TD18 : Filtrage linéaire des signaux périodiques

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

▹ *Identifier sur le spectre d'un signal périodique la composante continue, le fondamental et les harmoniques* : TLB1,2

▹ *Définir la valeur moyenne d'un signal et sa valeur efficace* : TLB2, ex1,3,5

▹ *Prévoir le comportement d'un filtre en hautes et basses fréquences* : TLB5, ex2,3,4,5,6,7

▹ *Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1* : ex1,5

▹ *Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique* : TLB3,4,5, ex1,2,5,7

▹ *Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode fournis d'après l'expression de la fonction de transfert* : TLB3,4, ex2,7

▹ *Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée* : ex3

▹ *Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.)* : ex8

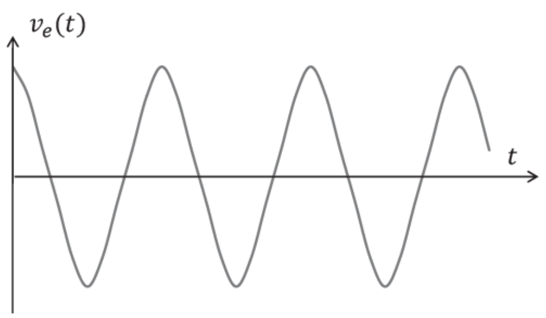
1 Questions de cours

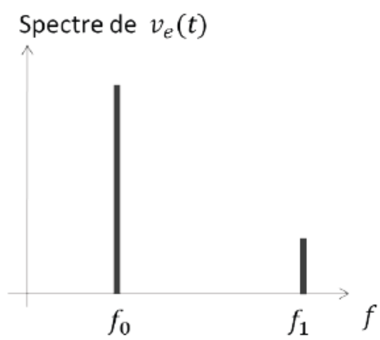
QC1 : Signal sinusoïdal : caractéristiques, valeur moyenne, valeur efficace.
QC2 : Filtre linéaire.
QC3 : Fonction de transfert harmonique. Diagrammes de Bode.
QC4 : Modèles de filtres : passe-bas ou haut d'ordre 1, passe-bas ou bande d'ordre 2.

2 Tester les bases

TLB1 : Qualité du signal fourni par un oscillateur (CCINP18)

On s'intéresse à la qualité du signal fourni par un oscillateur, qui oscille à la fréquence f_0. Sur la figure ci-dessous sont présentées l'allure temporelle de la tension v_e ainsi que sa décomposition spectrale.

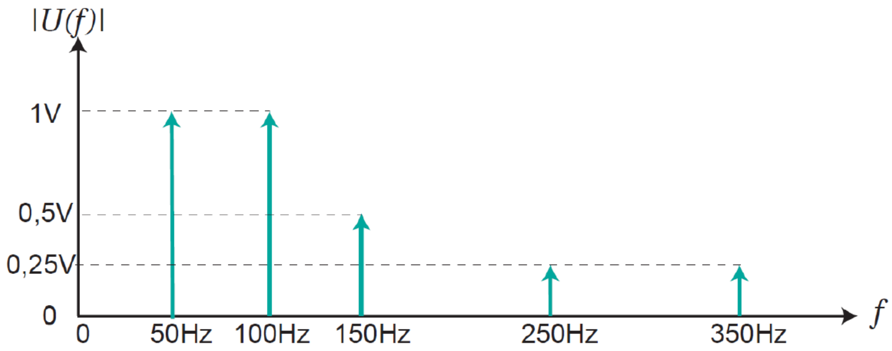




1. Peut-on considérer le signal fourni comme sinusoïdal ? Justifier.

2. On donne les fréquences $f_0 = 1$ kHz et $f_1 = 10$ kHz . Comment pourrait-on améliorer la qualité de la tension v_e ? Une approche pratique est attendue en précisant les valeurs caractéristiques du dispositif mis en oeuvre.

TLB2 : Analyse d'un spectre

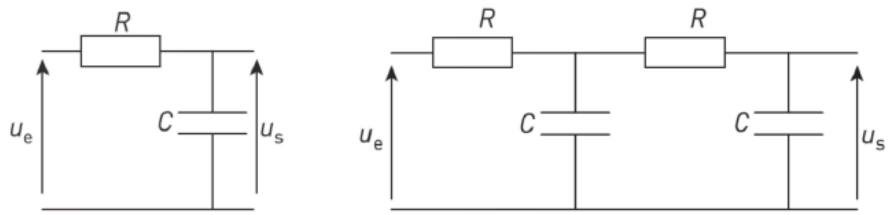


On donne ci-dessus le spectre d'un signal électrique $u(t)$.

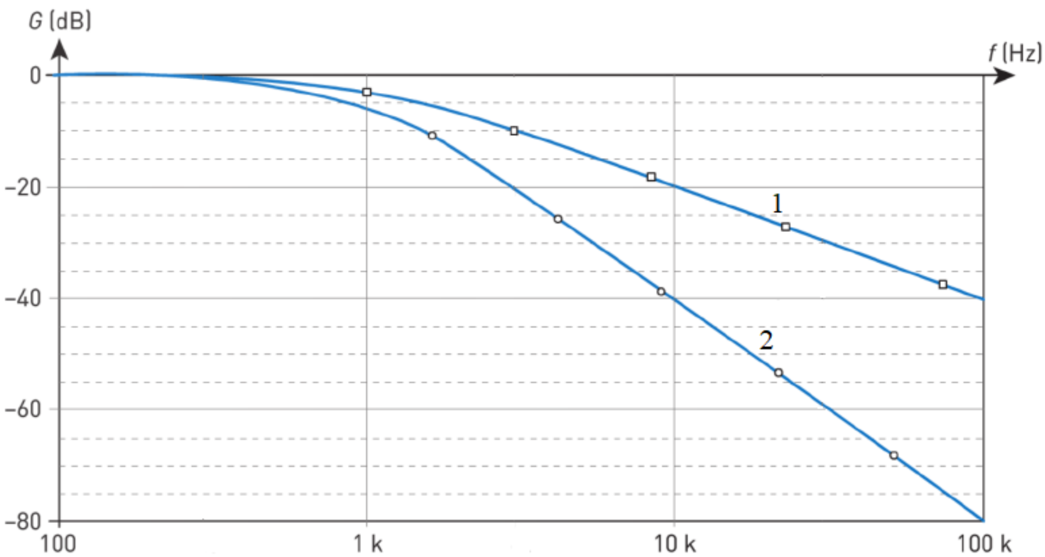
1. Déterminer la grandeur associée à ce signal.
2. Justifier que ce signal est périodique, mais qu'il n'est pas sinusoïdal.
3. Déterminer sa fréquence f, sa valeur moyenne $\langle u \rangle$ et sa valeur efficace $\mathrm{U_{eff}}$.

