Révisions pour le concours blanc : ondes

L'oléoduc Bakou-Tbilissi-Ceyhan (parfois abrégé en oléoduc BTC), ouvert en 2005, transporte sur 1776 km le pétrole brut du champ pétrolifère d'Azeri-Chirag-Guneshli sur la mer Caspienne jusqu'à la mer Méditerranée (figure 1). Sa longueur est de 440 km en Azerbaïdjan, de 260 km en Géorgie et enfin de 1076 km en Turquie. L'oléoduc tire son nom de la traversée de Bakou, capitale de l'Azerbaïdjan, de Tbilissi, capitale de la Géorgie, et de Ceyhan, port du sud-est de la côte méditerranéenne turque. C'est le deuxième plus long oléoduc du monde après l'oléoduc Droujba qui relie la Russie à l'Europe centrale. Il est parallèle au gazoduc Bakou-Tbilissi- Erzurum.

FIGURE 1 – Tracé de l'oléoduc BTC

La construction de l'oléoduc BTC a été l'un des plus importants projets de génie civil du début du xxie siècle, et certainement un des plus importants jamais conduits dans la partie orientale de l'Asie depuis la chute de l'Union soviétique. Sa construction a nécessité l'assemblage de 150 000 sections de tube de 12 m de long, correspondant à une masse de 594 000 tonnes. Il est prévu pour transporter un million de barils par jour. Son architecture comprend 8 stations de pompage, deux stations intermédiaires de relayage et 101 postes de vannes d'arrêt. Le diamètre du tube est de 1070 mm sur sa plus grande longueur, se réduisant à 865 mm à l'approche de Ceyhan.

Le 10 mai 2006, du pétrole fut injecté, côté Bakou, dans l'oléoduc. Il parvint à Ceyhan le 28 mai 2006.

Le tracé de l'oléoduc emprunte trois failles actives en Azerbaïdjan, quatre en Géorgie et sept en Turquie. Les ingénieurs du projet ont dû donc équiper l'oléoduc de nombreuses solutions techniques afin de réduire sa vulnérabilité face aux déplacements de la croûte terrestre.

On s'intéresse à la propagation d'une onde mécanique longitudinale dans l'oléoduc. Chaque tronçon de l'oléoduc est modélisé par un point matériel de masse m, lié à ses voisins par des ressorts de même constante de raideur K. À l'équilibre, les tronçons sont équidistants d'une distance a égale à la longueur à vide des ressorts. Chaque tronçon est repéré par un entier n. Lorsqu'une onde se propage, on note $x_n(t)$ le déplacement algébrique par rapport à l'équilibre du tronçon numéro n.

Les frottements sont négligés dans cette étude. Le poids des tronçons est supposé compensé par une force de réaction verticale.

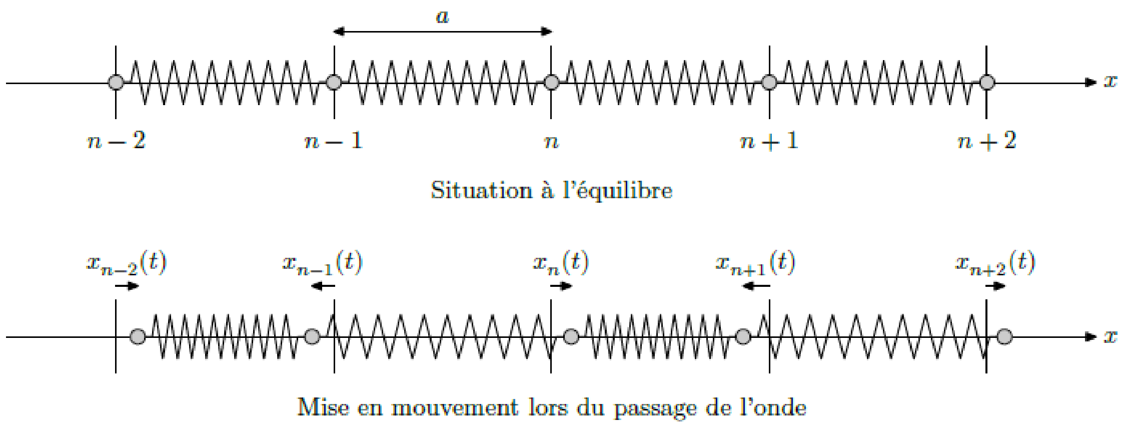

FIGURE 2 – Représentation de la chaîne d'oscillateurs

Q1. En appliquant la deuxième loi de Newton au tronçon numéro n, établir l'équation

$$\ddot{x}_n(t) = \Gamma(x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t)) \tag{1}$$

et donner l'expression de Γ en fonction de K et m.

On s'intéresse à des ondes associées à des déplacements de la forme

$$x_n(t) = X_0 \cos(\omega t - kna)$$

avec X_0, ω et k des constantes positives.

Q2. Que représentent physiquement les constantes X_0, ω et k ?

