

## PHYSIQUE-CHIMIE. DEVOIR SURVEILLÉ 9

Samedi 04/04/2026. Durée : 4h

### CONSIGNES

▷ **La calculatrice est interdite.** Les autres outils électroniques (téléphone, tablette...) et documents papier sont strictement interdits. Un brouillon est autorisé.

▷ Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

- ▷ Ne pas utiliser de correcteur.
- ▷ Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- ▷ Numéroter les pages de votre composition.

Le sujet se compose de quatre parties complètement indépendantes.

Une aide au calcul est disponible en fin de sujet.

### Partie I - Athlétisme et physique

On peut analyser les performances obtenues en athlétisme grâce à la physique. En particulier, pour les courses de vitesse et les sauts, les muscles situés devant les cuisses, appelés quadriceps, jouent un rôle essentiel.

On fournit les valeurs numériques utiles :

- ▷ accélération locale de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ;
- ▷ énergie moyenne délivrée par les quadriceps d'une jambe :  $E = 500 \text{ J}$  ;
- ▷ masse moyenne d'un sprinter ou d'un sauteur masculin :  $80 \text{ kg}$  ;
- ▷ masse d'un marteau (lancer masculin) :  $7 \text{ kg}$ .

**Q1.** Une formule obtenue en biomécanique indique que l'énergie cinétique d'une jambe est égale au sixième du produit de sa masse par le carré de la vitesse du coureur. Sachant que la masse d'une jambe représente 20 % de la masse corporelle, en déduire la valeur numérique de la vitesse du coureur, en m/s. Comparer avec la vitesse de pointe d'Usaïn Bolt à 43 km/h. Commenter.

Pour les deux questions suivantes, on suppose qu'un sauteur atteint la vitesse de 10 m/s juste avant le début de son saut.

**Q2.** On s'intéresse au saut à la perche. Calculer la hauteur maximale par rapport au sol que le centre de gravité d'un perchiste peut atteindre. On suppose que la perche a une masse négligeable et que le centre de gravité du perchiste est initialement à 1,0 m du sol. Comparer à la hauteur maximale atteinte par Armand Duplantis : 6,30 m. Commenter.

**Q3.** On s'intéresse au saut en longueur. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, en supposant que la longueur  $\delta$  du saut ne dépend que de la vitesse  $V$  du sauteur et de l'accélération de la pesanteur  $g$ , établir une relation exprimant  $\delta$  (à un facteur sans

dimension près, pris égal à 1). Faire l'application numérique. Comparer à la longueur du saut record de Mike Powell, soit 8,95 m. Commenter.

On s'intéresse maintenant au lancer de poids, afin de déterminer l'angle de lancement optimal garantissant la plus grande portée.

On suppose que le poids, assimilé à un point matériel de masse  $m_p$ , est lancé à une hauteur  $h_0$  par rapport au sol, avec une vitesse initiale de norme  $v_0$ , faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

On suppose que le mouvement s'effectue sans frottement dans un plan orienté par un repère  $(O, x, z)$ , l'axe  $(Ox)$  est horizontal, l'axe  $(Oz)$  est vertical ascendant et l'origine  $O$  située au niveau du sol, sur la verticale passant par le point de lancement du poids.

**Q4.** Établir les équations différentielles vérifiées par les coordonnées  $x(t)$  et  $z(t)$  du poids. Préciser les conditions initiales  $x(t=0)$ ,  $z(t=0)$ ,  $\dot{x}(t=0)$  et  $\dot{z}(t=0)$ .

**Q5.** Déterminer les expressions complètes de  $x(t)$  et  $z(t)$ .

**Q6.** En déduire l'équation  $z(x)$  de la trajectoire. Quelle est la forme géométrique de cette courbe ?

**Q7.** En déduire la portée  $L$  du lancer, en fonction de  $v_0$ ,  $g$ ,  $h_0$  et  $\alpha$ .

On s'intéresse maintenant au lancer du marteau. Ce projectile est constitué d'un poids auquel est attaché un câble métallique avec une poignée (cf figure 1). Cette étude prend en compte les frottements de l'air.

