CHAPITRE 18

Filtrage linéaire des signaux périodiques

En **régime sinusoïdal forcé**, un circuit électrique transforme une **tension d'entrée** sinusoïdale en une **tension de sortie** elle aussi sinusoïdale, de même fréquence, et dont l'**amplitude** et le **déphasage** par rapport au signal d'entrée sont fonction de cette fréquence.

Un tel dispositif, qui permet d'**atténuer** (diminuer l'amplitude) ou d'**amplifier** (augmenter l'amplitude d') un signal sinusoïdal et/ou de le déphaser (le décaler temporellement) sans modifier sa fréquence, est qualifié de **filtre linéaire**.

Le **filtrage des signaux** est un domaine d'étude très vaste et encore actif. On trouve des filtres dans la plupart des appareils électroniques qui nous entourent : les téléphones, les radios, les télévisions, les ordinateurs, etc. Dans ce cours nous nous focaliserons sur l'électronique, mais il existe aussi des filtres mécaniques ou optiques.

La plupart des signaux ne sont pas sinusoïdaux, mais certains sont néanmoins périodiques. Comme un signal périodique peut être décomposé en une **série de Fourier**, autrement dit une somme (éventuellement infinie) de signaux sinusoïdaux, et que la réponse d'un filtre linéaire est la somme des réponses aux composantes sinusoïdales qui constituent cette décomposition de Fourier, un filtre sinusoïdal peut modifier cette décomposition et donc la forme d'un signal complexe périodique, tout en conservant sa fréquence. Un filtre est conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences (ou pulsations) d'un signal d'entrée.

Le but de ce chapitre est d'apprendre à :
▹ classer les filtres les plus simples selon leur fonction ;
▹ prévoir leur effet grâce à leur **fonction de transfert harmonique** et des représentations graphiques appelées diagrammes de Bode.

FIGURE 1 – Gauche : portrait de Joseph Fourier (1768-1830) ; droite : photographie de Henrik Wade Bode (1905-1982)

1 Signaux périodiques

Les **signaux périodiques**, et en particulier les **signaux sinusoïdaux**, sont le concept phare du domaine du filtrage linéaire.

1.1 Rappels et compléments sur les signaux sinusoïdaux

L'expression d'un signal sinusoïdal est de la forme :

$$s(t) = \mathrm{S}\cos(\omega t + \phi)$$

où S représente l'**amplitude**, ω la **pulsation** et ϕ la **phase à l'origine**.

Un tel signal est **périodique** : il se répète à l'identique à intervalles de temps réguliers. Sa pulsation ω (en rad/s) est liée à la **période** T (en s) et à la **fréquence** f (en Hz) par les relations :

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f.$$

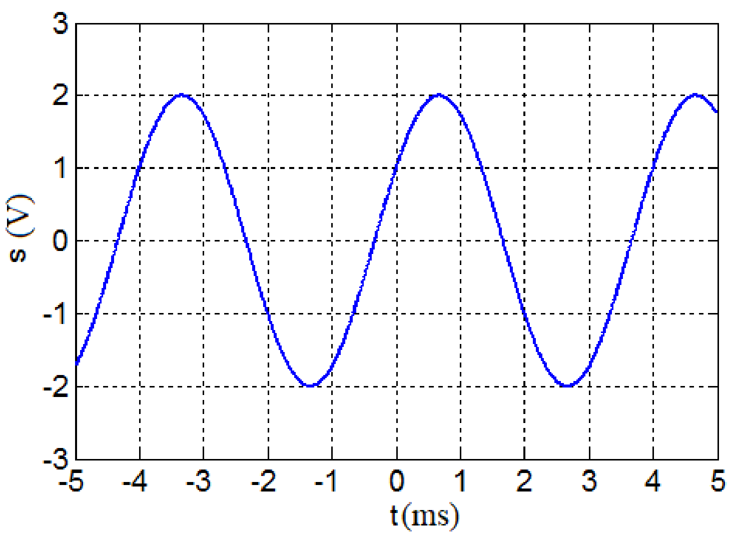
Exercice d'application 1 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Identifier la grandeur physique correspondant à un signal électrique.

Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

En vous appuyant sur la représentation graphique du signal sinusoïdal ci-dessous, déterminer :



1. la nature de la grandeur physique qui lui correspond ;
2. son amplitude S ;
3. sa période T ;
4. sa fréquence f ;
5. sa pulsation ω ;
6. sa phase à l'origine ϕ.

Exercice d'application 2 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale.
Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, cos^2 *et sin*^{2}.
Définir la valeur moyenne d'un signal et sa valeur efficace.

1. En vous appuyant sur la définition de la moyenne d'une fonction sur un intervalle, justifier que la **valeur moyenne** d'un signal périodique $s(t)$ de période T vaut :

$$\langle s\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt.$$

2. Calculer la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal, puis expliquer comment on aurait pu trouver ce résultat sans calcul.

3. Avec le bouton "offset" d'un générateur de signaux basse fréquence (GBF), on peut ajouter une valeur constante au signal. Écrire l'expression mathématique de ce signal $s_{\text{offset}}(t)$, le représenter graphiquement, puis déterminer sa valeur moyenne.

4. On appelle **valeur crête à crête** d'un signal la différence entre sa valeur maximale et sa valeur minimale :

$$S_{cc} = s_{\max} - s_{\min}.$$

Définir l'amplitude d'un signal sinusoïdal à partir de sa valeur crête à crête.

5. L'énergie associée à un signal sinusoïdal est proportionnelle au carré de ce signal. Illustrer cette affirmation en vous appuyant sur des exemples issus du cours sur l'oscillateur harmonique.

6. On définit la **valeur efficace d'un signal sinusoïdal** par

$$S_{\text{eff}} = \langle s^2\rangle = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt}.$$

Justifier qu'elle représente l'amplitude que devrait avoir un signal continu (au sens de "constant") pour avoir la même énergie moyenne que ce signal sinusoïdal.

7. Montrer par un calcul que la valeur efficace d'un signal sinusoïdal (on pourra, sans perte de généralité, supposer que sa phase à l'origine est nulle) est :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}},$$

puis expliquer comment on aurait pu le trouver sans faire le calcul explicitement.

8. Expliquer comment mesurer la valeur efficace d'une tension sinusoïdale.

1.2 Compléments sur les signaux périodiques

Un signal est **périodique** s'il se répète à l'identique à intervalles de temps réguliers. On appelle **période** la durée T associée à un motif élémentaire d'un tel signal.

