AP8 : Analyse dimensionnelle

Le but de cette séance est d'apprendre à utiliser un outil très utile en physique : l'**analyse dimensionnelle**. En particulier, nous apprendrons à écrire correctement les calculs qui en découlent.

1 Dimension d'une grandeur

On appelle **grandeur** toute propriété de la science ou de la nature que l'on peut mesurer (avec un instrument de mesure), ou calculer à partir d'autres grandeurs préalablement mesurées ou calculées.

La **valeur** d'une grandeur dépend de l'**unité** de mesure choisie. Par exemple, une distance est une grandeur qui peut s'exprimer en mètre. Sa valeur est différente si on décide de l'exprimer en centimètre, ou en pied par exemple.

La **dimension** d'une grandeur physique représente sa nature qualitative. Il existe sept dimensions et unités associées indépendantes dans le système international ("SI" en abrégé), à partir desquelles on peut exprimer toutes les autres.

Grandeur	Symbole de la grandeur	Symbole de la dimension	Unité SI	Symbole associé à l'unité
Masse	m	M	**kilogramme**	kg
Temps	t	T	**seconde**	s
Longueur	l, x, r...	L	**mètre**	m
Température	T	Θ	**kelvin**	K
Intensité électrique	I, i	I	**ampère**	A
Quantité de matière	n	N	**mole**	mol
Intensité lumineuse	I	J	**candela**	cd

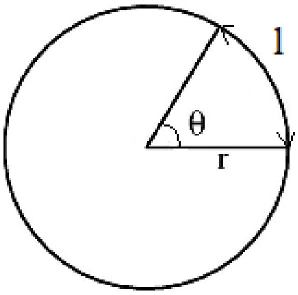
Une grandeur purement numérique est dite sans dimension, ou **adimensionnée**.

Par exemple, un angle est considéré comme une grandeur adimensionnée, bien qu'il possède une unité : le radian (rad), le degré (°) ou le tour (tr) par exemple.

Pour rappel, un angle θ exprimé en radians est défini par la relation

$$\theta = \frac{l}{r},$$

où r est le rayon du cercle et l la longueur de la corde délimitée par l'angle.



Il y a proportionnalité entre la valeur d'un angle en radian et la valeur du même angle en degré :

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180}\theta(°).$$

Pour retrouver facilement cette relation, on considère le cas où l'angle vaut 360°. La corde a alors pour valeur $2\pi r$ (périmètre d'un cercle de rayon r), donc l'angle en radians vaut 2π.

2 Principe de l'analyse dimensionnelle

Deux grandeurs sont dites **homogènes** si elles satisfont aux deux conditions suivantes :
▹ elles ont la même dimension ;
▹ elles correspondent à un même type d'objet mathématique : scalaire (nombre), vecteur, matrice (tableau de nombres) ou torseur par exemple.

L'**analyse dimensionnelle** repose sur le fait qu'une loi de la physique est vraie seulement si son membre de gauche et son membre de droite sont homogènes : c'est une condition nécessaire (mais pas suffisante).

Ainsi, l'analyse dimensionnelle permet de :
▹ vérifier la plausibilité d'une formule ;
▹ trouver l'unité d'une grandeur exprimée par une loi de la physique ;
▹ plus rarement, de deviner sans l'appui d'une théorie une loi de la physique qu'il aurait été long ou difficile de dériver rigoureusement. Pour y parvenir, il est utile de s'appuyer sur son sens physique pour deviner quelles grandeurs interviennent et si elles se trouvent au numérateur ou au dénominateur. La loi n'est obtenue qu'à un facteur numérique près, ce qui est une limite de la méthode.

On commence par écrire une **équation aux dimensions**, ce qui consiste à remplacer dans une formule les grandeurs par leurs dimensions. Les formules font souvent intervenir des produits de monomes de grandeurs, chaque dimension doit donc avoir la même puissance à gauche et à droite du signe = dans une équation aux dimensions.

Concrètement, pour rédiger correctement un calcul d'analyse dimensionnelle, on procède de la façon suivante :
▹ on se ramène si besoin à une équation scalaire, en projetant les vecteurs par exemple ;
▹ on note [X] la dimension d'une grandeur X, et on s'appuie sur les règles de calcul suivantes :
- $[k] = 1$ si k est un nombre ;
- $[X^n] = [X]^n$ avec n un nombre rationnel ;

- la dimension d'une dérivée est calculée comme celle d'un quotient.

⊳ on s'assure que la puissance de chaque grandeur de dimension donnée est la même à gauche et à droite du signe =.

⊳ on se ramène souvent aux grandeurs de base du système international, en faisant de l'analyse dimensionnelle sur d'autres lois de la physique si nécessaire.

Par exemple, la relation $m = \rho \times V$ entre la masse m d'un échantillon, sa masse volumique ρ et son volume V peut être analysée dimensionnellement de la manière suivante :

$[m] = M$, $[\rho] = M \cdot L^{-3}$ et $[V] = L^3$.

