

TD27 : Actions d'un champ magnétique

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

▷ Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice en translation rectiligne sur deux rails parallèles (rails de Laplace) placée dans un champ magnétique extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal à la barre : TLB1

▷ Exprimer la puissance des forces de Laplace : TLB1

▷ Pour une spire rectangulaire parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe : établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique : TLB2

▷ Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace : TLB2

▷ Étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole : ex1

1 Tester les bases

TLB1 : Rails de Laplace en pente

Des rails de Laplace, au lieu d'être horizontaux, forment un angle α avec l'horizontale. Le champ magnétique est stationnaire et uniforme, vertical, dirigé vers le haut.

On prend $B = 150 \text{ mT}$, $m = 8,0 \text{ g}$, $l = 12 \text{ cm}$ (masse et longueur du barreau mobile), $\alpha = 30^\circ$ et $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

On néglige les frottements.

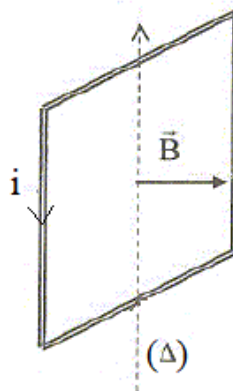
1. Faire un schéma en précisant le sens du courant pour que la force permette au barreau mobile de remonter les rails.

2. Calculer la valeur de I pour que le barreau monte à vitesse constante (on imagine qu'il a une vitesse initiale non nulle).

3. Calculer la puissance de la résultante des forces de Laplace sur le barreau s'il met $0,5 \text{ s}$ pour augmenter son altitude de 10 cm .

TLB2 : Cadre mobile en courant alternatif

Une spire rectangulaire de surface S , dans laquelle circule un courant i sinusoïdal, d'amplitude I_m et de pulsation ω , est placée dans un champ magnétique \vec{B} stationnaire et uniforme, orthogonal à son axe de rotation (Δ).



1. En considérant la spire dans une position quelconque et $i = I_m$, déterminer le sens des forces de Laplace et de leur couple. Les représenter sur un schéma.

2. Expliquer qualitativement pourquoi, si la spire tourne à la vitesse angulaire ω , le couple moyen des forces de Laplace sur la spire est non nul.

3. Quelle doit être la position de la spire lorsque $i = I_m$ pour que le moment du couple soit maximal (on pourra définir un angle θ) ? Dans quel sens doit-elle tourner ?
4. Dans ce cas, exprimer la valeur moyenne du couple des forces de Laplace sur la spire en fonction de I_m , S et B .

TLB3 : Forces de Laplace entre deux fils parallèles

Deux fils parallèles distants de a sont parcourus par le même courant I . Pour évaluer le champ magnétique créé par l'un des fils, on se placera dans l'approximation d'un fil infini, le champ est alors donné par la relation :

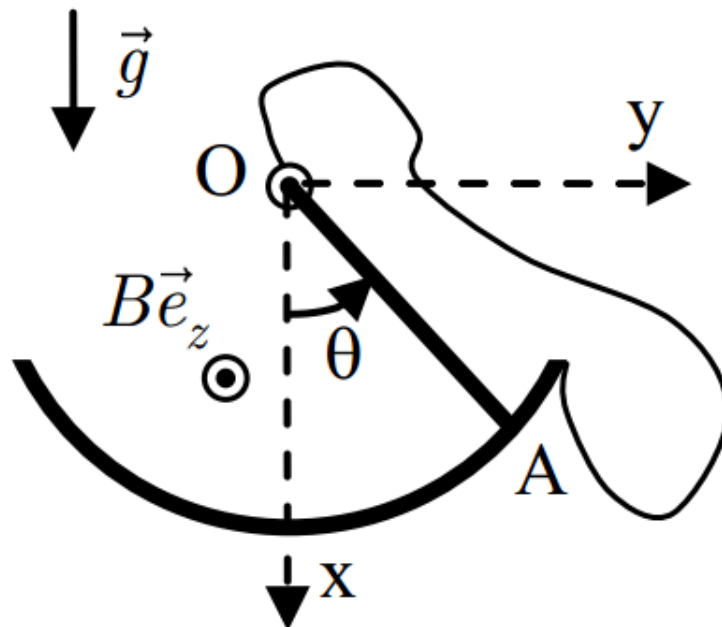
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

en coordonnées cylindriques.