1.2.1 Décomposition en série de Fourier

Un théorème de Fourier indique qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'un terme constant S_0 et d'une somme, éventuellement infinie, de signaux sinusoïdaux ayant une fréquence multiple de la fréquence f du signal :

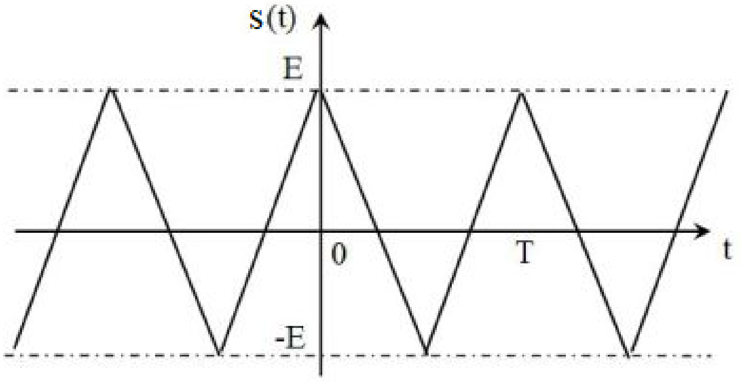
$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

où les suites (S_n) et (ϕ_n) sont les **coefficients de Fourier** du signal $s(t)$, qui peuvent être déterminés explicitement si on connaît l'expression mathématique du signal. Ce calcul n'étant pas au programme, nous considérerons que les coefficients de Fourier sont tabulés.

Un signal périodique quelconque est caractérisé par ses coefficients de Fourier.

Par exemple, le signal triangulaire représenté ci-dessous a pour série de Fourier :

$$s(t) = \frac{8E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[(2n+1)\omega t\right].$$



On donne un nom aux différents signaux sinusoïdaux qui composent la série de Fourier d'un signal périodique :

▹ S_0 est la valeur moyenne du signal. Il est parfois utile de l'interpréter comme une composante de Fourier de fréquence nulle.

▹ Le signal $s_n(t) = S_n\cos(n\omega t + \phi_n)$ (ou, par abus de langage, sa fréquence) est l'**harmonique de rang** n.

▹ L'harmonique de rang 1, $s_1(t) = S_1\cos(\omega t + \phi_1)$ (ou par abus de langage, sa fréquence) est le **fondamental**.

On définit la **valeur efficace** S_{eff} d'un signal périodique par :

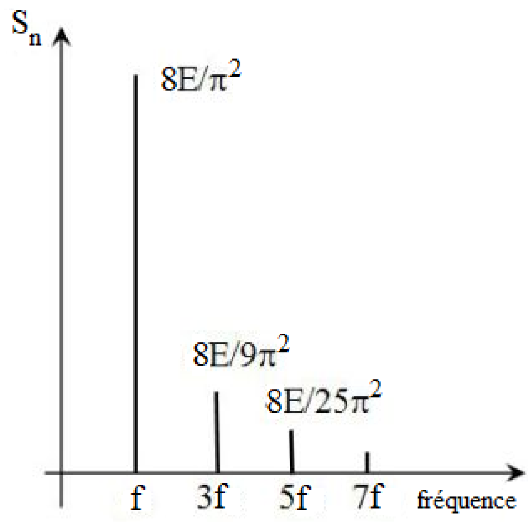
$$S_{\text{eff}} = \sqrt{S_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}S_n^2} = \sqrt{S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}S_{n,\text{eff}}^2}.$$

Un signal périodique est d'autant plus riche et complexe qu'il comporte un nombre élevé de coefficients de Fourier non nuls.

1.2.2 Spectre d'un signal périodique

Les coefficients de Fourier suggèrent une nouvelle façon de représenter graphiquement un signal périodique et de visualiser les informations importantes concernant ce dernier. On appelle **spectre d'un signal** la représentation graphique des amplitudes de ses composantes sinusoïdales de Fourier en fonction de la fréquence.

Par exemple, le spectre du signal triangulaire défini plus haut est :



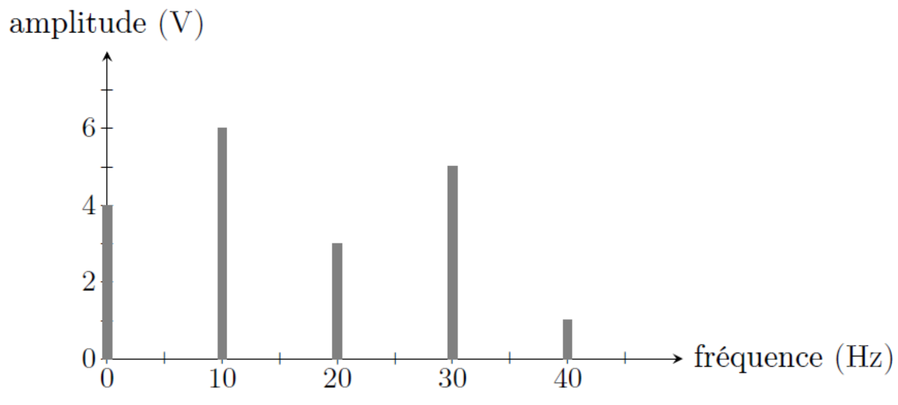
Un signal périodique a un **spectre discret et quantifié** : les fréquences forment un ensemble dénombrable et sont toutes un multiple entier de la fréquence fondamentale.

Exercice d'application 3 :

CAPACITÉ TRAVAILLÉE :

Identifier sur le spectre d'un signal périodique la composante continue, le fondamental et les harmoniques.

Un étudiant en BTS réalise l'analyse spectrale d'un signal électrique périodique, représentée ci-dessous.



1. Déterminer la valeur moyenne de ce signal et sa fréquence fondamentale.
2. Donner l'amplitude et la fréquence de chacune des harmoniques.
3. Calculer la valeur efficace de ce signal.
4. Expliquer quelle(s) information(s) manque(nt) pour écrire la décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ correspondant.

2 Filtrage linéaire d'un signal périodique

2.1 Définition d'un filtre linéaire

On peut voir un **filtre** comme un **quadripôle** (un composant à quatre bornes) qui fournit un **signal de sortie** (ou réponse) $s(t)$ à partir d'un **signal d'entrée** (ou excitation) $e(t)$.

