TP21 : Non isochronisme du pendule simple aux grands angles

CAPACITÉS EXPÉRIMENTALES TRAVAILLÉES :

▹ *Évaluer par comparaison à un étalon, une longueur sur une image numérique.*

▹ *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement.*

CAPACITÉS NUMÉRIQUES TRAVAILLÉES :

▹ *À l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement l'équation différentielle du deuxième ordre non linéaire qui décrit le mouvement d'un pendule simple et mettre en évidence le non-isochronisme des oscillations.*

▹ *Utiliser la fonction odeint de la bibliothèque scipy.integrate.*

MATÉRIEL :

Masselottes marquées, potence munie d'un rapporteur pour pendule simple, fil, chronomètre, mètre-ruban.

En physique théorique, on décrit les phénomènes naturels à l'aide de **théories** et de **modèles**, qui reposent largement sur l'outil mathématique.

En physique expérimentale, on mesure des grandeurs en appliquant des protocoles qui visent souvent à comparer les prédictions de la théorie et les observations.

Toute la difficulté est la suivante : pour résoudre un modèle de façon exacte, celui-ci doit être suffisamment simple, ce qui implique de faire des concessions : négliger les frottements, travailler dans un domaine de paramètres restreint, etc. On risque alors de ne pas observer un bon accord avec l'expérience si celle-ci est suffisamment précise, non pas en raison des failles de la théorie, mais de celles du modèle.

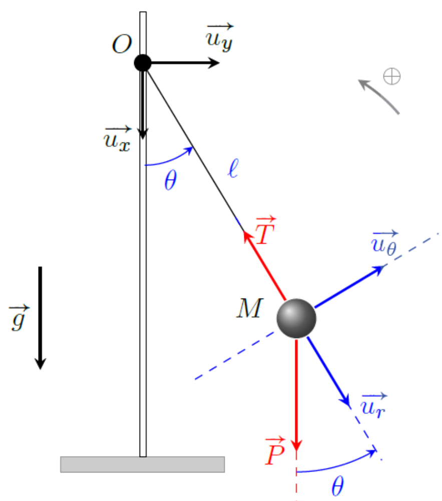
L'outil informatique permet aujourd'hui d'explorer certains modèles de la physique théorique dans des domaines où leur résolution analytique est hors de portée.

PROBLÉMATIQUE :

En quoi l'outil informatique permet-il une analyse plus approfondie des oscillations du pendule simple ?

1 Approche théorique

On considère le **pendule simple** représenté schématiquement ci-dessous :



Le mouvement de la masse accrochée à l'extrémité du fil est paramétré par l'angle θ, qui est une fonction du temps.

Dans l'analyse, on tiendra compte dans un premier temps d'une force de frottement fluide linéaire en la vitesse, de la forme $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

Q1. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0.$$

Cette équation, que nous noterons (TD), est trop difficile à résoudre. Nous allons à présent simplifier le problème à l'extrême.

Q2. Rappeler les deux hypothèses sous lesquelles l'équation différentielle (TD) se simplifie pour devenir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0.$$

Nous noterons (F) cette équation différentielle associée à un oscillateur harmonique. La résoudre et en déduire que la période propre vérifie alors

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

Q3. Écrire les deux équations différentielles que l'on peut obtenir à partir de (TD) en ne conservant à chaque fois qu'une seule des deux hypothèses simplificatrices. Indiquer laquelle des deux peut être résolue de façon exacte (nous la noterons (N)). Expliquer quelle propriété de l'autre équation différentielle (que nous noterons (D)) la rend a priori difficile à résoudre.

2 Approche expérimentale

Le but de cette partie est de vérifier si l'équation différentielle (F) est suffisante pour décrire correctement les oscillations du pendule, ou s'il est nécessaire de se ramener à un niveau de détail plus élevé en résolvant (N) ou (D).

2.1 Rôle des frottements

Dans un premier temps, nous souhaitons évaluer le rôle des frottements, qui seraient pris en compte en résolvant l'équation (N).

Q4. Rappeler la condition portant sur l'angle initial θ_0 quand on lâche le pendule pour s'assurer que l'équation différentielle (N) suffise à décrire l'expérience, sans avoir à résoudre (TD). Expliquer ensuite à quelle condition sur le facteur de qualité Q l'équation (F) deviendrait valide.

Q5. Proposer un mode opératoire pour évaluer expérimentalement le facteur de qualité Q du pendule. Après validation par l'enseignant, mettre en œuvre ce protocole.

Q6. Proposer un mode opératoire pour tester expérimentalement l'équation (1) avec le plus haut degré de précision permis par le matériel disponible. Après validation par l'enseignant, mettre en œuvre ce protocole.

Q7. Au vu des réponses aux questions **Q5** et **Q6**, peut-on considérer que l'équation (F) traduit bien la réalité dans les conditions de l'expérience ?

2.2 Non-isochronisme des oscillations aux grands angles

L'équation (1), issue de la résolution de (F), précise que la période des oscillations du pendule ne dépend pas de l'angle initial θ_0 sous lequel le pendule a été lâché. Cette propriété est connue sous le nom d'**isochronisme des oscillations** du pendule. Il a été testé lors de la séance précédente dans des conditions expérimentales qui permettent a priori de transformer (TD) en (F).

La question qui se pose est la suivante : le pendule vérifie-t-il la condition d'isochronisme des oscillations également aux grands angles ?

Dans ce qui suit, nous supposerons que les frottements fluides ont une influence négligeable, autrement dit que les équations (D) ou (F) sont candidates pour décrire correctement la réalité expérimentale.

Q8. Proposer un protocole simple pour tester l'hypothèse de l'isochronisme des oscillations aux grands angles. Le mettre en œuvre après l'avoir fait valider par l'enseignant, puis conclure quant à la nécessité de résoudre (D) pour être en accord avec l'expérience.