Q3. En utilisant la notation complexe, montrer que la relation entre ω et k s'écrit :

$$\omega^2 = 4\Gamma \sin^2(ka/2).$$

Cette relation est appelée relation de dispersion. On suppose que la distance a entre deux tronçons consécutifs est très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde mécanique qui se propage : $ka \ll 1$.

Q4. Montrer que la relation de dispersion se simplifie et en déduire que la célérité c de l'onde s'écrit

$$c = \sqrt{\Gamma}\, a.$$

On cherche à estimer la valeur de la constante de raideur K. Chaque tronçon de l'oléoduc est constitué par un cylindre creux possédant une certaine élasticité. La loi de Hooke exprime, dans le domaine d'élasticité d'un matériau, la force de traction T nécessaire pour allonger de ΔL une barre du matériau de section S et de longueur au repos L. Elle s'écrit

$$T = ES\frac{\Delta L}{L}.$$

Q5. En utilisant la loi de Hooke et les données du préambule, estimer la valeur numérique de la constante de raideur K.

On fixe pour la suite les valeurs suivantes : $a = 12$ m, $K = 7 \times 10^8 \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $m = 4$ tonnes.

Q6. Calculer la valeur numérique de c.

Afin de vérifier les résultats précédents, on simule informatiquement la propagation de l'onde. On utilise un modèle discret comprenant $N = 100$ tronçons de masse m reliés par des ressorts de raideur K. Le premier et le dernier tronçon sont maintenus fixes, les autres sont libres de se déplacer le long d'un axe horizontal. À l'instant initial tous les tronçons sont au repos et le premier tronçon est brusquement déplacé de 5 cm. Il est ensuite maintenu dans cet état $(x_0(t \geq 0) = 0{,}05 \text{ m})$.

On obtient les résultats graphiques représentés ci-dessous pour les déplacements de l'ensemble de la chaîne de tronçons à différents instants ainsi que le déplacement du vingtième tronçon au cours du temps.

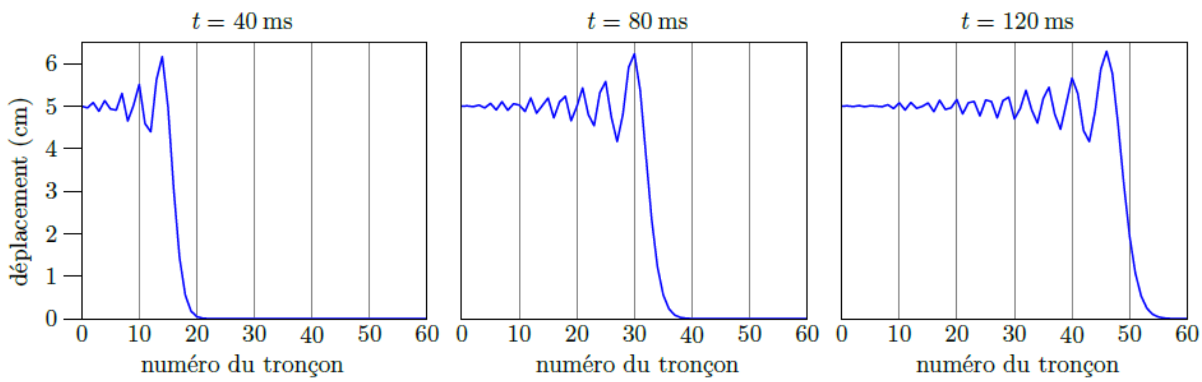

FIGURE 3 – Déplacement des tronçons à différents instants t

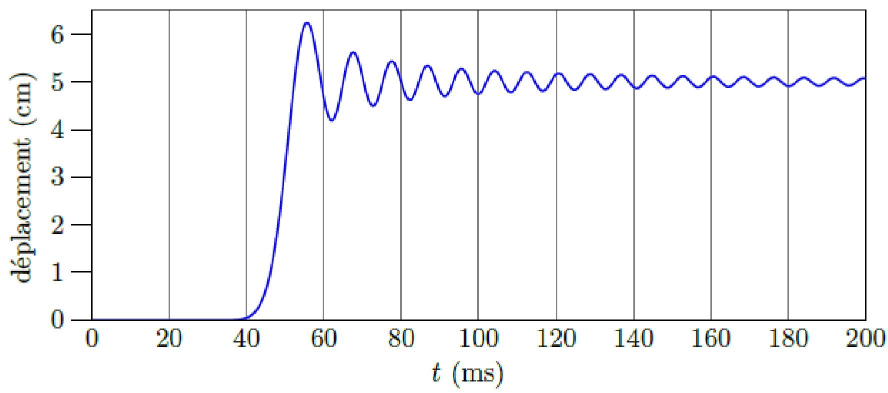

FIGURE 4 – Déplacement du tronçon n°20

Q7. Déterminer par lecture graphique les valeurs de la vitesse c de l'onde, de sa longueur d'onde λ et de la période T des oscillations d'un tronçon.

Q8. Commenter ces résultats.