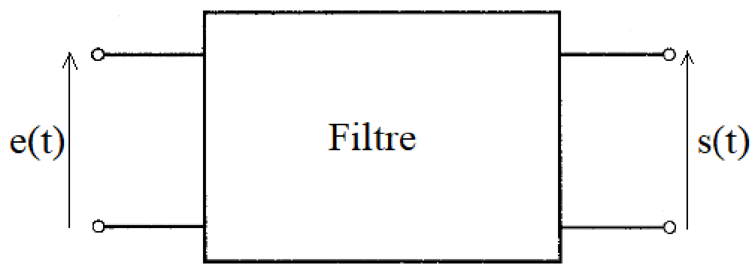


FIGURE 2 – Représentation schématique d'un filtre, vu comme une boîte noire

Un filtre est **linéaire** s'il a les trois propriétés équivalentes suivantes :
▹ le signal de sortie est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i s}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i e}{dt^i},$$

où les coefficients $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont constants et $n \geq m$;
▹ lorsque le signal $e(t)$ est sinusoïdal, le signal $s(t)$ l'est également et a la même fréquence que lui en régime sinusoïdal forcé ;
▹ si on décompose un signal d'entrée quelconque en signaux sinusoïdaux (sous forme de série de Fourier) : $e(t) = \sum_i e_i(t)$ et qu'à chaque signal sinusoïdal d'entrée $e_i(t)$ correspond un signal sinusoïdal de sortie $s_i(t)$, alors $s(t) = \sum_i s_i(t)$.

2.2 Gain et phase d'un filtre linéaire

On note comme dans le chapitre précédent :

$$e(t) = \mathrm{E}\cos(\omega t + \phi_e) = \mathrm{Re}(\underline{e}(t)) = \mathrm{Re}(\underline{\mathrm{E}}e^{j\omega t})$$

et

$$s(t) = \mathrm{S}\cos(\omega t + \phi_s) = \mathrm{Re}(\underline{s}(t)) = \mathrm{Re}(\underline{\mathrm{S}}e^{j\omega t}),$$

où $\underline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\phi_e}$ et $\underline{\mathrm{S}} = \mathrm{S}e^{j\phi_s}$ sont les **amplitudes complexes** du signal d'entrée et du signal de sortie.

Les deux informations nécessaires pour caractériser le comportement du filtre à une fréquence donnée sont :
▹ le rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée

$$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{E}},$$

appelé **gain** du filtre ;

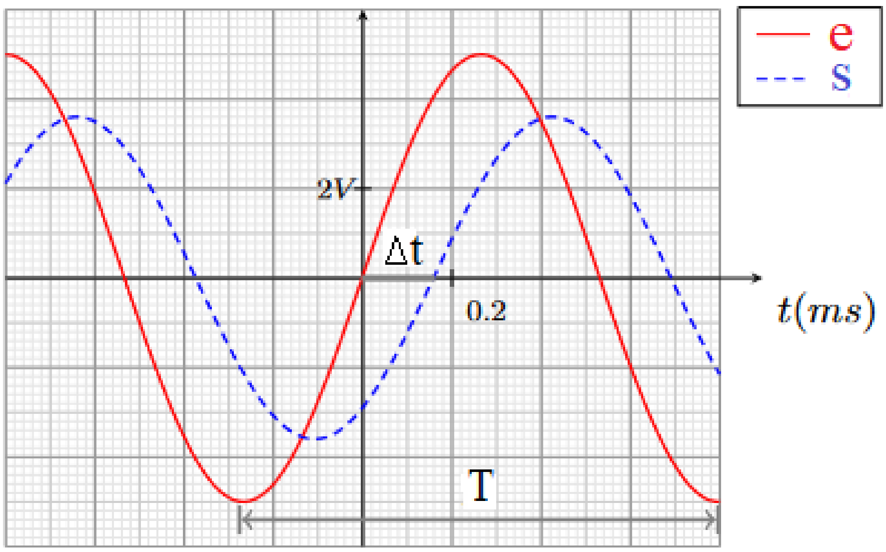
▹ le **déphasage** entre le signal de sortie et le signal d'entrée

$$\phi = \phi_s - \phi_e,$$

appelé **phase** du filtre.

Exercice d'application 4 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Mesurer une période ou une fréquence.
Reconnaître une avance ou un retard de phase.
Passer d'un décalage temporel à un déphasage.

Un oscilloscope en mode bicourbe affiche les signaux d'entrée et de sortie d'un filtre représentés ci-dessous :



1. Indiquer si le signal de sortie est en avance de phase ou en retard par rapport au signal d'entrée.

2. Déterminer la fréquence f_e du signal d'entrée et la fréquence f_s du signal de sortie. Commenter.

3. Déterminer graphiquement le gain et la phase de ce filtre pour cette fréquence d'entrée. Dans votre raisonnement, vous pourrez vous appuyer sur les grandeurs Δt et T représentées sur le graphique.

2.3 Diagrammes de Bode d'un filtre linéaire

2.3.1 Définitions

L'expérience montre que le gain d'un filtre linéaire peut varier sur plusieurs ordres de grandeur suivant la fréquence du signal sinusoïdal d'entrée.

C'est la principale raison pour laquelle on introduit le **gain en décibel**, défini par :

$$\mathrm{G_{dB}} = 20\log(\mathrm{G}),$$

où $\log$ désigne le **logarithme décimal**, qui est la fonction inverse de la fonction $10^{\cdot}$. Elle possède les mêmes propriétés qualitatives que le logarithme néperien : $\log(1) = 0$ et $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$. On retiendra que log$(10) = 1$ et log$(2) \simeq 0,3$.

L'intervalle de fréquence (ou de pulsation) sur lequel on travaille s'étale lui aussi sur plusieurs ordres de grandeur.

Pour visualiser efficacement l'action d'un filtre linéaire en fonction de la fréquence du signal d'entrée, on trace ses **diagrammes de Bode** :

▹ la **courbe de gain** représente G_{dB} en fonction d'une variable de nature fréquentielle, souvent $\log(\omega/\omega_0)$, où ω_0 est une pulsation de référence (**pulsation propre** du système électrique, par exemple), ou bien la pulsation en échelle logarithmique ;

▹ la **courbe de phase** représente ϕ en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$, ou bien de ω en échelle logarithmique.

Un filtre linéaire est entièrement caractérisé par ses diagrammes de Bode. Pour les obtenir expérimentalement, on mesure le gain et le déphasage pour plusieurs fréquences du signal d'entrée.