3 Approche numérique

Le but de cette partie est de résoudre l'équation (D) grâce à un programme Python, fourni en annexe et téléchargeable sur Cahier de Prépa.

L'équation différentielle (D) est non linéaire, à cause de la présence de la fonction sinus appliquée à la variable θ. Lorsqu'on souhaite la résoudre numériquement avec Python, l'utilisation de la fonction odeint de la bibliothèque scipy.integrate implique de transformer au préalable cette équation différentielle du deuxième ordre en un système de deux équations différentielles du premier ordre couplées, où les deux variables dépendant du temps sont les fonctions $\dot{\theta}$ et θ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

et

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\theta).$$

Les deux membres de droite de ce couple d'équations différentielles peuvent être réunis dans une liste :

$$[\dot{\theta}, -\omega_0^2 \sin(\theta)].$$

Le système d'équations différentielles se résout sur un intervalle de temps Δt pour des conditions initiales $[\theta_0, \dot{\theta}_0]$ données (angle initial et vitesse angulaire initiale).

Q9. Grâce au programme Python fourni en annexe, tester l'évolution de la période des oscillations avec l'angle initial θ_0. Vérifier l'accord qualitatif avec l'expérience et conclure.

4 Annexe - Enregistrement d'une vidéo et exploitation sur Regressi

Pour filmer un mouvement avec la webcam mise à disposition :

- Ajouter une règle étalon sur le support de la potence.
- Mettre en place la webcam sur un support, en face du dispositif expérimental.
- Créer un dossier sur le bureau de votre session sur l'ordinateur pour y enregistrer les fichiers utiles.
- L'enregistrement de la vidéo est réalisé avec le logiciel Bandicam.
- Appuyer sur l'onglet HDMI, cela sélectionne le mode vidéo. Accepter les réglages dans la fenêtre bleue qui est apparue.
- Dans l'onglet Video à gauche, cliquer sur Réglages en bas à droite, et choisir le codec MPEG-1. Dans l'écran enregistrement : Mode -> Général : Dossier de sortie à sélectionner.
- Pour déclencher l'enregistrement, appuyer sur la touche rouge Rec.
- Enregistrer la vidéo quand elle est réussie.

Pour exploiter la vidéo :

- Ouvrir le logiciel Avimeca3.
- Dans l'onglet fichier, choisir ouvrir un clip vidéo, puis sélectionner votre fichier vidéo.
- Dans la barre de tâches, cliquer sur le bouton en forme de cible. On peut alors choisir une forme de cible permettant le pointage.
- À droite de l'écran, les données apparaissent dans un tableur. Au-dessus de ce tableur se situent trois onglets. L'un d'eux sert à fixer un repère. Il est appelé étalonnage. Choisir une origine, l'orientation des axes et la taille de l'étalon.
- Cliquer sur le centre de masse de la bille. À chaque clic, le logiciel change d'image. Faire ce pointage avec patience et attention.
- Une fois le pointage terminé, enregistrer le fichier : Fichier -> Mesures -> Enregistrement dans un fichier -> Format Regressi Windows (*rw3)
- Dans Regressi, cliquer sur l'icône graphique, choisir l'abscisse et l'ordonnée.
- Pour modéliser les données : Graphe -> Modélisation graphique -> Choisir modèle -> Ajuster.
- Dans Regressi, la fonction arctangente s'écrit ATAN

5 Annexe - Programme Python pour résoudre numériquement l'équation différentielle (N2)

Ce programme peut être téléchargé sur Cahier de Prépa

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques
from scipy.integrate import odeint # pour obtenir un module contenant différentes méthodes d'intégration
from math import sin, cos, pi

##### Constantes et conditions expérimentales #####
```

L = ... # longueur du fil, en m

g = ... # accélération de la pesanteur, en m/s^2

theta0 = ... # angle initial, en rad

thetap0 = ... # vitesse angulaire initiale (theta point zéro), en rad $\cdot$ s^{-1}

t0 = ... # début de la simulation, en s

w0 = np.sqrt(..........) # pulsation des petites oscillations

T0 = ...*np.sqrt(..........) # période des petites oscillations

tf = ... # durée de la simulation, en s (choix de tf pour représenter 3 périodes pour les petites oscillations)

N = ... # nombre de points de discrétisation pour le tracé

h = (tf-t0)/(N-1) # pas de calcul (durée qui sépare deux points consécutifs sur le graphique)

t = np.linspace(t0,tf,N) # liste des instants (N+1 instants) répartis régulièrement entre t0 et tf

Résolution de l'équation différentielle

def Eq1 (theta_thetap, t) : # L'équation différentielle (Eq1) sous forme d'une équation vectorielle

theta, thetap = theta_thetap

return [thetap, - w0*w0*sin(theta)]

CI = (theta0, thetap0) # conditions initiales

solution = odeint(Eq1 , CI, t) # résolution de l'équation différentielle (Eq1) en tenant compte des conditions initiales

theta, thetap = solution.T # Les valeurs de theta et thetap peuvent être récupérées

Graphiques

plt.figure()

for theta0 in np.linspace(.......... , ... , ...) :

CI = (theta0, thetap0)

solution = odeint(Eq1, CI, t)

theta, thetap = solution.T

plt.plot(t, theta, label='theta0='+str(theta0)+' rad')

plt.title(r'Évolution temporelle de θ pour différentes conditions initiales') # titre du graphique

plt.xlabel(r't (s)')

plt.ylabel(r'θ (rad)')

plt.legend(loc='lower right') # affichage de la légende en bas à droite

plt.grid() # affichage d'une grille

plt.show()