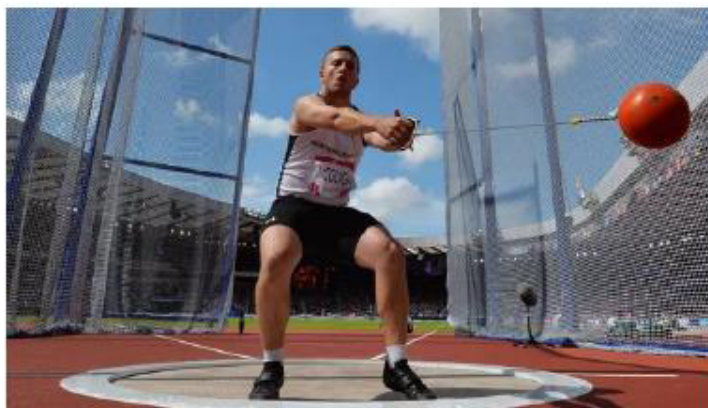


FIGURE 1 – Lanceur de marteau débutant son lancer (source : AFP).

**Q8.** Dans la phase finale du lancer, le lanceur effectue 3 rotations par seconde sur lui-même. La distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du marteau est de 1,3 m. À quelle vitesse (en m/s) est lâché le marteau ?

**Q9.** On suppose que la force de frottement avec l'air s'écrit  $\vec{f} = -k\vec{v}$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du marteau. Quelle est la vitesse limite  $\vec{v}_{\text{lim}}$  théoriquement atteinte ?

**Q10.** On suppose désormais que la force de frottement est quadratique avec la vitesse :  $\vec{f} = -Kv\vec{v}$ . On résout numériquement les équations du mouvement par la méthode d'Euler, à l'aide du programme suivant, écrit en Python. Écrire et compléter sur votre copie les quatre lignes où il manque du code.

```

from math import sin, cos, pi, sqrt

m = 7.2 # masse (kg)
K = 0.05 # coeff de frottement
g = 9.8 # accél de pesanteur (m2/s)
v0 = 30.0 # vitesse initiale (m/s)
h0 = 1.7 # hauteur initiale de lancer (m)
alpha_deg = 40.0 # angle de lancer (°)

dt = 1e-2 # pas de tps pour Euler (s)

t = [0.]
x = [0.]
z = [h0]
vx = [v0*cos(alpha_deg*pi/180.)]
vz = [v0*sin(alpha_deg*pi/180.)]

while z[-1] > 0. :
    v_norme = sqrt(vx[-1]**2 + vz[-1]**2)
    Fx = -K*v_norme * vx[-1]
    Fz = -K*v_norme * vz[-1]
    t.append(t[-1] + dt)
    vx.append(...) # ligne 1 à compléter
    vz.append(...) # ligne 2 à compléter
    x.append(...) # ligne 3 à compléter
    z.append(...) # ligne 4 à compléter

```

## Partie II - Filtrage d'un signal

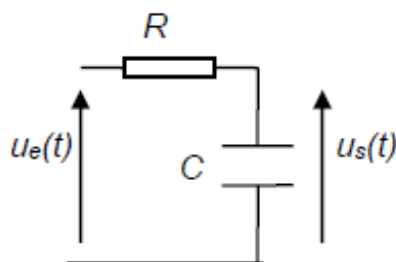
Un dispositif électronique permet d'obtenir le signal

$$u_e(t) = 2 + 3 \cos(2\pi 50 t)$$

avec  $u_e$  en V et t en s.