▹ On appelle **décade** un intervalle sur lequel la pulsation est multipliée par un facteur 10 ou, ce qui est équivalent, sur lequel $\log(\omega/\omega_0)$ augmente d'une unité.

▹ On dit d'un filtre qu'il "laisse passer une fréquence" s'il atténue peu un signal d'entrée sinusoïdal qui a cette fréquence : $G \simeq 1$. On dit d'un filtre qu'il "coupe une fréquence" s'il atténue fortement un signal d'entrée sinusoïdal qui a cette fréquence : $G \ll 1$.

▹ On appelle **pulsation de coupure** une pulsation ω_c telle que

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}.$$

On montre qu'alors

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3\text{dB},$$

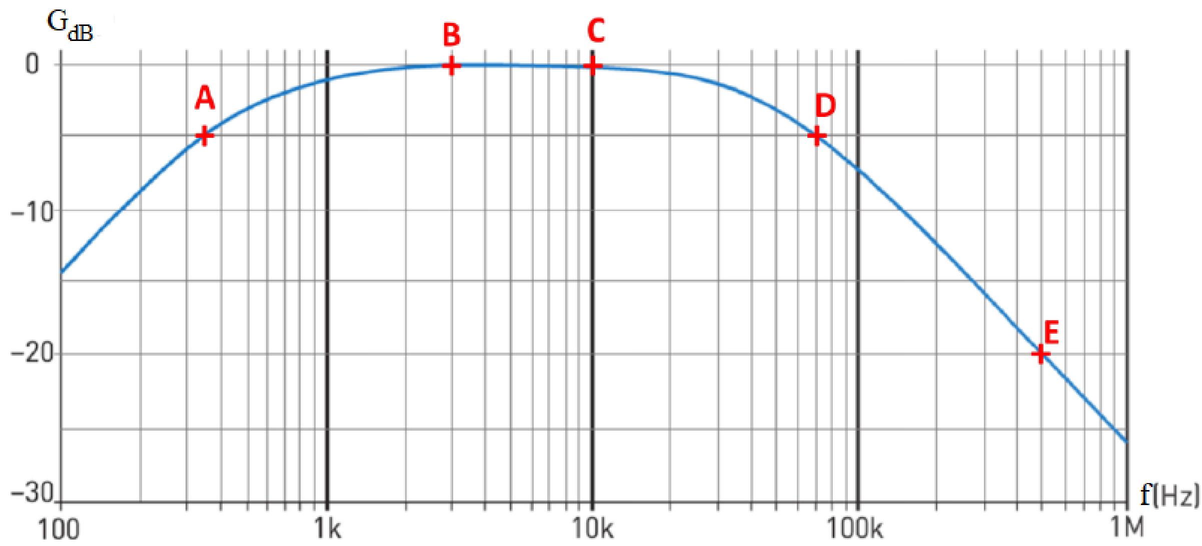
ce qui explique pourquoi on parle parfois de **pulsation de coupure** à -3dB.

▹ On appelle **bande passante** d'un filtre linéaire l'intervalle de fréquences dans lequel $G \geq G(\omega_c)$. Typiquement, on considère que le filtre laisse passer les signaux de fréquence comprise dans sa bande passante et coupe les signaux dont la fréquence se situe hors de sa bande passante.

Exercice d'application 5 :

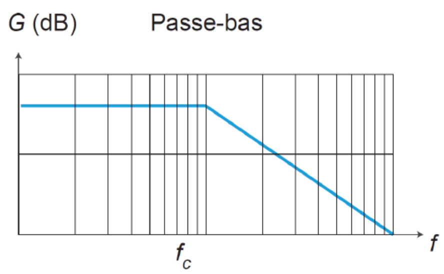
On donne le diagramme de Bode en gain d'un filtre ci-dessous.

1. Déterminer la fréquence, le gain en décibel et le gain pour chacun des points représentés sur le graphe.
2. Déterminer la/les fréquence(s) de coupure du filtre et sa bande passante.
3. Expliquer pourquoi ce filtre linéaire associé est qualifié de "passe-bande".

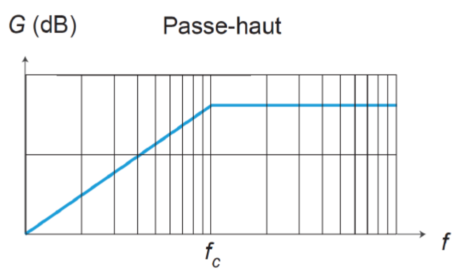


2.3.2 Différents types de filtres

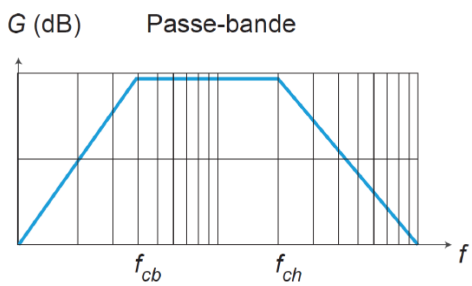
Une étude systématique de l'allure des diagrammes de Bode (en gain) permet de classer les filtre en fonction de leur fonction. Seuls trois cas sont au programme : les filtres **passe-bas**, **passe-haut** et **passe-bande**. L'allure de leurs diagrammes de Bode est donnée schématiquement ci-dessous :



Laisse passer les basses fréquences
Atténue les hautes fréquences
Bande passante $= [0, f_c]$



Laisse passer les hautes fréquences
Atténue les basses fréquences
Bande passante $= [f_c, +\infty[$



Laisse passer une gamme de fréquences
Atténue les basses fréquences
Atténue les hautes fréquences
Bande passante $= [f_{cb}, f_{ch}]$

▹ Un filtre passe-bas sert typiquement à "purifier" un signal, en sélectionnant sa valeur moyenne et/ou sa composante fondamentale, ou encore en éliminant un bruit de haute fréquence.

▹ Un filtre passe-haut sert typiquement à éliminer la composante continue d'un signal.

▹ Un filtre passe-bande permet de sélectionner un signal dans un domaine de fréquence donnée, par exemple lorsqu'on sélectionne une station de radio.

3 Étude théorique des filtres linéaires

3.1 Fonction de transfert harmonique

3.1.1 Définition et intérêt

Sur le plan théorique, la grandeur complexe qui code les deux informations qui permettent de caractériser un filtre linéaire, à savoir son gain et sa phase, est la **fonction de transfert harmonique** du filtre, notée $\underline{\mathrm{H}}$, définie par le quotient des amplitudes complexes des signaux de sortie et d'entrée :

$$\underline{\mathrm{H}} = \frac{\underline{\mathrm{S}}}{\underline{\mathrm{E}}}.$$

Il s'agit d'une fonction de la variable ω.

