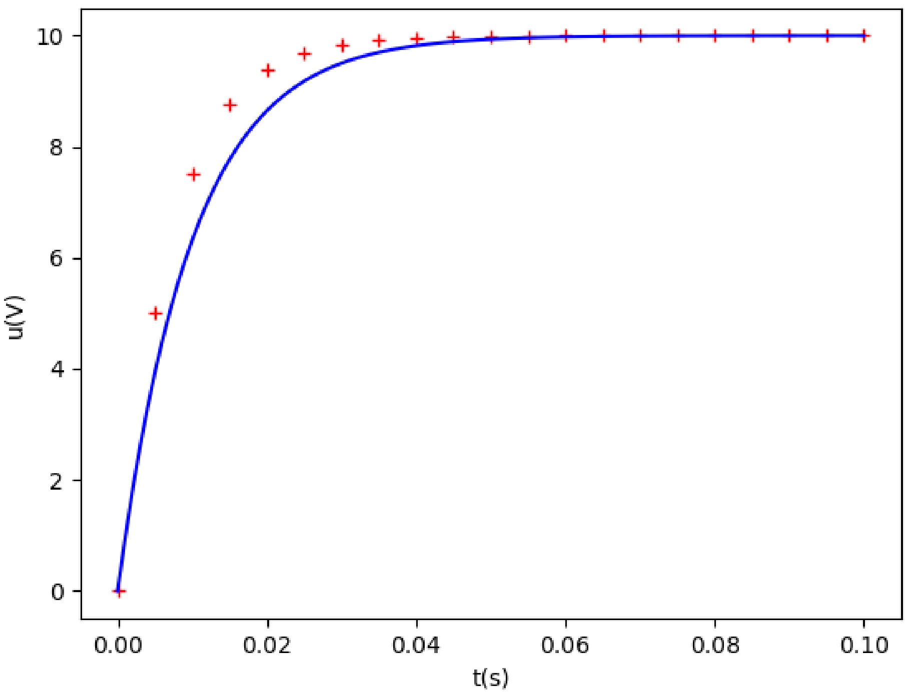


FIGURE 3 – Courbe représentative de $u(t)$ obtenue par la méthode d'Euler (croix) et comparaison avec la courbe théorique (en ligne continue) pour $\mathrm{N} = 20$

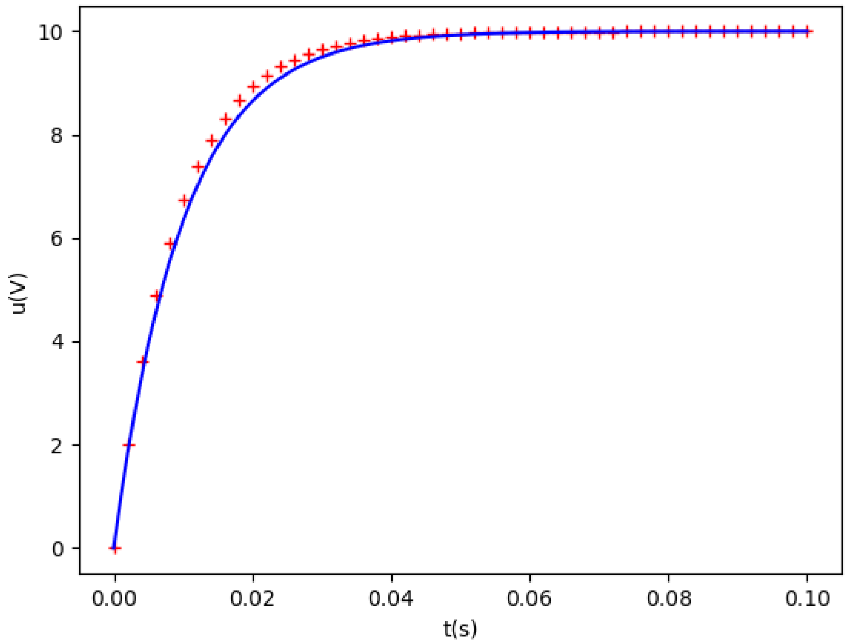


FIGURE 4 – Courbe représentative de $u(t)$ obtenue par la méthode d'Euler (croix) et comparaison avec la courbe théorique (en ligne continue) pour $\mathrm{N} = 50$