TLB3 : Cellules RC en cascade

On souhaite comparer le comportement d'un filtre à une cellule RC et d'un filtre à deux cellules RC.



Le diagramme de Bode en gain de chacun des deux filtres est donné ci-dessous :



1. Identifier la nature de ces deux filtres.

2. Identifier, en justifiant, quel filtre correspond respectivement au diagramme 1 et 2.
On applique en entrée de ces filtres une tension sinusoïdale d'équation $u_e(t) = 2\cos(2\pi 10^4 t)$.
3. Quel filtre vous semble le plus adapté pour atténuer le signal d'entrée ?
4. Déterminer l'amplitude de la tension en sortie pour chacun des deux filtres.

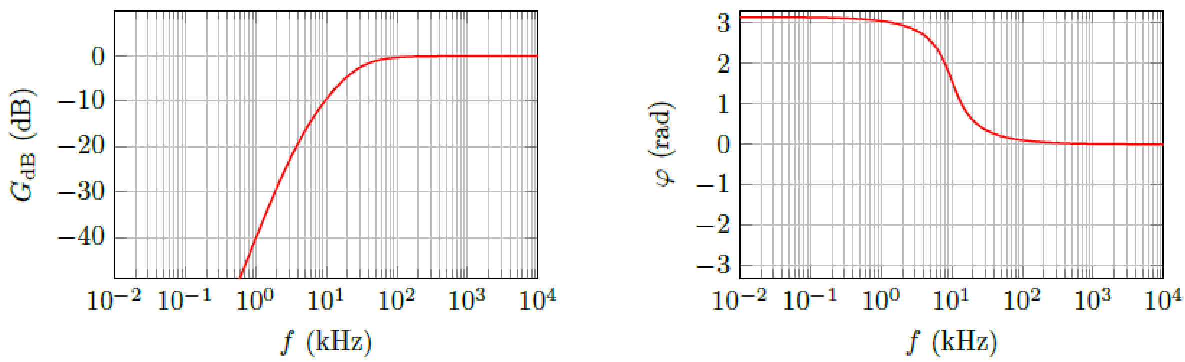
TLB4 : Analyse de diagrammes de Bode

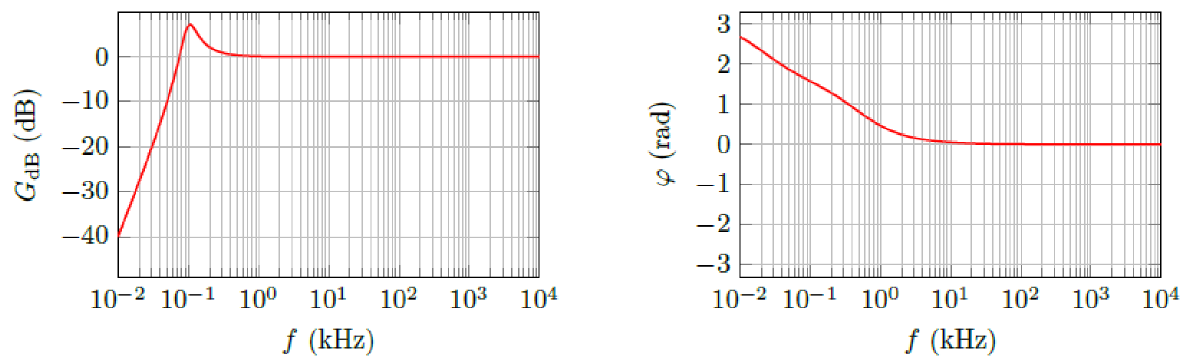
1. Pour les quatre diagramme de Bode ci-dessous, indiquer le type de filtre dont il s'agit, son ordre et sa fréquence caractéristique.

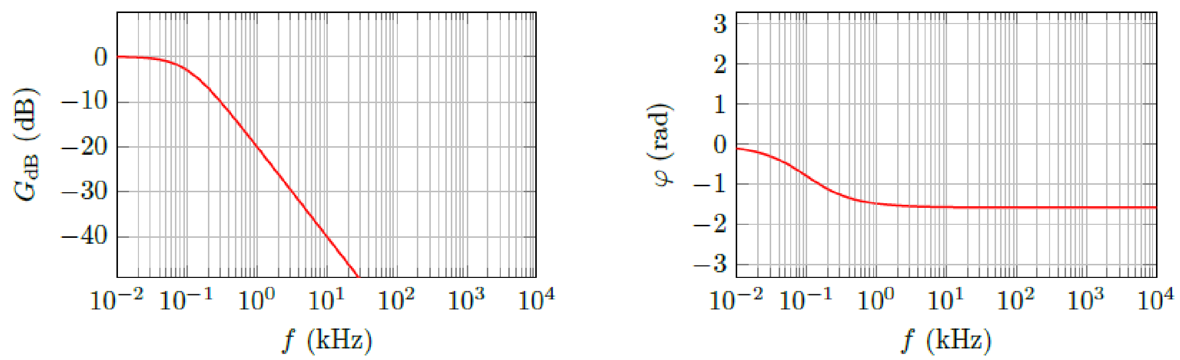
2. On envoie en entrée de chacun des filtres le signal

$$e(t) = \mathrm{E}_0\left(1 + \cos(\omega t) + \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

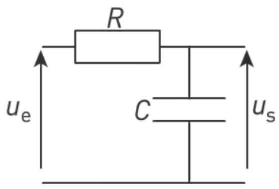
où la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ vaut 1 kHz. Déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$.