On remarque que

$$\underline{\mathrm{H}} = \mathrm{G}e^{j\phi},$$

de sorte que

$$\mathrm{G} = |\underline{\mathrm{H}}|$$

et

$$\phi = \arg(\underline{\mathrm{H}}).$$

3.1.2 Ordre d'un filtre linéaire

On rappelle que pour un filtre linéaire, le signal de sortie et le signal d'entrée sont liés par une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i s}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i e}{dt^i},$$

où les coefficients $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont constants et $n \geq m$.

L'utilisation de la notation complexe, dans laquelle une dérivée est remplacée par une multiplication par $j\omega$, permet d'établir que la fonction de transfert d'un filtre linéaire est une fraction rationnelle (autrement dit, un quotient de polynômes) de la variable $j\omega$, pour laquelle l'ordre du polynôme au dénominateur est supérieur à celui du polynôme au numérateur :

$$\underline{\mathrm{H}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}.$$

On appelle **ordre d'un filtre linéaire** l'ordre n du polynôme au dénominateur de cette fraction rationnelle. Seuls les filtres d'ordre 1 et 2 sont au programme.

3.2 Filtres d'ordre 1

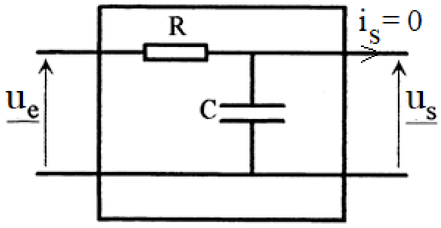
Exercice d'application 6 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Prévoir le comportement d'un filtre en hautes et basses fréquences.

Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.

Le but de cet exercice est de tracer les diagrammes de Bode du filtre le plus simple, qui consiste en un circuit RC série. On s'intéresse au lien entre la tension d'entrée u_e et la tension de sortie u_s du filtre en régime sinusoïdal forcé. Le filtre est en boucle ouverte, de sorte que l'intensité du courant en sortie vaut $i_s = 0$.



Filtre RC

1. Prévoir sans calcul le comportement du condensateur, puis du filtre, à basse et à haute fréquence, en vous appuyant sur la notion d'impédance complexe. Expliquer alors pourquoi ce filtre est qualifié de "passe-bas".

2. Définir la fonction de transfert harmonique $\underline{H}$ de ce filtre.

On souhaite établir l'expression de la fonction de transfert, ce qu'on fera par deux méthodes différentes.

3.a. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension de sortie $u_s(t)$. La transformer en équation polynomiale de la variable $j\omega$ en utilisant la notation complexe. En déduire l'expression de la fonction de transfert.

3.b. Rappeler les expressions de l'impédance complexe $\underline{Z}_C$ d'un condensateur et $\underline{Z}_R$ d'une résistance en régime sinusoïdal forcé. Reconnaître une structure de pont diviseur de tension et en déduire l'expression de la fonction de transfert.

3.c. Mettre la fonction de transfert sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$.

4. Établir l'expression du gain G, puis du gain en décibel G_{dB} de ce filtre. Vérifier l'accord qualitatif avec le résultat de la question 1 par des calculs de limites.

5. Établir l'expression de la phase ϕ du filtre.

6. Déterminer une expression équivalente à la fonction de transfert lorsque $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ (basse fréquence) et lorsque $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ (haute fréquence) sous la forme d'une puissance de $j\frac{\omega}{\omega_0}$, et en déduire le comportement asymptotique du gain en décibel et de la phase dans ces deux régimes.

7. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques en gain et en phase de ce filtre.

8. Calculer le gain, le gain en décibel et la phase pour la valeur particulière $\omega = \omega_0$. Que constate-t-on ?

9. Ajouter le point correspondant sur les graphiques tracés à la question 7. Tracer alors sur ces mêmes graphiques l'allure des diagrammes de Bode en gain et en phase.

La fonction de transfert des principaux **filtres du premier ordre** peut se mettre sous l'une des formes canoniques suivantes, où $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ est une pulsation réduite :

▷ pour un **filtre passe-bas** (circuit RC par exemple) :

$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jx};$$

▷ pour un **filtre passe-haut** (circuit CR ou RL par exemple) :

$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}.$$

Les diagrammes de Bode ci-dessous ont été tracés dans le cas particulier d'un gain statique $H_0 = 1$.