1. Pour que la force soit attractive, les courants doivent-ils être dans le même sens ou en sens inverse ?
2. Donner l'expression de la force sur une longueur l de fil. Comment cette force dépend-elle de l'intensité I du courant ?
3. Calculer numériquement cette force pour une longueur $l = 20$ cm de fil, les fils étant distants de $a = 1$ cm et l'intensité du courant valant $I = 12$ A. Commenter.
4. Calculer la valeur de l'intensité I nécessaire pour que, la distance entre les fils étant de 1 m, la force d'attraction entre les deux fils soit égale à 2×10^{-7} N par mètre de fil.

TLB4 : Équilibre d'une tige dans un champ magnétique

Une tige rectiligne de longueur $L = OA$ fixée en O et parcourue par un courant I (il y a un contact mobile en A) est plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$.



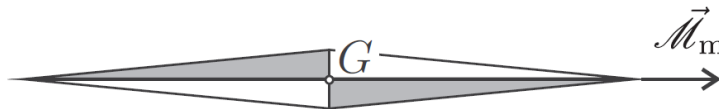
1. Quel doit être le sens du courant pour que la position d'équilibre corresponde qualitativement à ce qui est indiqué sur le schéma ?
2. Déterminer l'expression de l'angle d'équilibre θ_{eq} en fonction de B , I , L , la masse m de la tige et l'accélération de la pesanteur g . Commenter.

2 Exercices

Exercice 1 : Utilisation d'une boussole

On utilise une boussole constituée d'une aiguille aimantée mobile, présentant un axe de symétrie longitudinal.

Cette aiguille peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre de masse G et perpendiculaire à l'axe de symétrie.



La liaison avec l'axe est du type pivot parfait sans frottement.

Cette aiguille aimantée se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_m$ ayant la direction de l'axe de symétrie de celle-ci.

Cette boussole est placée dans un champ magnétique \vec{B} , permanent et localement uniforme (il est considéré comme uniforme tout le long de l'aiguille aimantée). Les forces magnétiques soumettent la boussole à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}_m \wedge \vec{B}$. On note J le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation.

Dans un premier temps, nous allons étudier les petits mouvements de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en négligeant les frottements fluides dus à l'air.

Le champ magnétique et l'axe de symétrie de l'aiguille sont dans un plan horizontal. On appelle α l'angle entre la direction de \vec{B} et celle de $\vec{\mathcal{M}}_m$.

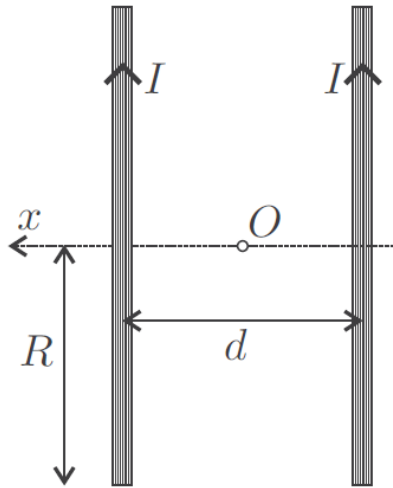
1. Après avoir exprimé le couple des forces magnétiques s'exerçant sur l'aiguille en fonction des paramètres du problème que sont $B = \|\vec{B}\|$, $\mathcal{M}_m = \|\vec{\mathcal{M}}_m\|$ et α , établir l'équation différentielle dont α est solution.

2. En déduire les positions d'équilibre de l'aiguille, et indiquer sans calcul l'équilibre stable.

3. En supposant $\alpha \ll 1$ rad, donner l'expression de $\alpha(t)$ en notant α_0 la valeur maximale de cet angle, en faisant apparaître le rapport $\kappa = \frac{\mathcal{M}_m}{J}$ et en supposant que $\frac{d\alpha}{dt}(t=0) = 0$ rad·s⁻¹.

On cherche à mesurer le rapport κ . Pour cela on mesure la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée placée dans un champ magnétique uniforme connu, créé par des bobines de Helmholtz.

Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines plates, c'est-à-dire d'épaisseurs négligeables, identiques et équidistantes. Chacune d'entre elles comprend N spires circulaires de rayon R , parcourues par le même courant d'intensité I et dont le sens est indiqué sur la figure ci-dessous.



Ces deux bobines sont distantes de $d = R$. L'axe Ox de révolution des spires a pour origine le point O tel que les bobines soient équidistantes de celui-ci. On montre qu'en un point M situé à l'abscisse x , sur l'axe Ox , le champ magnétique $\vec{B}(x)$ créé par les bobines s'écrit :

$$\vec{B}(x) = N\vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{x}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{x}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \quad (1)$$

4. La quantité $B_0 = \|\vec{B}_0\|$ s'exprime en fonction de μ_0 , R et I . Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de B_0 parmi les suivantes :

- a) $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$;
- b) $B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I}$;
- c) $B_0 = \frac{\mu_0 IR}{2}$;
- d) $B_0 = \frac{IR}{2\mu_0}$;

5. Les bobines ont un rayon $R = 15$ cm. On donne le développement limité suivant :

$$\left[1 + \left(X \pm \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[1 \mp \frac{6}{5}X \pm \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4) \right].$$

Dans quelle zone située sur l'axe Ox peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ est inférieure à 2% ? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que $N = 50$ spires et $I = 4$ A.

6. La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée est $T = 0,30$ s. Déterminer l'unité et calculer la valeur numérique du rapport κ pour cette boussole.

Exercice 2 : Le dermographe, machine à tatouer électrique (CCS 2023)

Le dermographe est composé de plusieurs éléments :

- une partie mobile attachée au support via une lame métallique à l'origine d'un couple de rappel ;

- des bobines avec des noyaux ferromagnétiques, générant un champ magnétique.

Il est par ailleurs alimenté par un générateur, généralement contrôlé par le tatoueur via une pédale.

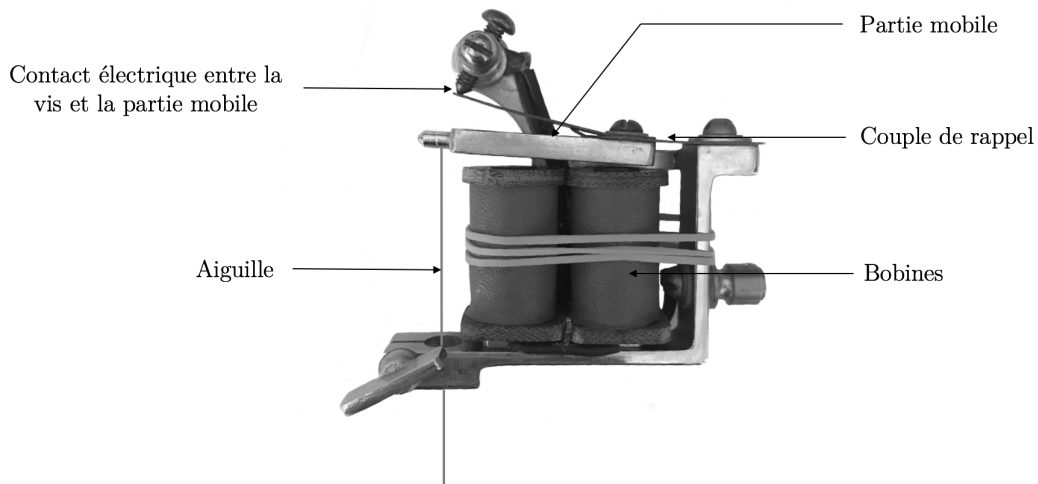


FIGURE 1 – Dermographe

Le principe du dermatographe repose sur l'alternance entre deux phases. Dans un premier temps, la partie mobile est en contact avec la vis. Ce contact permet de fermer le circuit électrique alimenté par le générateur et formé par les bobines, la partie mobile et le support. Si le générateur fonctionne, un courant circule dans le circuit et en particulier dans les bobines. Un champ magnétique est alors créé par les bobines, ce qui génère une force sur la partie mobile, vers le bas.