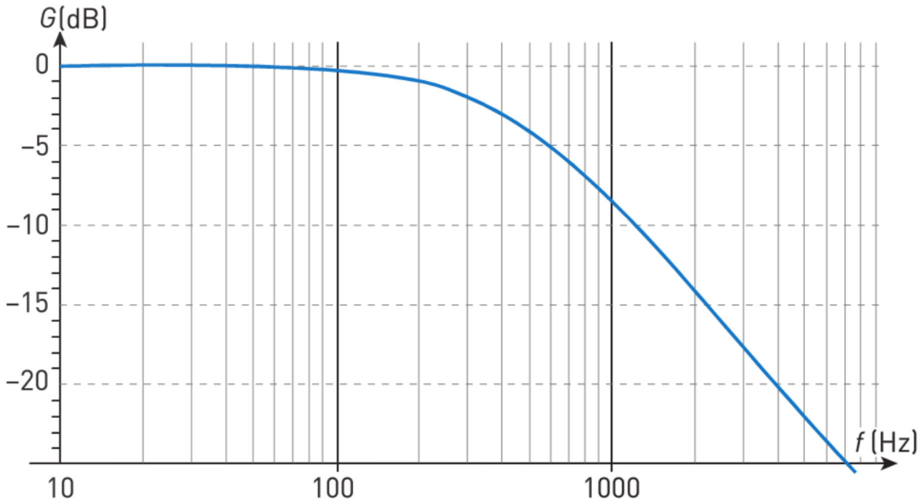






TLB5 : Filtre RC
Le diagramme de Bode en gain d'un circuit RC est donné ci-dessous :





1. Quelle est la nature de ce filtre ? Justifier de deux façons différentes.
2. Déterminer sa fréquence de coupure à -3 dB et sa bande passante.
3. Calculer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre et la mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

4. Calculer la valeur R de la résistance sachant que $C = 10$ nF.
5. A l'aide de la fonction de transfert, calculer le gain en décibel pour une fréquence $f = 600$ Hz. Comparer à la valeur obtenue sur le diagramme de Bode.

3 Exercices

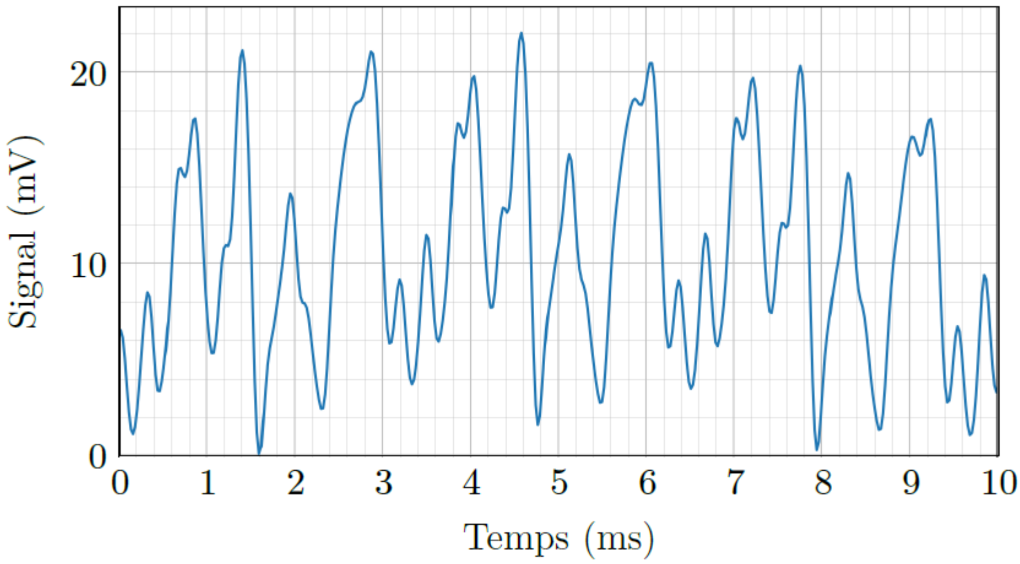
Exercice 1 : Signal de guitare (CCS19)

Une guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-dessous.

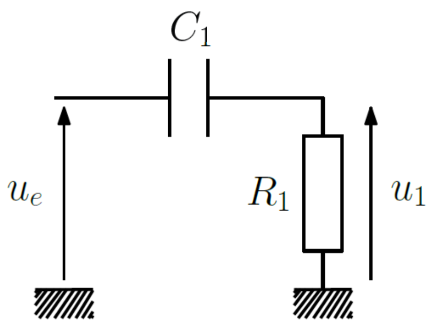
Corde	**Fréquence** (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

La figure ci-dessous montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.



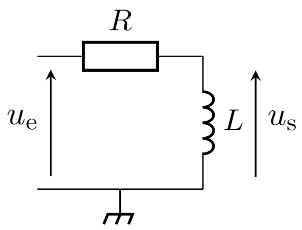
1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.



Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure ci-dessus.

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω du signal.
6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
8. On a choisi $R_1 = 100$ kΩ et $C_1 = 100$ nF. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal d'entrée, quel est le rôle de ce filtre ?

Exercice 2 : Filtre RL



Un expérimentateur fabrique un filtre RL, avec $R = 1,0\ \mathrm{k\Omega}$ et L inconnue.