La dimension du membre de gauche est M, et celle du membre de droite $M \cdot L^{-3} \times L^3 = M$. Comme les deux dimensions sont égales, on conclut que la relation $m = \rho \times V$ est bien homogène.

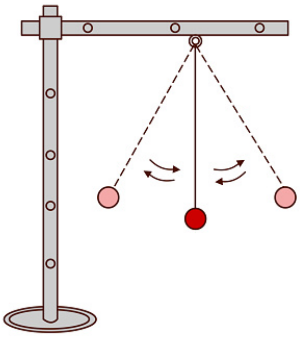
On peut aussi raisonner en termes d'unités : m est en kg, ρ en $kg{\cdot}m^{-3}$, V en m^3. L'unité du membre de gauche est kg. Celle du membre de droite est $kg{\cdot}m^{-3} \times m^3 = kg$.

3 Exercices d'application

Exercice 1 :

Déterminer la dimension, puis l'unité SI en tant que produit des unités SI de base des valeurs des grandeurs suivantes : vitesse, énergie cinétique, puissance, accélération, force, pression, constante de raideur d'un ressort, constante gravitationnelle, travail d'une force, moment d'une force, moment cinétique, moment d'inertie.

Exercice 2 :

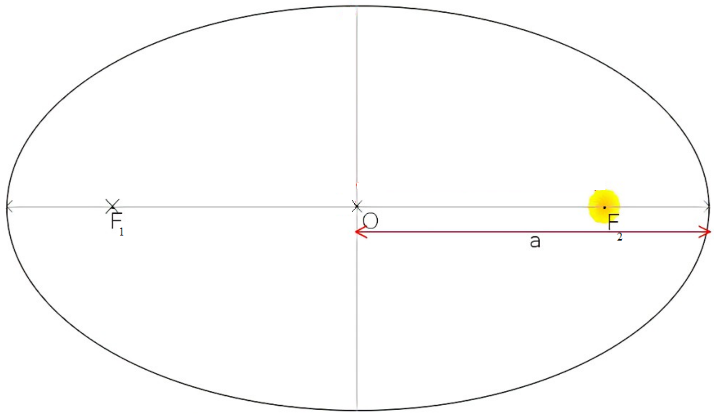


En mécanique, on appelle pendule simple une masse ponctuelle accrochée à une ficelle tendue de masse négligeable, qui oscille autour de sa position d'équilibre verticale. On peut montrer que les oscillations sont périodiques (elles se répètent à intervalles de temps réguliers) et que si l'angle formé par rapport à la verticale reste "petit", la période d'oscillation T a pour expression approchée $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, où g désigne l'intensité de l'accélération de la pesanteur et l la longueur de la ficelle.

Vérifier que cette relation est homogène et commenter.

Reprendre l'exercice en construisant cette loi par analyse dimensionnelle.

Exercice 3 :



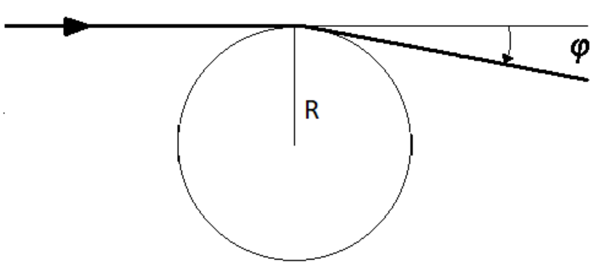
Dans le référentiel héliocentrique, les planètes du système solaire ont une orbite (trajectoire fermée sur elle-même) elliptique (en forme d'ellipse, un ovale qui a des propriétés mathématiques particulières) dont le Soleil occupe un des foyers. Elles parcourent cette trajectoire de manière périodique, en une durée T liée à la longueur du demi-grand axe de l'ellipse a, à la masse du Soleil M_S et à la constante gravitationnelle G.

Trouver sans utiliser de théorie physique une relation entre les trois variables du problème, à une constante de proportionnalité adimensionnée près. Il s'agit de la **troisième loi de Kepler**.

Exercice 4 :

La théorie de la Relativité Générale prédit que les rayons lumineux sont déviés lorsqu'ils passent au voisinage immédiat d'un astre massif (une étoile par exemple, qu'on modélisera par une boule de rayon R et de masse M), du fait de l'attraction gravitationnelle de ce dernier.

Vérifier que l'angle de déviation ϕ peut avoir pour expression $\phi = k \times \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}c^2}$, où k est un facteur purement numérique, G désigne la constante de gravitation, et c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.



Reprendre l'exercice en construisant cette loi par analyse dimensionnelle.

Remarque : la vérification expérimentale par Eddington de ce résultat lors d'une éclipse en 1919 (avec $k = 4$ comme prévu par Einstein) a rendu la théorie de la Relativité Générale et son créateur mondialement célèbres.