Dans un second temps, la partie mobile se décolle de la vis de contact, ouvrant le circuit. La force magnétique disparaît et la force de rappel ramène la partie mobile vers la position de contact.

L'aiguille, accrochée à l'extrémité de la partie mobile, aura donc un mouvement périodique de haut en bas et de bas en haut.

Dans la suite, on suppose que la partie mobile se situe toujours dans une zone où le champ peut être considéré comme uniforme.

Afin d'en simplifier l'étude, on s'intéresse à une version modifiée du dermatographe.

On modélise le contact par un arc de cercle conducteur avec lequel la partie mobile peut être en contact via un palet à son extrémité. Au point S ($\theta_S = \pi/60$), l'arc de cercle se termine. On admet que tant que le contact est assuré, la partie mobile est parcourue par un courant d'intensité I et qu'elle se déplace dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, avec $B > 0$. Elle est soumise à un couple de rappel de moment $\vec{\Gamma} = -K\theta\vec{u}_z$.

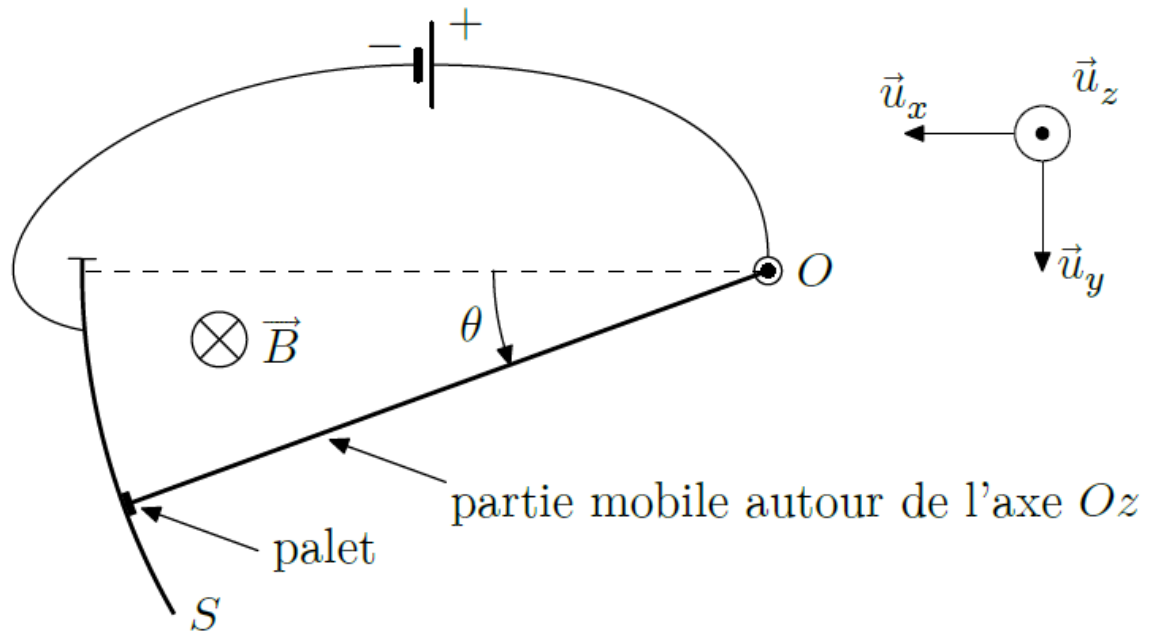


FIGURE 2 – Modélisation simplifiée du dermatographe

Il est rappelé que différentes valeurs numériques utiles sont disponibles en fin d'énoncé.

On suppose que l'action du poids est négligeable devant les autres actions mécaniques et que les forces de frottement sont négligeables devant les autres forces mises en jeu. Par ailleurs, on néglige les effets d'induction liés au mouvement de la partie mobile dans le champ magnétique extérieur.