1. Déterminer la nature du filtre d'après le comportement asymptotique des dipôles.

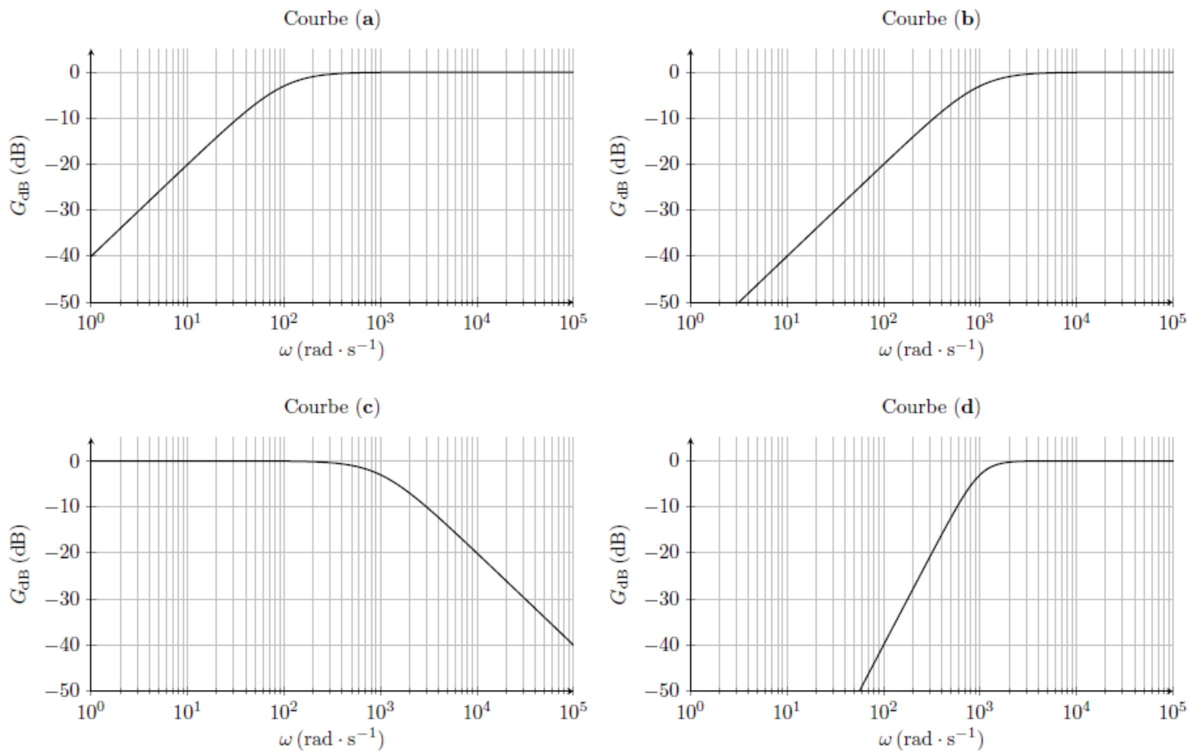
2. Établir la fonction de transfert. L'écrire sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Identifier H_0 et ω_0.

3. Donner la définition de la pulsation de coupure ω_c d'un filtre. Montrer que $\omega_c = \omega_0$.

4. Parmi les courbes de gain ci-dessous, lesquelles peuvent correspondre à ce filtre ?



5. En réalité, l'expérimentateur obtient la courbe (b). En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

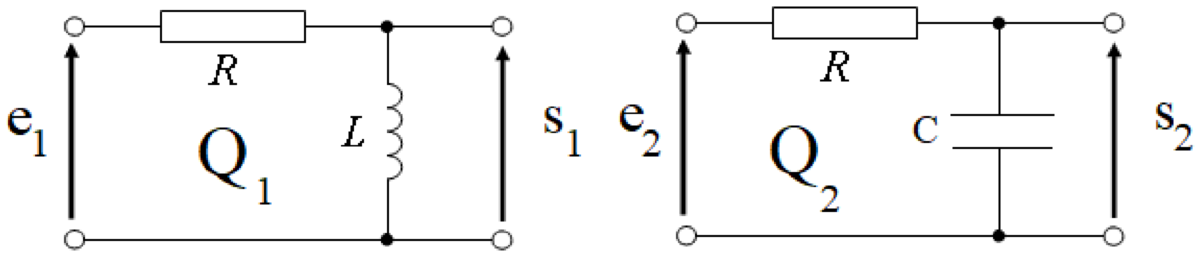
6. L'expérimentateur impose en entrée la tension $u_e(t) = E\cos(\omega_0 t + \pi/4)$. Déterminer complètement la tension de sortie (amplitude et phase à l'origine des temps).

7. Même chose pour $u_e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \pi/4) + E_2 \cos(\omega_2 t + \pi/4)$, avec $\omega_1 = \frac{\omega_0}{10}$ et $\omega_2 = 10\omega_0$.

8. Quelle serait l'allure du signal de sortie si l'expérimentateur imposait en entrée une tension triangulaire de pulsation $\omega \ll \omega_0 = 1,0 \times 10^3\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$?

Exercice 3 : Mise en cascade de filtres

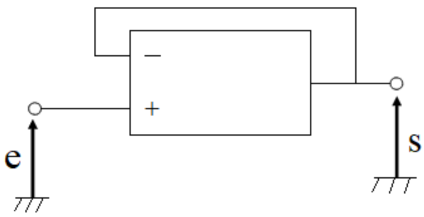
Deux quadripôles Q_1 et Q_2 constituent des filtres du premier ordre, de fonctions de transfert respectives $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$, écrites lorsque ces filtres sont utilisés séparément.



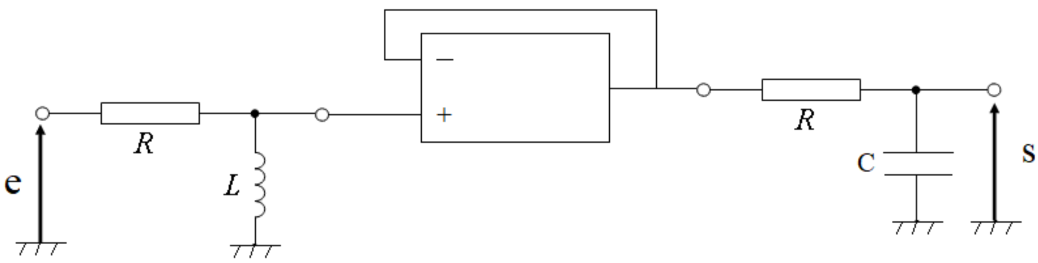
1. Prévoir le comportement de ces filtres à basse et à haute fréquence et en déduire leur nature.
2. Déterminer les fonctions de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$, les écrire sous forme canonique et tracer les diagrammes de Bode de ces filtres.

3. On envisage de mettre en cascade ces deux filtres, c'est-à-dire de brancher la sortie de Q_1 sur l'entrée de Q_2. La fonction de transfert $\underline{H}$ de l'association est-elle le produit de $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$? À quelle(s) condition(s) peut-on s'en approcher ?

On utilise le circuit ci-dessous, appelé **montage suiveur**, constitué d'un **amplificateur linéaire intégré** que l'on suppose idéal (intensités nulles aux entrées + et −), et en régime linéaire ($v_+ = v_-$) dans ce qui suit.



4. Quelle relation peut-on écrire entre les tensions d'entrée et de sortie de ce montage suiveur ?
5. On réalise la mise en cascade du filtre 1, du montage suiveur et du filtre 2.



Quelle relation peut être écrite entre le signal de sortie du premier filtre et le signal $s(t)$? En déduire l'expression de la fonction de transfert de l'opérateur complet. Commenter.