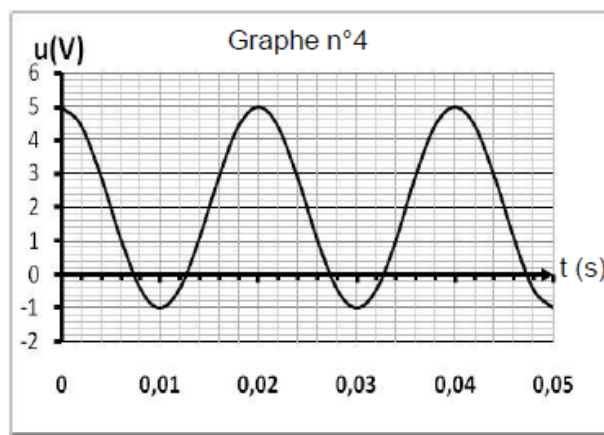
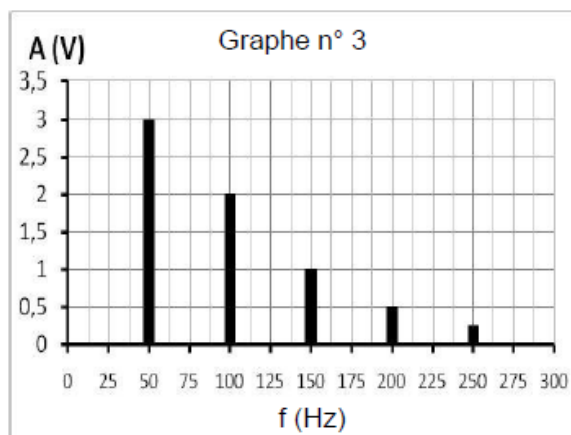
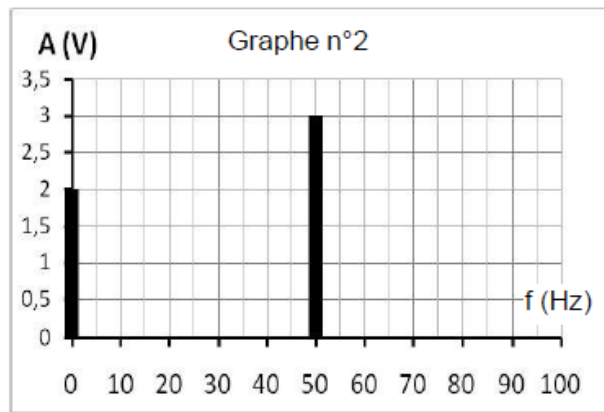
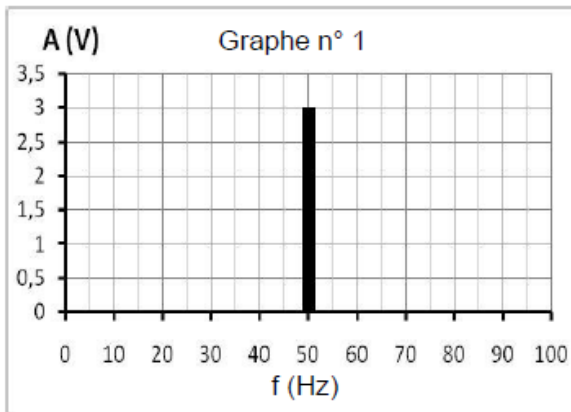
La partie de la tension  $u_e(t)$  variable périodiquement en fonction du temps est due à des parasites électriques, de fréquence 50 Hz, amplifiés par différents quadripôles intermédiaires.

Il faudrait garder uniquement la composante continue de ce signal car elle seule contient l'information utile. On utilise pour cette fonction le circuit de la figure 2 :



**Figure 2** - Schéma du montage utilisé pour le traitement de  $u_e(t)$

**Q11.** Indiquer, parmi les graphes suivants, celui qui représente le spectre en amplitude de  $u_e(t)$ . Préciser pourquoi les autres graphes ne conviennent pas.



**Q12.** À l'aide des équivalents en haute et basse fréquences des composants, déterminer la nature du filtre réalisé avec le circuit. Justifier si ce circuit permet d'isoler la composante continue du signal.

La fonction de transfert du montage peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

**Q13.** Nommer  $H_0$  et en donner la valeur en justifiant.

**Q14.** Préciser la valeur du gain en décibel,  $G_{dB}$ , lorsque  $\omega \ll \omega_c$ .

On donne pour ce circuit  $\omega_c = \frac{1}{RC}$ .