1. Recopier sur la copie le schéma du dermatographe simplifié en indiquant le sens du courant électrique dans la partie mobile, ainsi que la force s'exerçant sur celle-ci lorsqu'elle est parcourue par un courant. Donner le nom et l'expression de cette force.
2. Initialement ($t = 0^-$), le générateur n'est pas branché et la partie mobile est au repos. Quelle est alors la position de la partie mobile ? Justifier la réponse.
3. On met le générateur sous tension à $t = 0^+$. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur la partie mobile.
4. Montrer que θ satisfait l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A$ et exprimer ω_0 et A en fonction de J , K , I , B et l .
5. Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'expression trouvée pour A .
6. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $\theta(t)$ tant que le contact est assuré.
7. Déterminer l'expression puis la valeur de l'instant t_1 pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur.
On pose $t' = t - t_1$. À $t' = 0$, la partie mobile quitte l'arc conducteur, ce qui annule la force magnétique.
7. Déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par θ . La résoudre pour déterminer $\theta(t')$ tant que le contact est rompu.
8. On admet que la valeur de l'angle maximal atteint par la partie mobile est de $0,096$ rad. En déduire l'amplitude du mouvement de l'aiguille.

9. Parmi les 4 courbes de la figure ci-dessous, choisir, en justifiant, celle représentant θ en fonction du temps. Les courbes ont parfois été tracées en accentuant fortement les caractéristiques : en réalité, les deux phases sont moins différenciées.