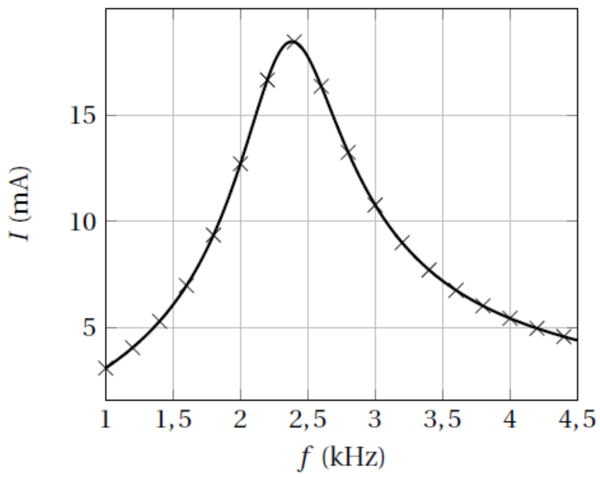
Exercice 4 : Détermination expérimentale des paramètres d'un circuit RLC

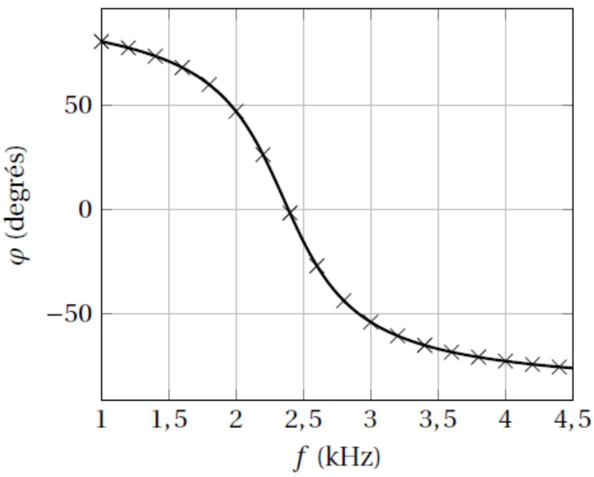
Un circuit RLC série est alimenté par une source de tension $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$.

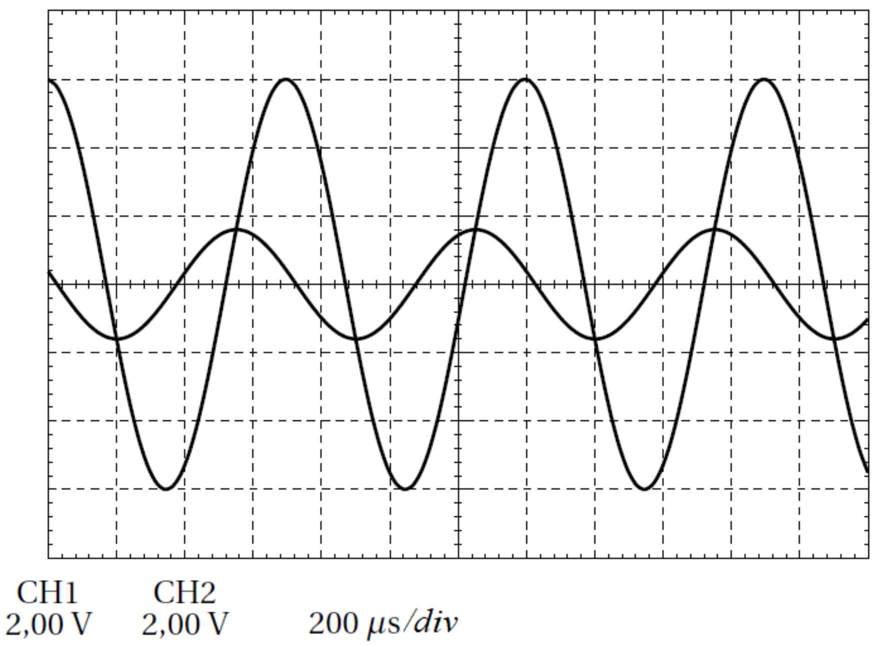
On note I la mesure de l'intensité (valeur efficace) affichée sur un ampèremètre lorsque la fréquence f du générateur varie.

Un oscilloscope bicourbe donne accès au déphasage ϕ entre l'intensité $i(t)$ et la tension $e(t)$ (voir ci-dessous pour une représentation graphique).

Enfin, la dernière figure reproduit l'écran d'un oscilloscope en mode bicourbe, représentant $e(t)$ et la tension aux bornes de R, notée $u_R(t)$.







1. Rappeler l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}_R$ d'un résistor de résistance R, $\underline{Z}_L$ d'une bobine d'inductance L, et $\underline{Z}_C$ d'un condensateur de capacité C. En déduire l'impédance complexe $\underline{Z}_{RLC}$ de l'ensemble RLC série.

2. On pose en notation complexe $\underline{i}(t) = \underline{i}_0 \exp(j\omega t)$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{i}_0$ de l'intensité en fonction de I et de ϕ.

3. On écrit $\underline{i}_0 = \underline{H}\frac{e_0}{R}$. Que représente la grandeur $\underline{H}$?

4. Écrire $\underline{H}$ sous la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

et déterminer Q et ω_0 en fonction de R, L et C.

5. De quel type de filtre s'agit-il ? Quel est son ordre ?

6. Exprimer les pulsations de coupure théoriques ainsi que la bande passante en fonction de ω_0 et Q.

7. Faire un schéma du montage réalisé pour obtenir l'oscillogramme de la dernière figure. Identifier sur cette figure $u(t)$ et $e(t)$. Retrouver un des points des courbes de gain et de phase.

8. Déterminer la valeur numérique de ω_0 à partir des données expérimentales.

9. Comment obtenir le plus simplement R ? Faire l'application numérique.

10. Évaluer les pulsations de coupure et la bande passante expérimentales. En déduire une estimation du facteur de qualité Q, puis de L et C.

Exercice 5 : Modélisation d'un pH-mètre (CCS21)

On se propose de modéliser un pH-mètre comme une association en série d'un générateur de tension idéale de force électromotrice E fonction du pH avec une résistance électrique r (figure 1).