**Q15.** Rappeler la définition de la fréquence de coupure à  $-3$  dB. Donner l'expression de cette fréquence de coupure, notée  $f_c$ , en fonction de  $R$  et  $C$  pour ce circuit.

Comme précisé précédemment, on applique en entrée de ce circuit le signal  $u_e(t)$  d'expression :

$$u_e(t) = 2 + 3 \cos(2\pi 50 t).$$

**Q16.** Déterminer l'expression numérique de  $u_s(t)$  en prenant  $f_c = 0,5$  Hz. Conclure.

### Partie III - Étude thermodynamique de l'hélium

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'hélium 4 (ou  ${}^4\text{He}$ ). Les différentes sous-parties sont largement indépendantes les unes des autres.

#### III.1. Refroidissement de l'hélium liquide

Lorsque de l'hélium est refroidi en suivant la courbe de coexistence gaz-liquide, on observe une évolution rapide de sa capacité thermique massique à pression constante autour de la température  $T_\lambda = 2,17\text{K}$ .

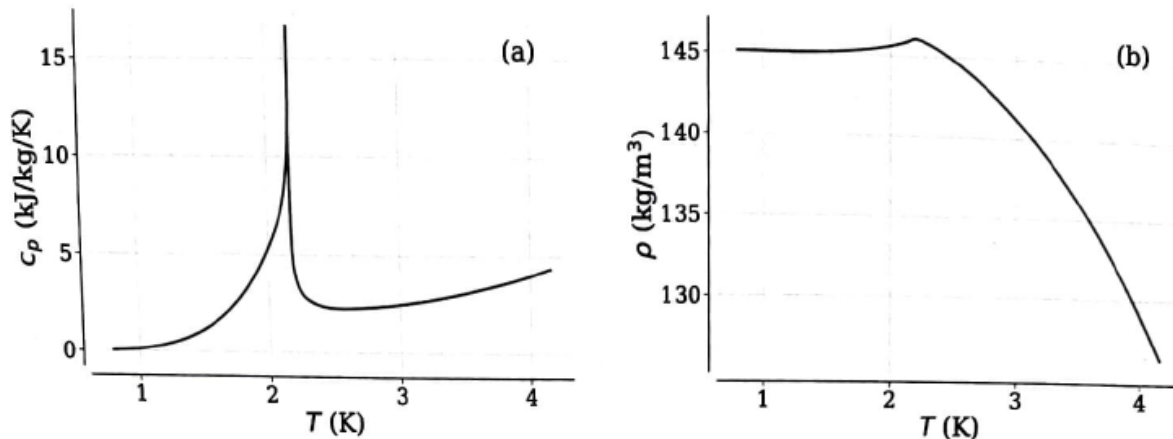


FIGURE 1 – (a) Évolution de la capacité thermique massique à pression constante  $c_p$  de l'hélium à la pression de vapeur saturante en fonction de la température T. (b) Évolution de la masse volumique  $\rho$  de l'hélium à la pression de vapeur saturante en fonction de la température T

On refroidit une masse m d'hélium liquide à pression constante de  $T = 5\text{K}$  à  $T = 1\text{K}$  avec une puissance de refroidissement,  $P_{\text{th}} < 0$  constante au cours du temps.

**Q17.** Par application du premier principe entre deux états d'équilibre, exprimer  $\frac{\Delta T}{\Delta t}$  en fonction des données du problème. On suppose par la suite que les deux états d'équilibre sont infiniment proches l'un de l'autre. En déduire l'expression de  $\frac{dT}{dt}$  en fonction des données du problème. Donner alors l'allure de l'évolution temporelle de la température de l'hélium à partir de la courbe  $c_p(T)$ .

Cette évolution rapide de  $c_p(T)$  est due à une transition de phase à la température  $T = T_\lambda$  (appelée "transition lambda" à cause de la forme du pic de  $c_p$  proche de  $T = T_\lambda$ ) d'une phase liquide I vers une phase liquide II, que l'on appelle aussi "phase liquide superfluide". C'est une transition de phase sans chaleur latente (autrement dit, sans enthalpie de changement d'état), et à laquelle il n'y a pas de discontinuité de la masse volumique (voir Figure 1(b)).