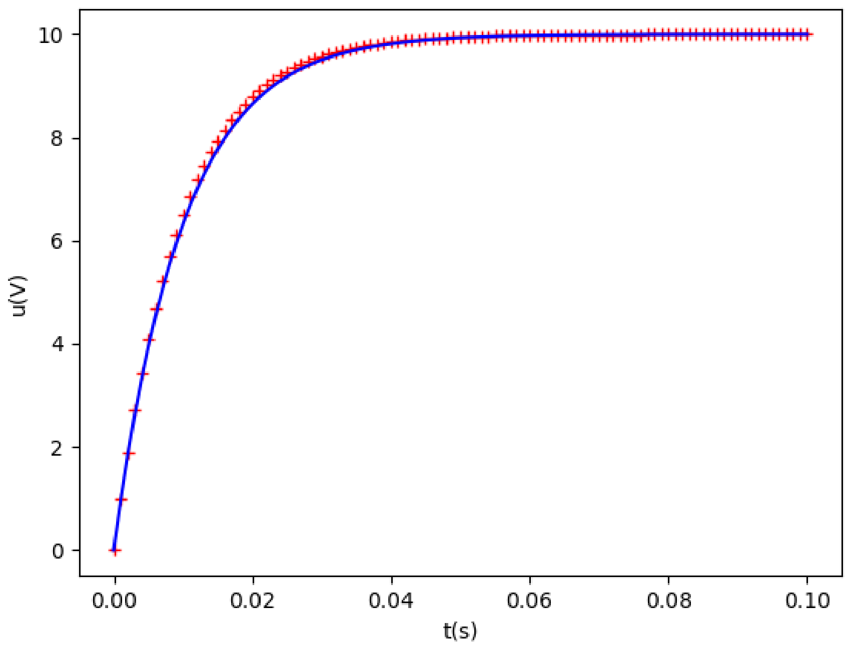


FIGURE 5 – Courbe représentative de $u(t)$ obtenue par la méthode d'Euler (croix) et comparaison avec la courbe théorique (en ligne continue) pour $\mathrm{N} = 100$

Q12. Commenter les résultats obtenus. Vous discuterez notamment de l'influence du choix de pas de temps.

2 Annexe à rendre avec la copie

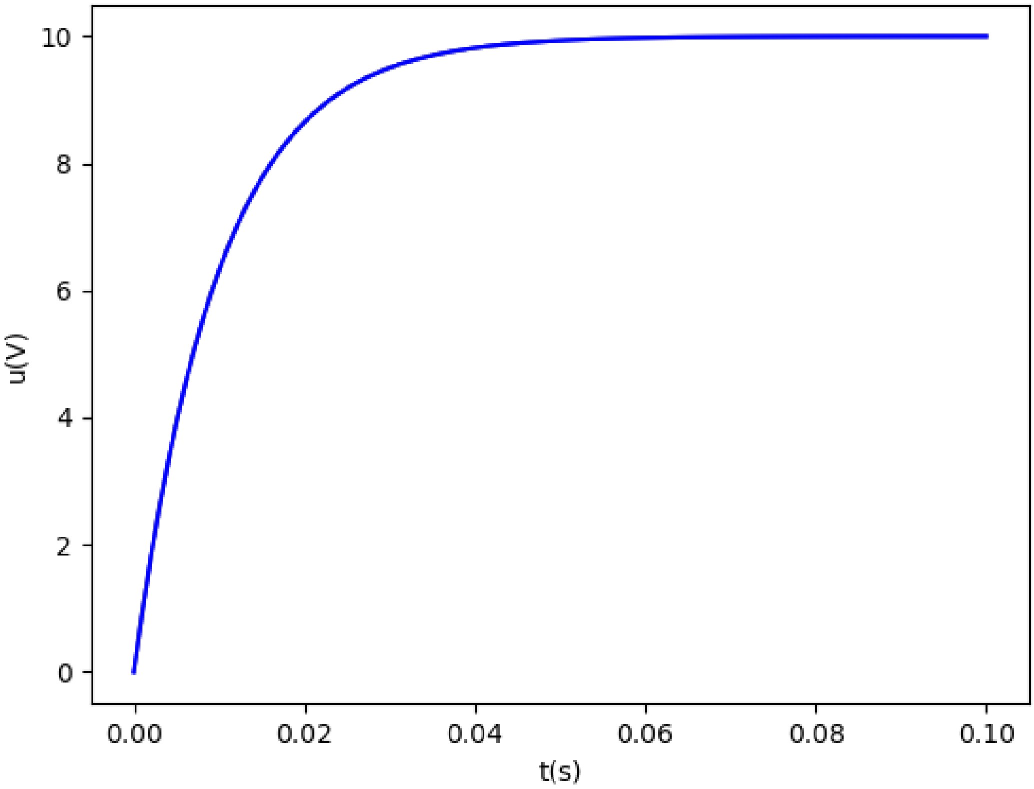


FIGURE 6 – Graphique à compléter (**Q6.**)