

AP9 : La méthode d'Euler (deuxième partie)

La **méthode d'Euler** consiste à approximer la dérivée d'une fonction par son taux d'accroissement afin de résoudre numériquement une équation différentielle.

Le schéma est le suivant :

▷ Si $x(t)$ est la solution d'une équation différentielle, on met cette dernière sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t)$$

où f est une fonction à déterminer explicitement.

▷ Si on cherche la solution sur un intervalle $[t_0; t_f]$, on découpe cet intervalle pour l'échantillonner en un certain nombre $N+1$ de points, en général répartis régulièrement. On définit le **pas**

$$h = \frac{t_f - t_0}{N}$$

de sorte que

$$t_i = t_0 + h \times i$$

pour $i \in \{0, 1, \dots, N\}$.

▷ L'objectif est de calculer des approximations x_i des valeurs $x(t_i)$. On utilise l'approximation

$$\frac{dx}{dt}(t) \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

appliquée pour chaque t_i , et on obtient

$$x_{i+1} \simeq x_i + h \frac{dx}{dt}(t_i) = x_i + f(x(t_i), t_i) \simeq x_i + f(x_i, t_i).$$

En pratique, on initialise avec $x_0 = x(t_0)$ (qui est la seule valeur exacte). Plus le pas h est petit, donc plus le nombre de points échantillonnés N est grand, plus la méthode est précise.

Une programmation possible de ce schéma consiste à construire deux listes, une pour la suite (t_i) des abscisses et une pour la suite (x_i) des ordonnées. On définit ensuite une fonction Euler qui prend en arguments les valeurs extrêmes de l'intervalle t_0 et t_f , le nombre de points N , la fonction f , et renvoie les listes des abscisses et des ordonnées.

L'objectif de cette séance est de mettre en pratique cette méthode en l'implémentant avec le langage de programmation Python, sur des exemples issus de la physique.

Les deux parties sont complètement indépendantes, les codes à compléter sont à télécharger sur Cahier de Prépa.

1 Simulation d'un saut en parachute

Pour étudier le mouvement lors d'un saut en parachute, on réalise une simulation en laboratoire grâce à un modèle réduit. On suppose l'existence d'une loi d'échelle qui assure que les résultats de cette étude se transposent à un saut en parachute en conditions réelles depuis un avion.

Le système étudié est une figurine munie d'un parachute, qu'on assimile à un point matériel de masse $m = 45 \text{ g}$. Il est lancé en l'air à la verticale et filmé lors de sa chute (également verticale) à l'aide d'une caméra immobile dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le jouet est lancé avec le parachute fermé et commence sa chute avec le parachute toujours fermé. Au bout d'un certain temps, le parachute s'ouvre.

À partir de la vidéo, un pointage des différentes positions du parachutiste à l'aide d'un logiciel dédié a permis de construire un tableau contenant la vitesse de chute en fonction du temps écoulé depuis le début de l'expérience à des dates espacées d'une durée fixe $\Delta t = 0,04 \text{ s}$.



Seul ce tableau de données est disponible. Afin de mieux visualiser, il a été transféré vers un programme Python qui permet de représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps sur la durée de l'expérience (voir programme pg1).

On note z_i la coordonnée verticale du point M_i , avec un axe de cotes (Oz) vertical descendant. On note t_i la date de la mesure i et v_i la vitesse instantanée au point i . On choisit l'origine de l'axe des cotes de sorte que $z_0 = 0$ et l'origine des dates de sorte que $t_0 = 0$, bien qu'elle ne coïncide pas avec le début de la chute.

Q1. Représenter la situation sur un schéma et y faire figurer les différentes forces, sans souci d'échelle.

Q2. Télécharger le programme pg1, réfléchir à son fonctionnement puis appeler l'enseignant pour le lui expliquer.

Q3. En justifiant votre démarche, compléter les deux lignes incomplètes. Exécuter le programme. Quand vous vous serez assuré qu'il fonctionne correctement, vous copierez sur votre compte rendu les deux lignes de code complétées.

Q4. Commenter les résultats de la simulation.

2 Simulation du régime sinusoïdal forcé d'un système du premier ordre

Q5. Donner, en justifiant, un exemple de système dont l'évolution d'une grandeur $x(t)$ est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} + \omega_0 x = \omega_0 E \cos(\omega t). \quad (1)$$

Vous préciserez soigneusement la nature de la grandeur $x(t)$ et indiquerez comment les paramètres ω_0 , E et ω sont reliés à des grandeurs physiques caractéristiques de la situation physique étudiée.

Q6. Préciser la condition initiale $x(0)$.

Q7. Résoudre analytiquement l'équation différentielle (1).

L'objectif est maintenant d'étudier numériquement, en utilisant la méthode d'Euler, l'établissement du régime sinusoïdal forcé.

Q8. Déterminer sur cet exemple la fonction $f(x(t), t)$ qui intervient dans la méthode d'Euler.

Q9. Télécharger le programme pg2, réfléchir à son fonctionnement puis appeler l'enseignant pour le lui expliquer.

Q10. En justifiant votre démarche, compléter les trois lignes incomplètes. Exécuter le programme. Quand vous vous serez assuré qu'il fonctionne correctement, vous recopierez sur votre compte rendu les trois lignes de code complétées.

Q11. Commenter les résultats de la simulation.