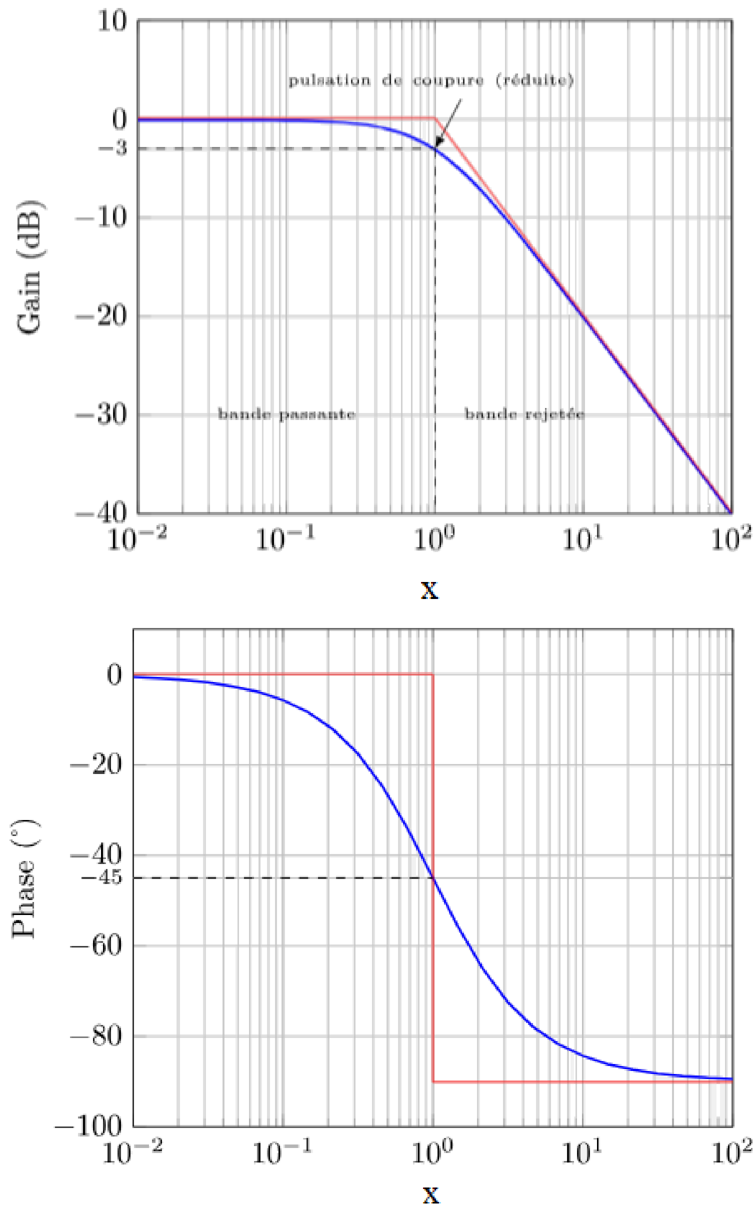


FIGURE 3 – Diagramme de Bode en gain (haut) et en phase (bas) pour un filtre passe-bas d'ordre 1, et diagrammes asymptotiques associés

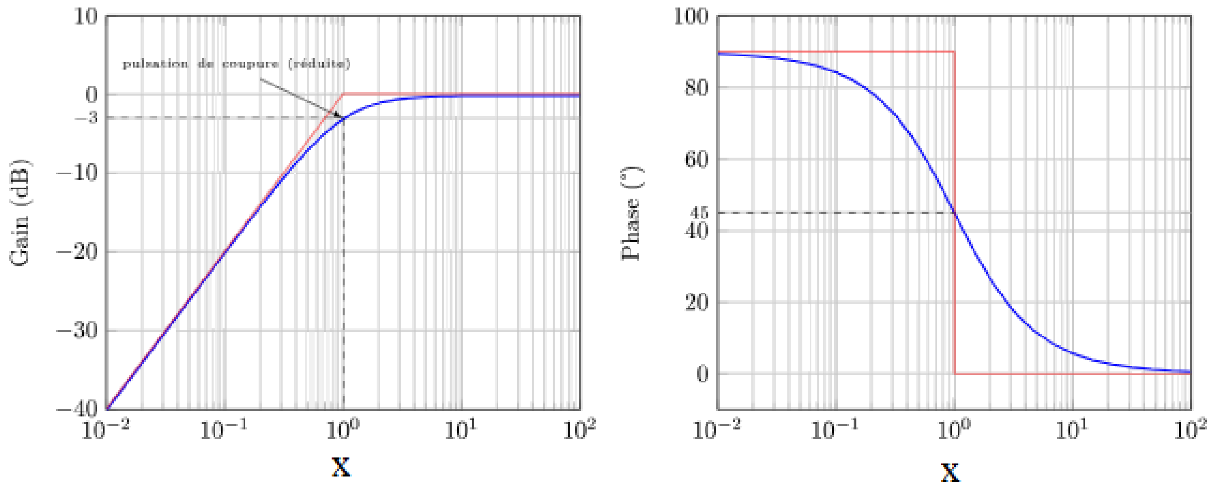


FIGURE 4 – Diagramme de Bode en gain (gauche) et en phase (droite) pour un filtre passe-haut d'ordre 1, et diagrammes asymptotiques associés

▹ Dans le diagramme de gain, on observe une asymptote horizontale à basse fréquence pour un filtre passe-bas et à haute fréquence pour le filtre passe-haut.

▹ L'asymptote à haute fréquence a une pente de -20 dB/décade pour un filtre passe-bas, et celle à basse fréquence a une pente de $+20$ dB/décade pour un filtre passe-haut.

Pour un filtre passe-bas ou passe-haut du premier ordre, la pulsation de coupure vérifie $\omega_c = \omega_0$, où ω_0 est la pulsation propre du circuit.

▹ Cette pulsation se situe à l'intersection des deux asymptotes dans le diagramme de Bode en gain.

Exercice d'application 7 :

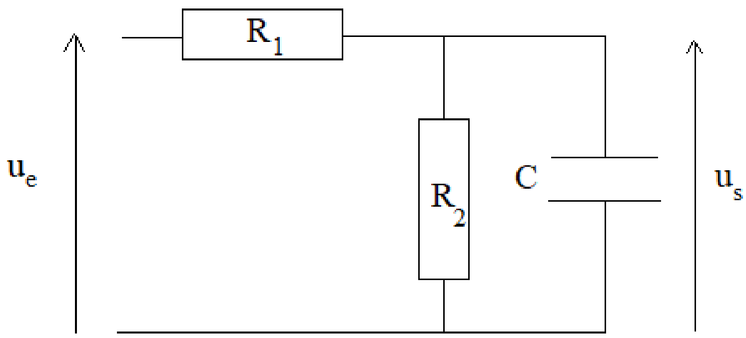
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Prévoir le comportement d'un filtre en hautes et basses fréquences.

Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou ses représentations graphiques pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale.

Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode fournis d'après l'expression de la fonction de transfert.

On étudie le filtre linéaire schématisé ci-dessous :