L'hélium superfluide (i.e. en phase liquide II) a des propriétés très différentes de celles de la phase liquide I. En particulier, sa viscosité est extrêmement faible, au moins  $10^6$  fois plus faible que celle de la phase liquide I, et l'hélium superfluide peut s'écouler très facilement à travers un milieu poreux.

Le diagramme d'état ( $p, T$ ) de l'hélium est représenté en Figure 2.

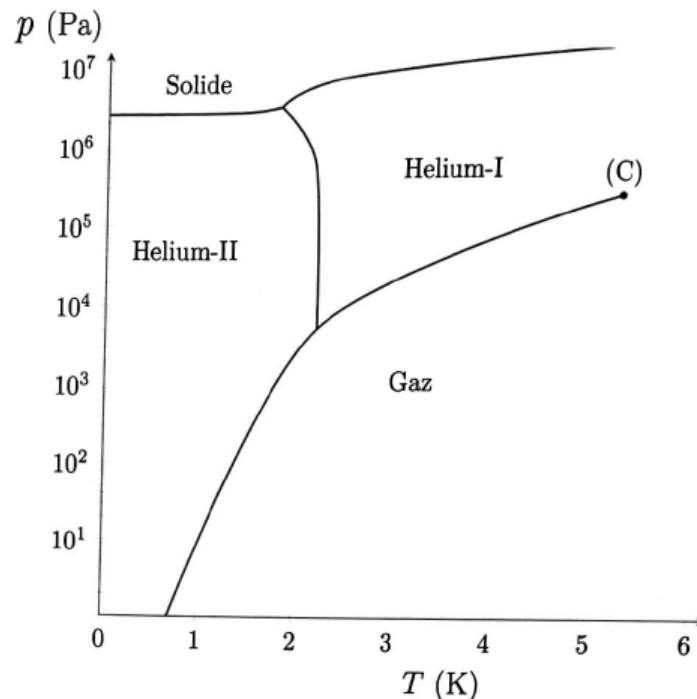


FIGURE 2 – Diagramme d'état de l'hélium. Le point (C) est le point critique. L'hélium II est aussi appelé hélium superfluide

**Q18.** Donner le diagramme de phase ( $p, T$ ) typique d'un corps pur en équilibre. Comparer avec celui de l'hélium. Que se passe-t-il habituellement lors du refroidissement d'un système le long de sa ligne de coexistence avec la phase gazeuse ? Que se passe-t-il pour l'hélium ?

L'hélium liquide à basse température, outre ses propriétés superfluides, a la caractéristique de pouvoir être obtenu avec une remarquable pureté. En effet, à quelques kelvin, toute impureté éventuellement présente dans le liquide est gelée sur les parois ou sédimente au fond du contenant. On peut ainsi, par filtration, obtenir un liquide extrêmement pur. Cela offre la possibilité d'étudier des états "métastables" de l'hélium liquide. Il est possible d'étudier l'hélium liquide à des pressions  $p$  inférieures à sa pression de vapeur saturante  $P_{\text{sat}}$ . Les états métastables de l'hélium sont si robustes que l'on peut même atteindre des pressions négatives (des valeurs de  $-p$  de l'ordre de plusieurs bars peuvent être obtenues !).

**Q19.** Quelle est l'interprétation microscopique de la pression pour un gaz parfait ? Peut-elle être négative pour un gaz parfait ? Retrouver ce résultat en vous appuyant sur l'équation d'état d'un gaz parfait. Vous rappelerez la signification et l'unité de chacune des grandeurs physiques qui y figurent.

Une pression négative ne peut être atteinte que dans des systèmes où il y a des interactions attractives entre les particules.