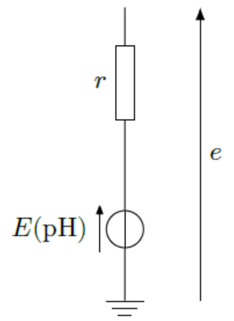


FIGURE 1 – Modélisation d'un pH-mètre

1. On souhaite mesurer la tension e à l'aide d'un voltmètre de résistance interne $R_V = 1{,}0\ \mathrm{M\Omega}$. Exprimer la tension mesurée e en fonction de E, r et R_V. Calculer la valeur de e en prenant $r = 10\ \mathrm{M\Omega}$ et $E = 0{,}20$ mV.

2. Quelle valeur minimale de résistance interne du voltmètre R'_V aurait-il fallu avoir pour commettre une erreur inférieure à 10% sur la mesure de E ?

Pour s'affranchir des problèmes de mesures liés à la résistance interne r du pH-mètre, on utilise le montage de la figure 2 (montage suiveur) dans lequel l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal ($i_+ = i_- = 0$) et fonctionne en régime linéaire ($\epsilon = 0$).

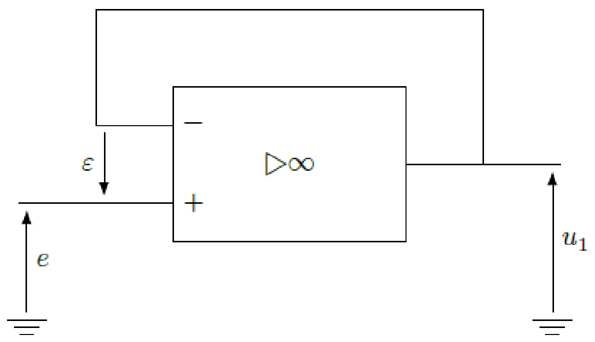


FIGURE 2 – Schéma du montage suiveur

3. Justifier que $u_1 = e$.

Une agitation mécanique lente du milieu dans lequel plonge la sonde du pH-mètre provoque une perturbation électromagnétique du signal E. À un pH donné, l'évolution de E en fonction du temps t est représentée figure 3.

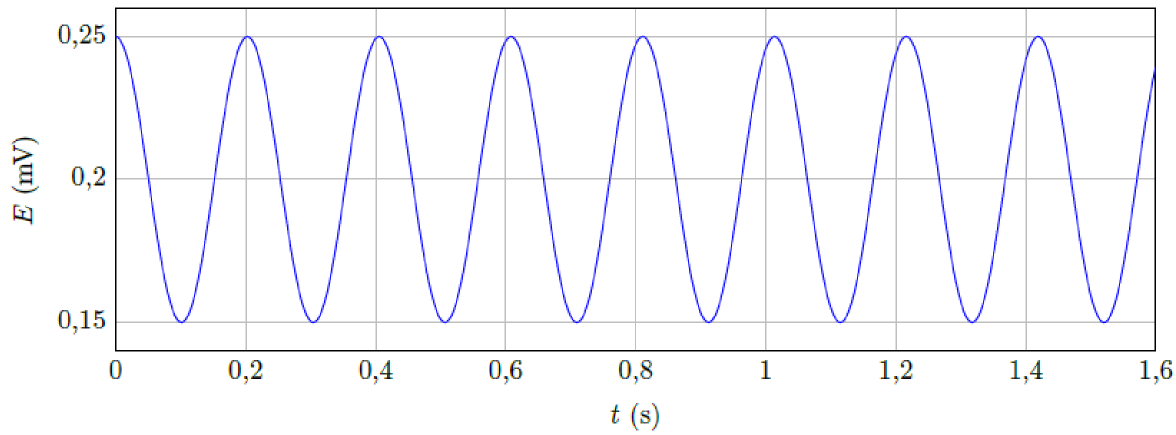


FIGURE 3 – Représentation graphique du signal $\mathrm{E} = f(t)$

4. Représenter la décomposition spectrale du signal de la figure 3.

On envoie le signal $u_1(t)$ en entrée du filtre représenté figure 4.

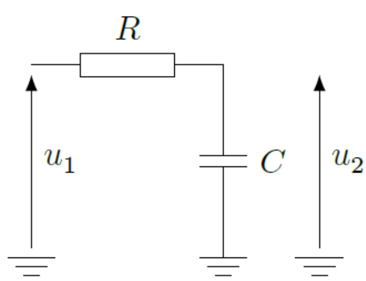


FIGURE 4 – Filtre utilisé pour filtrer le signal $u_1(t)$

L'étude sera menée en régime sinusoïdal, ω désigne la pulsation du signal, ω_0 la pulsation propre et $x = \omega/\omega_0$ désigne la pulsation réduite.

5. Effectuer une analyse qualitative du filtre à basse et haute fréquence. En déduire la nature du filtre. Justifier son intérêt dans le cas présent.

6. Exprimer la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

en identifiant les expressions de H_0 et ω_0.

7. Exprimer le gain du filtre $G(x)$ et la phase $\phi(x) = \arg(\underline{H})$.

8. Déterminer la pulsation réduite de coupure x_c à -3 dB.

9. Exprimer le gain en décibels $G_{dB}(x)$ puis déterminer les équivalents à basse et haute fréquence.

10. Construire le diagramme de Bode, réponses en gain G_{dB} = f(log(x)) et en phase ϕ = f(log(x)).

On considère le signal d'entrée de la forme

$$u_1(t) = E + \frac{E}{4}\cos(10\omega_0 t).$$

On cherche le signal de sortie $u_2(t)$ sous la forme :

$$u_2(t) = A_1 + A_2\cos(\omega_2 t + \psi_2).$$

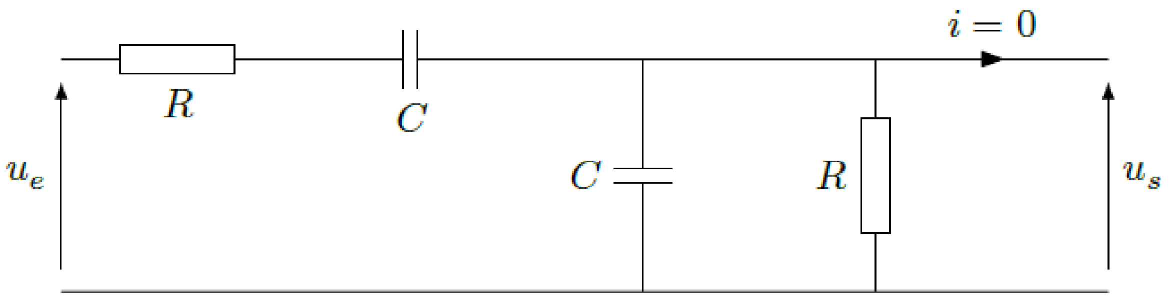
11. Exprimer les constantes A_1, A_2, ω_2 et ψ_2. Commenter l'effet de l'action du filtre sur le signal $u_1(t)$.