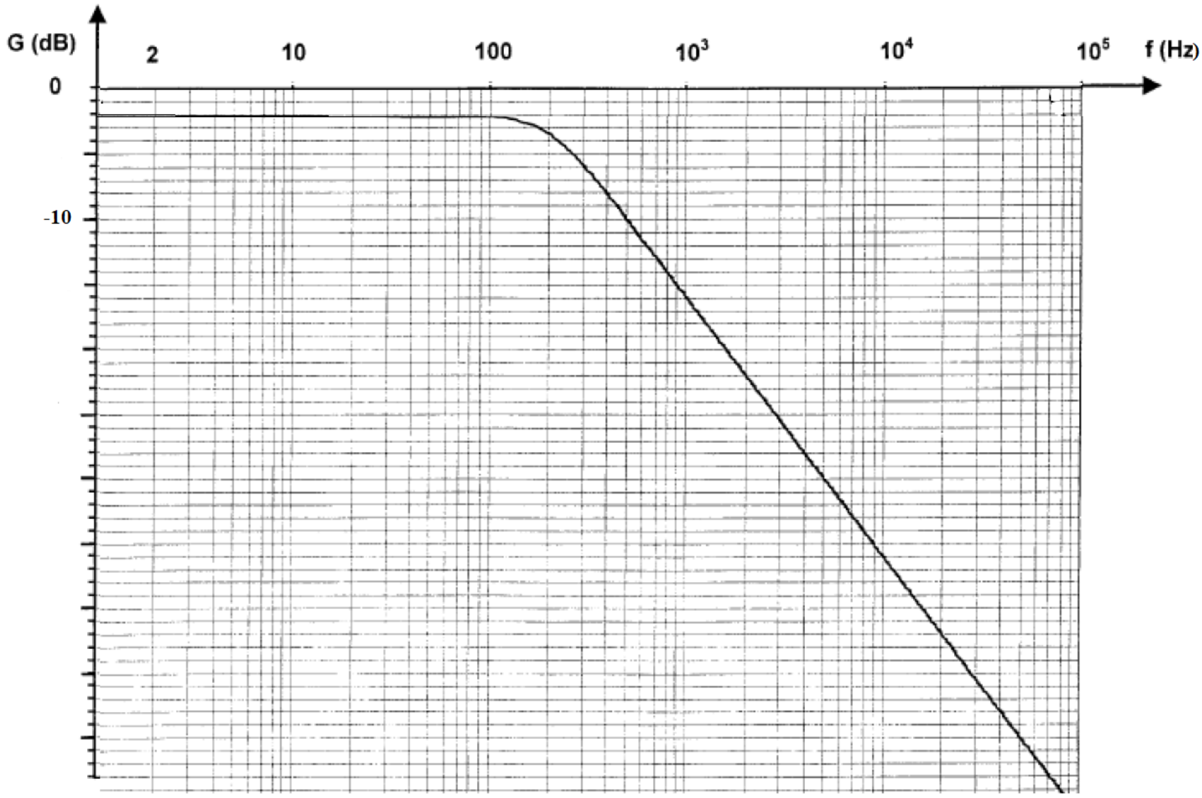


En régime sinusoïdal forcé, $u_e = E\cos(\omega t)$ et $u_s = S(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$.

1. Par une analyse qualitative de son comportement en basse fréquence et en haute fréquence, déterminer la nature du filtre.

2. Établir la fonction de transfert de ce filtre, la mettre sous forme canonique et exprimer H_0 et ω_0 en fonction de R_1, R_2 et C.

On donne le diagramme de Bode en gain de ce filtre.



3. Interpréter les zones rectiligne du diagramme de Bode en vous appuyant sur la fonction de transfert.

4. Déterminer graphiquement les valeurs de la pulsation de coupure ω_c et du gain statique H_0.

5. On donne $R_1 = 680\Omega$. En déduire les valeurs de R_2 et C.

6. Déterminer le signal de sortie pour les entrées suivantes :

a. signal continu d'amplitude $6V$;

b. signal sinusoïdal de fréquence 1kHz et d'amplitude $6V$.

3.3 Filtres d'ordre 2

L'exemple typique d'un **filtre du deuxième ordre** est le circuit RLC série.

Suivant le dipôle dont la tension joue le rôle de signal de sortie du filtre, on peut obtenir chacun des types de filtres mentionnés ci-dessous :

▹ pour un filtre **passe-bas** du deuxième ordre (par exemple, un circuit RLC avec la tension de sortie aux bornes du condensateur) :

$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2},$$

où Q désigne le facteur de qualité du circuit. Ce cas correspond à la résonance en tension étudiée dans le chapitre précédent, on observe ce phénomène si $\mathrm{Q} > 1/\sqrt{2}$.

▷ pour un filtre **passe-bande** (par exemple, un circuit RLC avec la tension de sortie aux bornes de la résistance) :

$$\underline{\mathrm{H}}(x) = \mathrm{H}_0 \frac{\frac{jx}{\mathrm{Q}}}{1 + \frac{jx}{\mathrm{Q}} - x^2}.$$

Ce cas correspond à la résonance en intensité étudiée dans le chapitre précédent, on observe ce phénomène quelle que soit la valeur de Q.

Pour des raisons pratiques, on utilise parfois la forme équivalente suivante pour la fonction de transfert :

$$\underline{\mathrm{H}}(x) = \mathrm{H}_0 \frac{1}{1 + j\mathrm{Q}\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

▷ pour un filtre **passe-haut** (par exemple, un circuit RLC avec la tension de sortie aux bornes de la bobine, hors programme) :

$$\underline{\mathrm{H}}(x) = \mathrm{H}_0 \frac{-x^2}{1 + \frac{jx}{\mathrm{Q}} - x^2}.$$

Cette fois, les diagrammes de Bode ont une allure qui dépend de la valeur du facteur de qualité Q.

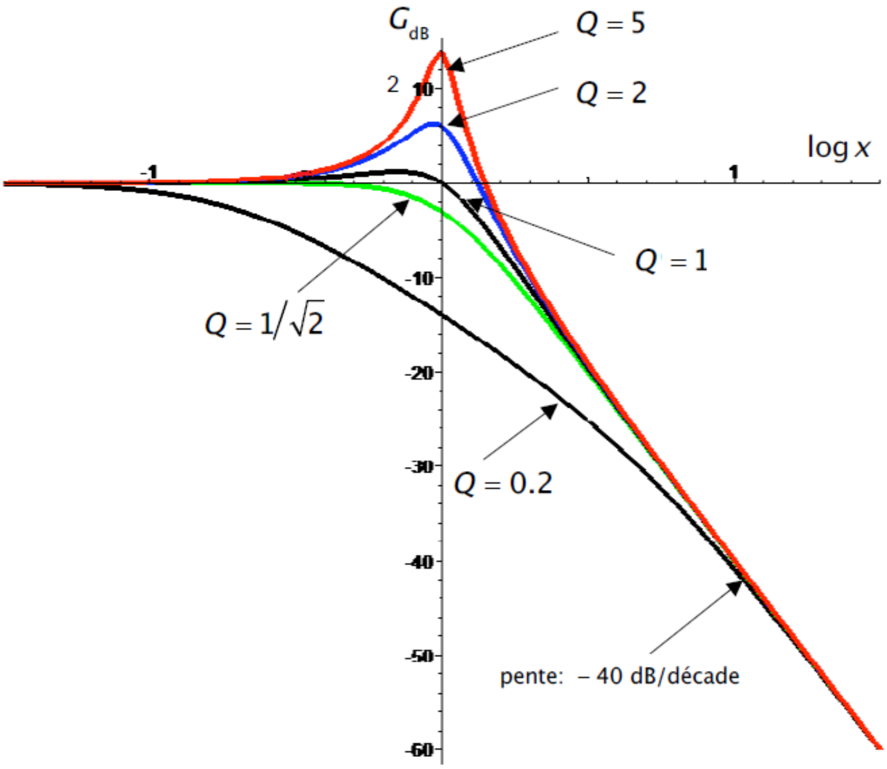


FIGURE 5 – Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour différents facteurs de qualité Q

La pente de l'asymptote à haute fréquence d'un filtre passe-bas du deuxième ordre vaut -40 dB/décade à haute fréquence : ce filtre est beaucoup plus sélectif qu'un passe-bas du premier ordre, c'est d'ailleurs là son intérêt.