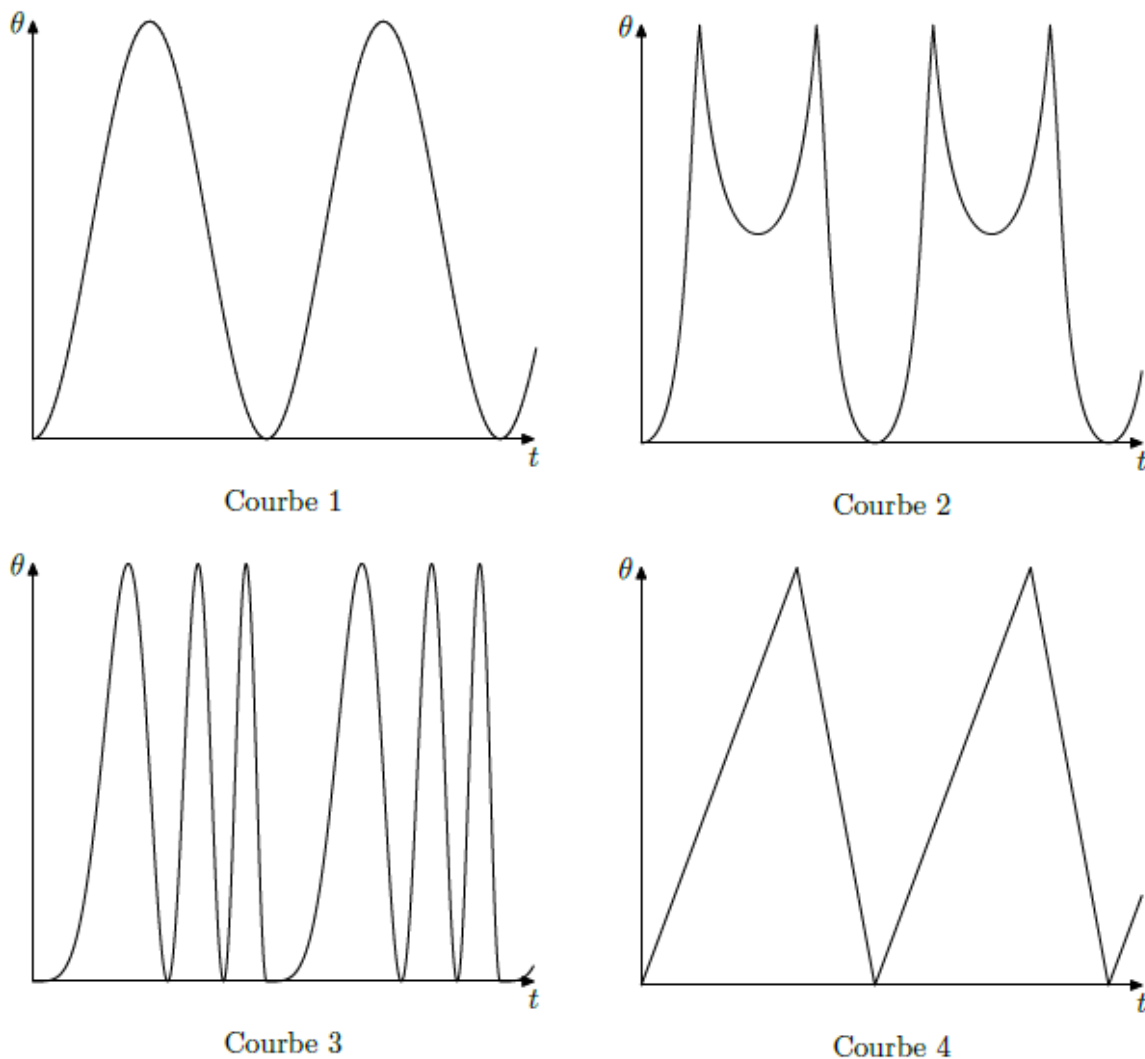


FIGURE 3 – Profils de θ en fonction du temps

Caractéristiques du dermographe :

Longueur de la partie mobile $l = 3 \text{ cm}$;

Moment d'inertie de la partie mobile $J = 2 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$;

Coefficient de rappel $K = 7 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$;

Angle du point extrême de la partie conductrice $\theta_S = \pi/60$.

3 Résolution de problèmes :

RP1 : rails de Laplace dans le champ terrestre

Estimer l'intensité du courant qu'il faudrait faire passer dans un conducteur pour effectuer l'expérience des rails de Laplace avec le champ magnétique terrestre.

RP2 : aimant dans un train (d'après CCS25)

On donne sur la figure ci-dessous une configuration simplifiée de la polarité de trois paires de spires d'un stator permettant de créer un champ magnétique, vues de dessus, et d'un aimant permanent d'un train, en fonction de la position x de l'aimant définie sur le schéma.

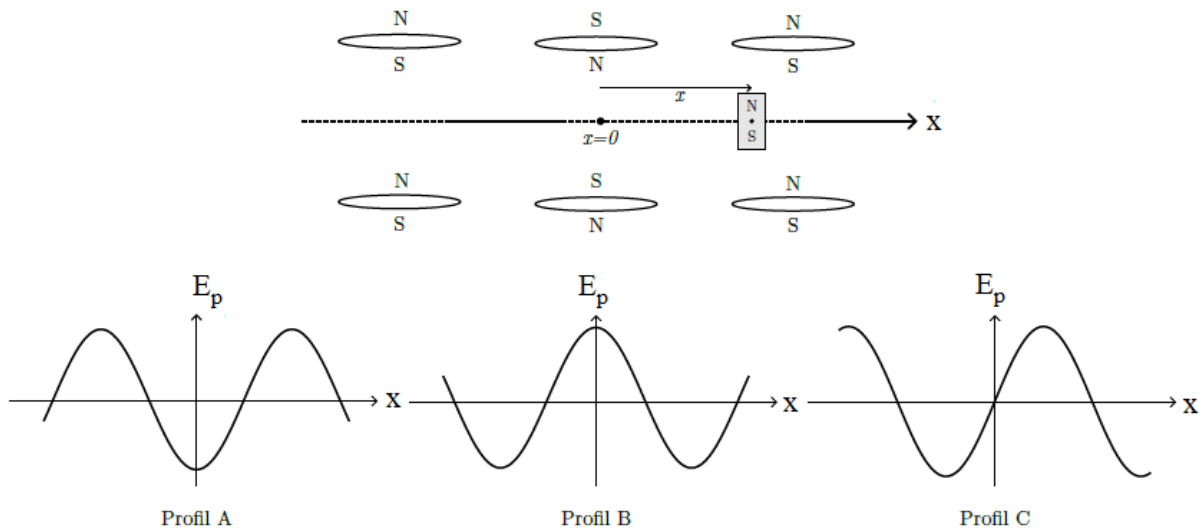


FIGURE 4 – Profils de θ en fonction du temps

1. Identifier, parmi les profils d'énergie potentielle proposés, lequel décrit le mieux l'interaction entre les spires et l'aimant représentés.
2. En vous basant sur le profil choisi, expliquer où positionner l'aimant par rapport aux spires pour obtenir une force maximale sur l'aimant dirigée vers la droite. On pourra répondre par un schéma simple.