Exercice 6 : Filtre de Wien (CCS20)

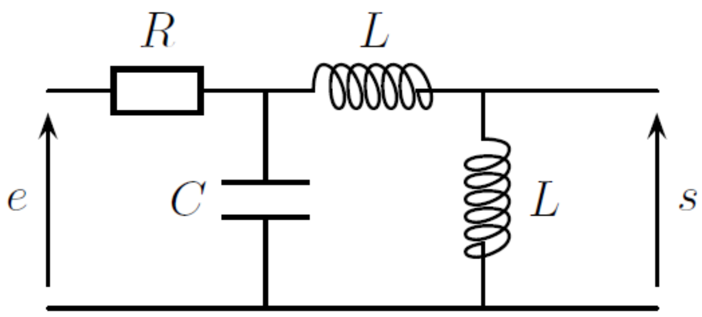
On étudie un **filtre de Wien**, constitué de deux condensateurs identiques de capacité C et de deux conducteurs ohmiques identiques de résistance R.

Le circuit correspondant est représenté ci-dessous.

1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{u}_s/\underline{u}_e$ de ce filtre.
2. Représenter l'allure du gain $|\underline{H}(j\omega)|$ de ce filtre en fonction de ω.
3. Donner l'expression de la pulsation de résonance en fonction de R et de C. Que vaut $|\underline{H}(j\omega)|$ à la résonance ?



Exercice 7 : Filtre de Hartley



On étudie le filtre de Hartley en sortie ouverte schématisé ci-dessus.

L'inductance des bobines est $\mathrm{L} = 1,0$ mH, la capacité du condensateur vaut $\mathrm{C} = 0,10$ μF, la résistance vaut $\mathrm{R} = 10$ kΩ. La fonction de transfert s'écrit

$$\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\omega}{1 + 2j\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\omega + 2\mathrm{LC}(j\omega)^2}.$$

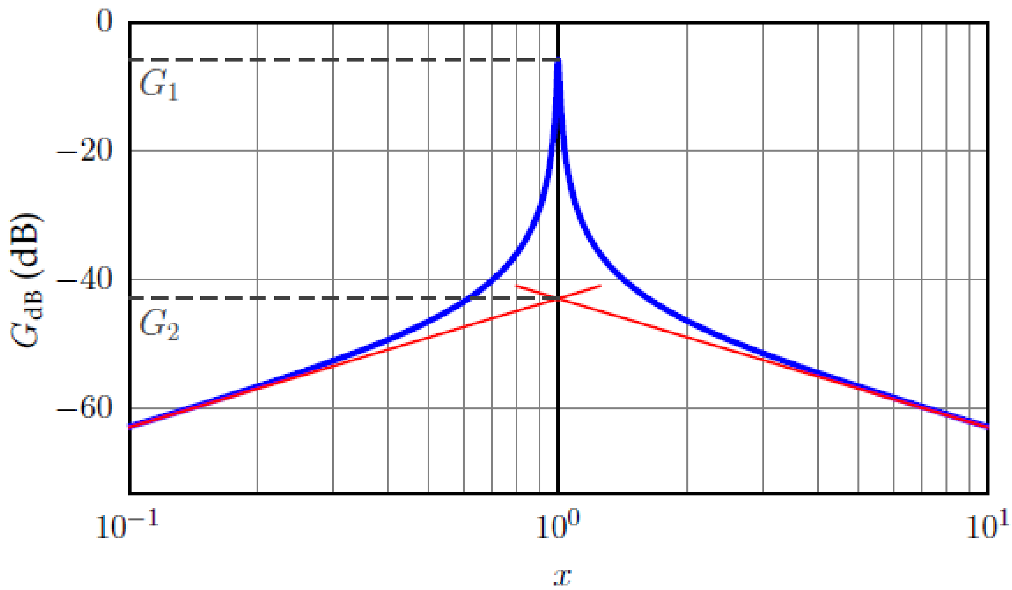
1. Rappeler l'impédance complexe associée à une résistance, à un condensateur et à une bobine idéale. Représenter le schéma équivalent du filtre à basse et haute fréquence et en déduire la nature probable de ce dernier sans aucun calcul ni référence à la fonction de transfert.

2. On donne la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\underline{\mathrm{H}}(jx) = \mathrm{H}_0 \frac{j\frac{x}{\mathrm{Q}}}{1 - x^2 + j\frac{x}{\mathrm{Q}}},$$

où on a noté $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q et le gain H_0 en fonction de R, L et C, puis calculer leurs valeurs numériques.

3. Le diagramme de Bode en gain est représenté ci-dessous.



Mesurer les pentes des asymptotes sur le diagramme ; les comparer avec celles calculées à partir de la fonction de transfert.

4. Déterminer et tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase, dans les limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$. Calculer et représenter la valeur de la phase en $x = 1$.

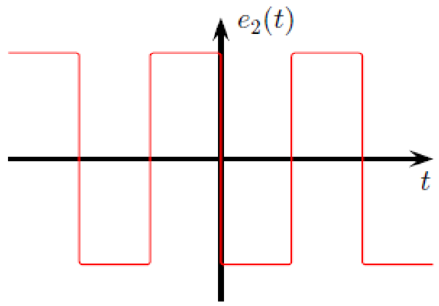
5. Déterminer les expressions de G_1 et G_2 définis sur le diagramme de Bode à partir de la fonction de transfert, en fonction de H_0, Q et ω_0. Faire l'application numérique et vérifier la cohérence avec le graphe.

6. Ce filtre peut-il servir d'intégrateur ? De dérivateur ? Si oui, pour quelle bande de fréquence ? Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage pour réaliser ces fonctions ?

7. On étudie le signal de sortie $s_1(t)$ lorsque l'on applique en entrée du filtre le signal $e_1(t) = E_0 + E_{1m}\cos(\omega_1 t)$, avec $\omega_1 = \omega_0$. Déterminer l'expression du signal de sortie $s_1(t)$ correspondant.