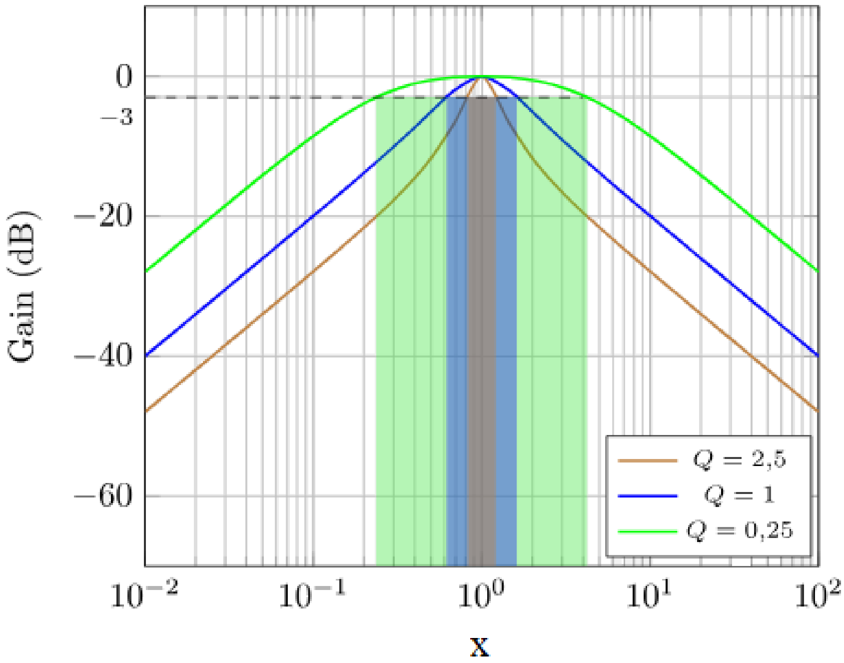


FIGURE 6 – Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bande d'ordre 2 pour différents facteurs de qualité Q et bande passante associée

Pour un filtre passe-bande d'ordre 2, il existe systématiquement deux fréquences de coupure. La bande passante $[\omega_{c1};\omega_{c2}]$ est d'autant plus fine que le facteur de qualité est élevé :

$$\Delta\omega_c = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Ainsi, un filtre passe-bande de facteur est d'autant plus sélectif que son facteur de qualité est élevé.

La pente de l'asymptote à basse fréquence vaut $+20$ dB/décade, celle de l'asymptote à haute fréquence vaut -20 dB/décade.

4 Mise en cascade de filtres

Une fois qu'on a compris le fonctionnement d'un filtre, il est tentant d'essayer de les combiner pour former de nouveaux filtres.

La question qui se pose est la suivante : quand on met deux filtres **en cascade**, autrement dit à la suite l'un de l'autre, la fonction de transfert du filtre équivalent à l'association est-elle le produit des fonctions de transfert des deux filtres ?

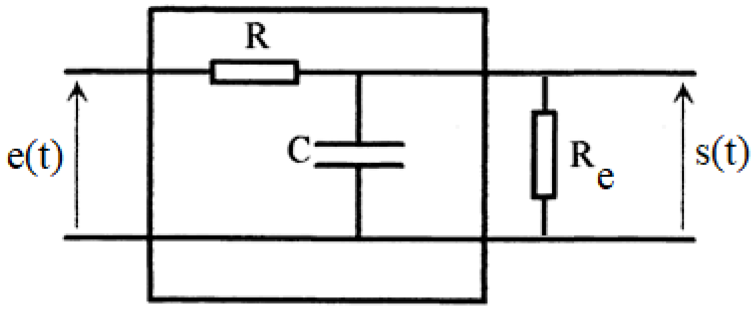
La réponse est non, en général, mais on peut s'en approcher en se plaçant des conditions particulières, que nous allons illustrer sur l'exemple du circuit RC.

Exercice d'application 8 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.

1. Établir que la fonction de transfert d'un circuit RC est $\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega}$.

L'objectif est d'apporter des modifications au filtre en ayant un impact négligeable sur sa fonction de transfert.

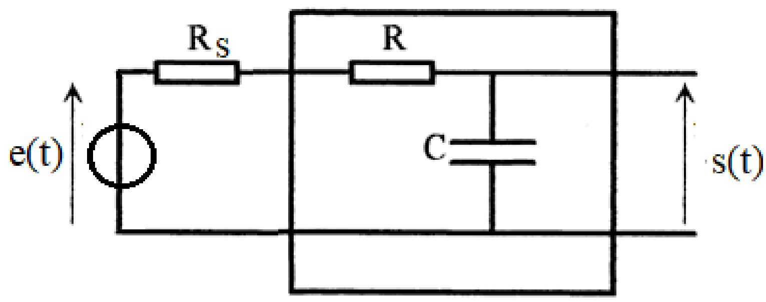
Supposons qu'on connecte une résistance R_e à la sortie du filtre, qui représente le circuit devant recevoir $s(t)$.



Filtre RC

2. Établir la nouvelle fonction de transfert, et en déduire une condition sur R_e pour que la fonction de transfert initiale soit modifiée de façon négligeable.

Supposons à présent qu'on connecte, à l'entrée du filtre, un générateur de tension réel de tension $e(t)$ et de résistance interne R_s.



Filtre RC

3. Établir la nouvelle fonction de transfert, et en déduire une condition sur R_s pour que la fonction de transfert initiale soit modifiée de façon négligeable.

On admettra que les résultats de cet exercice se généralisent à des filtres en cascade : pour associer deux filtres de sorte que la fonction de transfert globale soit pratiquement égale au produit des fonctions de transfert, il faut que le premier filtre ait une impédance de sortie faible et que le second ait une impédance d'entrée élevée.