Beaucoup de fluides peuvent être décrits par l'équation d'état de van der Waals :

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

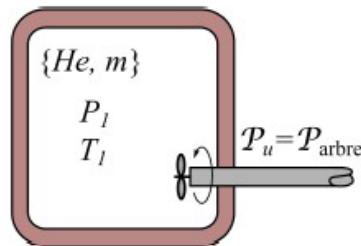
où  $a$  et  $b$  sont deux constantes positives qui dépendent de la nature du fluide,  $n$  est la quantité de matière et  $V$  le volume du fluide.

**Q20.** Expliquer quelles hypothèses simplificatrices associées au modèle du gaz parfait sont corrigées respectivement par l'introduction des constantes  $a$  et  $b$  dans l'équation d'état.

**Q21.** Pourquoi peut-on avoir  $p < 0$  à basse température ? Déterminer en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $R$  la température  $T^*$  en-dessous de laquelle la pression peut devenir négative.

### III.2. Brassage de l'hélium gazeux

Un réservoir rigide et calorifugé contient une masse  $m = 1,0$  kg d'hélium à la température  $T_1 = 300$  K et à la pression  $P_1 = 300$  kPa. L'hélium est brassé à l'aide d'un agitateur de puissance  $P_u = 15$  W, qu'on fait fonctionner pendant une durée  $\tau = 30$  min.



**Q22.** En appliquant le premier principe de la thermodynamique, déterminer la température finale de l'hélium  $T_2$ . Commenter.

**Q23.** En déduire la pression finale de l'hélium  $P_2$ .

Donnée :

Capacité thermique massique à volume constant de l'hélium :  $c_v = 3,12$  kJ·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>.

### III.3. Détente de Joule et Gay-Lussac de l'hélium gazeux

On s'intéresse à la détente de Joule et Gay-Lussac de l'hélium gazeux. Ce dernier se trouve initialement dans un compartiment de volume  $V_1 = 50$  L et à la température  $T_1$ , puis se détend dans un compartiment de volume  $V_2 = 9V_1$  initialement vide, après ouverture du robinet qui sépare les deux compartiments.

L'ensemble est calorifugé, et les parois sont indéformables. La température finale du gaz est  $T_2$ .

**Q24.** Justifier qu'on peut modéliser l'hélium gazeux par un gaz parfait monoatomique.

**Q25.** Exprimer l'énergie interne du système à l'état initial, puis à l'état final.

**Q26.** Calculer la variation de température du gaz  $T_2 - T_1$ .

**Q27.** Quand on fait l'expérience, pour l'hélium on observe  $T_2 - T_1 \approx 0$ , alors que pour 22,7 mol de dioxyde de carbone, on observe une diminution de la température de 5,1 K. Que conclure ?

### III.4. Résolution de problème

Le "balloon clustering" consiste à soulever une personne grâce à des ballons.



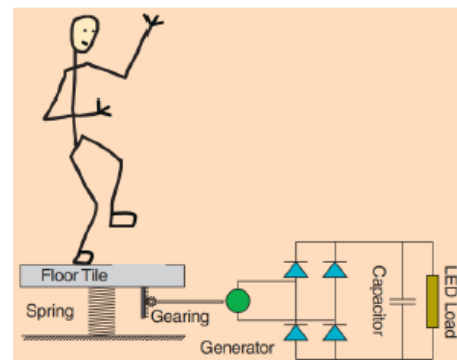
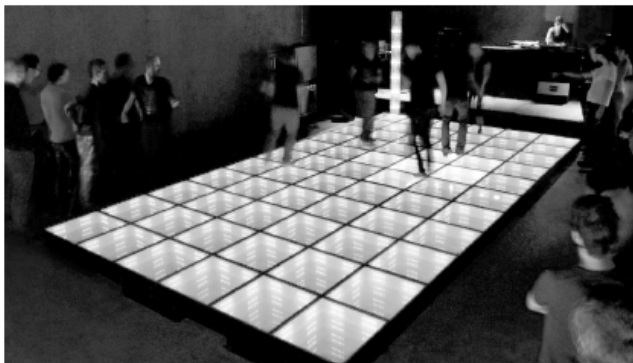
**Q28.** Estimer le nombre de ballons gonflés à l'hélium nécessaire pour soulever un homme.