On applique à présent un signal créneau $e_2(t)$ de pulsation $\omega_2 = \frac{\omega_0}{3}$ et d'amplitude $E_{2m} = 1\mathrm{V}$, dont le chronogramme est représenté sur la figure ci-dessous. Ce signal est décomposable en série de Fourier et s'exprime alors

$$e_2(t) = \frac{4}{\pi}E_{2m}\left[\sin(\omega_2 t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega_2 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_2 t) - \frac{1}{7}\sin(7\omega_2 t) + \ldots\right].$$



8. Rappeler la définition de la valeur efficace d'un signal. La calculer pour $e_2(t)$. Déterminer également sa valeur moyenne.

9. Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $e_2(t)$. Préciser les valeurs numériques des pulsations des trois premiers pics d'amplitude non nulle.

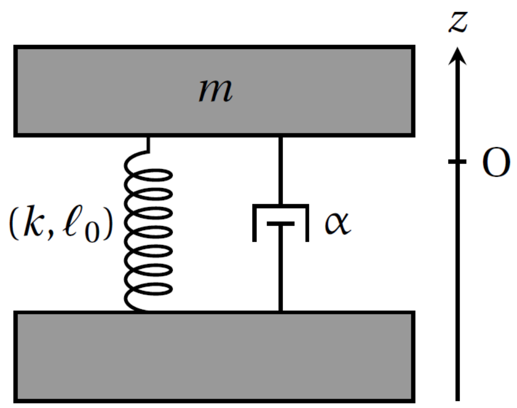
10. En utilisant le diagramme de Bode en gain, calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie $s_2(t)$. En déduire l'expression approchée du signal de sortie $s_2(t)$. Peut-on qualifier ce montage de "tripleur de fréquence" ?

Exercice 8 : Vibrations d'un moteur

Lorsqu'un moteur de type compresseur fonctionne, il est nécessaire de prévoir un système de suspension pour amoindrir les vibrations du châssis.

Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du moteur et α une constante positive.

On s'intéresse au mouvement vertical du moteur dans un référentiel galiléen, repéré par un axe (Oz) ascendant.



1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile. Déterminer la longueur l_{eq} du ressort.

La position du moteur dans ce cas est prise comme origine de l'axe (Oz). Lorsque le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z, lorsque le moteur fonctionne.

3. En régime forcé, on recherche des solutions de la forme $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$. On note $v(t) = \text{Re}(\underline{V} e^{j\omega t})$ avec $\underline{V} = V_0 e^{j\phi}$. Exprimer $\underline{V}$ sous la forme :

$$\underline{V} = \frac{V_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Donner l'expression de V_m, Q et ω_0 en fonction de F_0, m, α et k.

4. Déterminer la nature du filtrage effectué par ce dispositif.

5. Exprimer $V_0(\omega)$ puis tracer son allure.

6. La pulsation ω vaut 628 rad·s^{-1}. Le moteur a une masse $m = 10$ kg et on dispose de deux ressorts de raideurs $k_1 = 4 \times 10^6$ N·m^{-1} et $k_2 = 10^6$ N·m^{-1}. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

4 Résolution de problèmes :

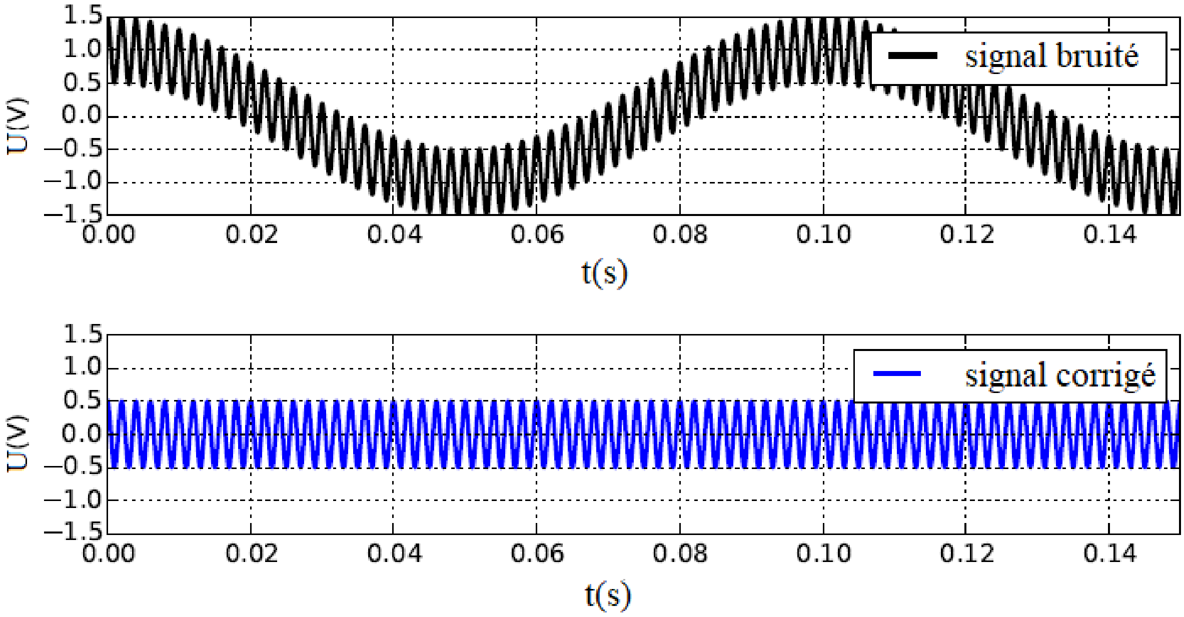
RP1 : Modélisation d'un récepteur radio

Un récepteur radio doit capter les signaux sur une gamme de fréquence allant de 150 à 300 kHz. Il peut être modélisé par un circuit RLC série avec $R = 2$ kΩ et $L = 1$ mH.

Déterminer le dipôle aux bornes duquel la tension de sortie doit être mesurée et les valeurs de C répondant aux attentes.

RP2 : atténuation d'un signal parasite

Un signal haute fréquence est parasité par un signal basse fréquence. Le signal parasité et le signal corrigé sont représentés sur la figure fournie ci-dessous.



Proposer un filtre simple permettant de passer, au moins de manière approchée, du signal bruité au signal corrigé. On attend un raisonnement, un schéma du montage, et des valeurs numériques réalistes et adaptées.