Données :

- masses molaires atomiques :  $M(\text{He}) = 4,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{N}) = 14,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  ;  $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  ;
- constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

## **Partie IV - Récupération d'énergie de vibration**

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).



**Document 1 :** exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.  
D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

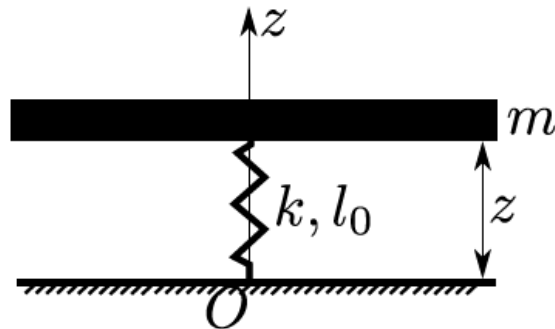
Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article "Power from the people" de DOI [10.1109/MIAS.2010.939649](https://doi.org/10.1109/MIAS.2010.939649).

Nous étudions la réponse mécanique de ce système.

#### IV.1 Étude en régime libre

En première approximation, le système est modélisé par une masse  $m$  (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement sans frottement.

C'est donc le système du document 2 qui nous intéresse. On note  $k$  la raideur du ressort,  $l_0$  sa longueur à vide. Le champ de pesanteur de norme  $g$  est dirigé vers le bas de la figure.



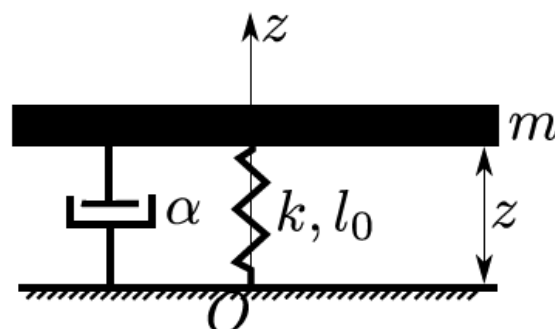
Document 2 : modèle simplifié du système

**Q29.** En vous appuyant sur une analyse dimensionnelle combinée à des arguments physiques, proposer une expression pour la position d'équilibre  $z_{\text{éq}}$  de la masse, en fonction de  $k$ ,  $l_0$ ,  $m$  et  $g$ .

**Q30.** En raisonnant sur le système du document 2 et à l'aide d'un bilan des forces, établir ensuite l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$  lorsque le système est mis en mouvement.

**Q31.** Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constante(s) d'intégration. Quelle est la nature du mouvement ?

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du document 2 un amortissement. On obtient alors le modèle du document 3.



Document 3 : modèle simplifié du système qui prend en compte l'amortissement.

L'amortisseur exerce sur la masse une force  $\vec{f} = \alpha \vec{v}$  avec  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de la masse et  $\alpha$  une constante positive.

**Q32.** En raisonnant sur le système du document 3, établir l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$ .

**Q33.** Mettre l'équation obtenue sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e,$$

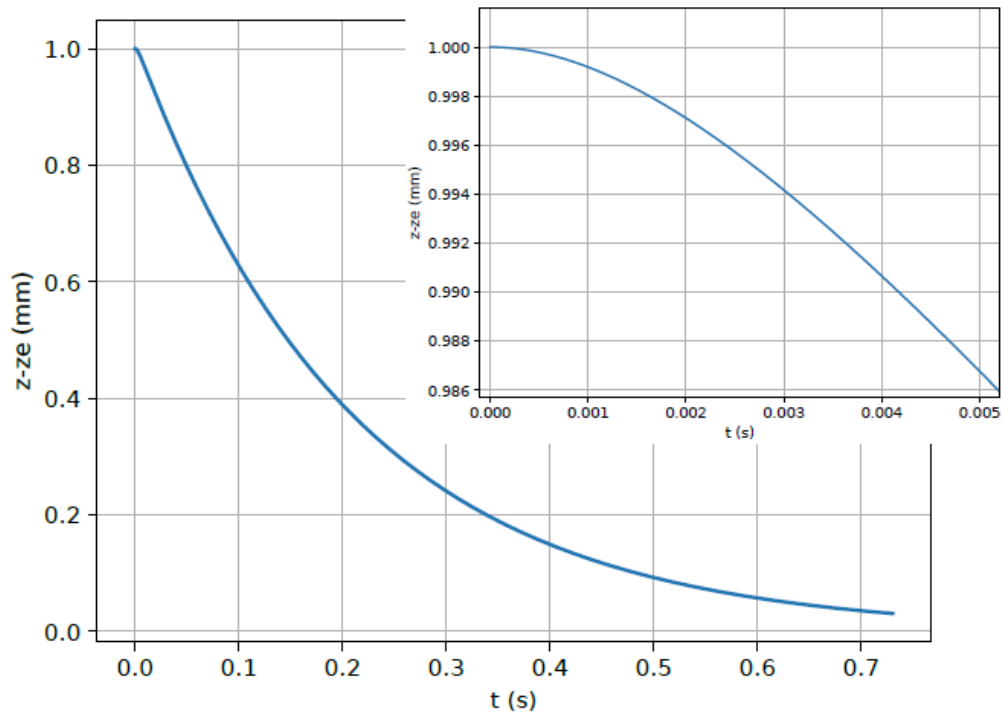
avec  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $z_e$  des constantes dont on donnera les expressions en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $l_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

**Q34.** Rappeler les noms des trois régimes possibles pour les solutions de ce type d'équation différentielle du deuxième ordre, et indiquer les valeurs du facteur de qualité  $Q$  qui correspondent à chaque régime. D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

Tableau des paramètres retenus par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

$m$	$k$	$\alpha$	$\omega_0$	$Q$	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	$43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

**Q35.** Le document 4 ci-dessous montre le tracé de la solution  $z(t) - z_e$ . En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



**Document 4 :** tracé de  $z(t) - z_e$  et zoom aux temps courts.

## IV.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

Dans la pratique, le système est mis en mouvement par le danseur qui, debout sur la dalle, bouge de haut en bas. Il est alors nécessaire d'étudier la réponse du système en régime sinusoïdal forcé.

▷ On prend la hauteur d'équilibre de la dalle comme origine, on a donc désormais  $z_e = 0$ .

▷ On note  $z_d(t) = A \cos(\omega t)$  la hauteur du centre de masse du danseur (à une constante additive près). Le facteur  $A$  est positif.

▷ On étudie le régime sinusoïdal forcé où la position de la dalle, repérée par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme  $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \phi)$  avec  $Z_m > 0$ .

▷ On utilise la représentation complexe :  $z_d(t)$  est représenté par  $\underline{z}_d(t) = A e^{j\omega t}$ , et  $z(t)$  est représenté par  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$  avec  $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\phi}$ .

On admet qu'une démarche similaire à celle de la sous-partie précédente mène à l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d$$

avec les mêmes valeurs numériques que dans le tableau précédent pour  $\omega_0$  et  $Q$ , et avec  $\mu$  une constante donnée par  $\mu = (\text{masse du danseur})/m \simeq 0,7$ .

**Q36.** À partir de cette équation, établir l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{Z}_m$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\mu$  et  $A$ .

**Q37.** En déduire une expression de l'amplitude  $Z_m$  en fonction des mêmes paramètres.

**Q38.** Donner l'expression de la limite de  $Z_m$  à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence.

**Q39.** Montrer qu'il existe un phénomène de résonance à condition que  $Q$  vérifie une certaine inégalité qu'on établira. Y a-t-il existence d'une résonance pour le système considéré ici ?

### Aide au calcul

$$\sqrt{\frac{15}{8}} = 1,37 ;$$

$$1,37 \times 3,6 = 4,39 ;$$

$$\frac{1,37}{3,6} = 0,38 ;$$

$$\frac{27000}{3,12} = 8654.$$

**FIN**

