# TD28 : Induction électromagnétique

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

▹ *Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.* : TLB1, ex4

▹ *Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan* : TLB2,3,4, ex1,2,3,4

▹ *Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés. Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation* : ex2,4

▹ *Différencier le flux propre des flux extérieurs* : ex1,3

▹ *Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'autoinduction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent* : ex2,3

▹ *Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe, de grande longueur, en influence totale, le champ magnétique créé par une bobine étant donné* : ex5

▹ *Citer des applications de circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante* : ex1,2,3

▹ *Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents* : ex1,3

▹ *Réaliser un bilan de puissance et d'énergie* : ex4

▹ *Établir la loi des tensions pour un transformateur de tension parfait* : ex3,5

▹ *Citer des applications du transformateur de tension pour le transport d'énergie électrique ou l'isolement* : ex3

▹ *Interpréter qualitativement les phénomènes créés lors du mouvement d'une barre sur des rails de Laplace* : ex4

▹ *Établir les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe* : ex4

▹ *Établir et interpréter la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique* : ex4

▹ *Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante* : ex4

▹ *Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation* : ex2,3

# 1 Tester les bases

**TLB1 : Distinction entre champ extérieur et champ induit**

On reprend le dispositif des rails de Laplace fermé par un dipôle terminal de résistance $R = 10\Omega$, très supérieure aux résistance des rails et de la tige mobile.

1. Le dispositif baigne dans deux champs magnétiques : un champ externe $\vec{B}_e$ et un champ induit (ou interne) $\vec{B}_i$. Expliquer brièvement leur origine.

Le but de cet exercice est d'évaluer un ordre de grandeur du rapport $\frac{B_i}{B_e}$.

Pour évaluer $B_i$, on adopte le modèle très simplifié d'un champ au centre d'une spire de rayon $d$, distance entre les rails, de sorte que $B_i = \frac{\mu_0 i}{2d}$, où $i$ est l'intensité du courant induit par le déplacement de la tige.

2. Exprimer $i$ en fonction de l'intensité B du champ total, de la vitesse $v$ de la tige, de $d$ et de R.

3. Exprimer $B_i$ en fonction de B puis en déduire que $\frac{B_i}{B_e} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ où $\alpha = \frac{\mu_0 v}{2R}$.

4. Numériquement, $\alpha = 6 \times 10^{-8}$. Que peut-on en conclure ?

**TLB2 : Flux du champ de vitesse (vers la TSI2)**

1. Rappeler ce qu'on appelle l'échelle mésoscopique et son intérêt.

On appelle **particule fluide** une partie fermée (au sens de la thermodynamique) d'un fluide à l'échelle mésoscopique. On lui attribue un vecteur vitesse local $\vec{v}$ en calculant la vitesse moyenne de toutes les entités de la particule fluide.

On appelle **vitesse eulérienne** en un point la vitesse calculée au cours du temps en prenant à chaque instant la vitesse de la particule fluide qui s'y trouve. On définit alors un champ des vitesses eulériennes.

2. Un turbine doit être actionnée par un fluide en mouvement, qui agit sur ses pâles. On suppose que cette turbine ne fonctionne que dans un sens. Par analogie avec un champ magnétique, définir une surface orientée puis le flux du champ eulérien des vitesses à travers cette surface, en lien avec le fonctionnement de la turbine.

3. Donner l'unité du flux des vitesses eulériennes, et en déduire qu'il s'agit d'un **débit volumique**.

**TLB3 : Unité du flux magnétique**

Donner plusieurs unités équivalentes pour le flux d'un champ magnétique, en vous appuyant sur l'analyse dimensionnelle.

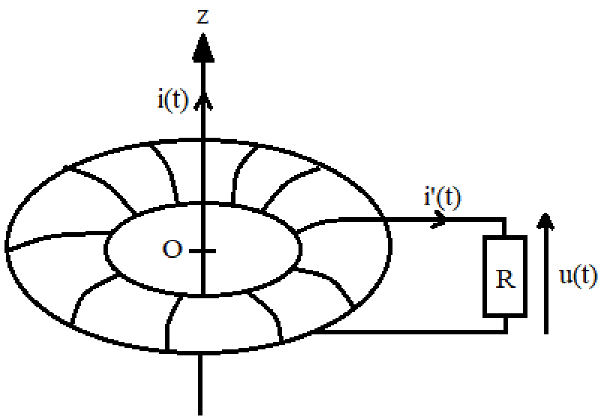
**TLB4 : Maximisation du flux**

1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique externe. Dans le cas d'une spire traversée par un champ magnétique uniforme, réécrire cette énergie potentielle en termes de flux du champ magnétique et de l'intensité du courant qui circule dans la spire.

2. Rappeler la condition pour que le dipôle magnétique se trouve dans une position d'équilibre stable. Donner alors la condition sur le flux pour que ce soit le cas.

# 2 Exercices

**Exercice 1 : Détection ampèremétrique**




Une bobine torique, de rayon moyen R et de section circulaire de rayon $a$, comprend $\mathrm{N}$ spires, suffisamment serrées pour que l'on considère le bobinage continu, donc invariant par rotation autour de l'axe (Oz) du tore. Un dipôle purement résistif est placé entre les bornes du bobinage, sa résistance $\mathrm{R}$ est très supérieure à celle correspondant au bobinage lui-même. Un fil rectiligne infini, situé sur l'axe Oz, est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ imposée.

1. On note $\mathrm{L}$ l'inductance propre du bobinage et $\mathrm{M}$ l'inductance mutuelle entre les deux circuits : fil et bobine. Montrer que l'équation différentielle qui relie la tension $u(t)$, relevée aux bornes du résistor, et l'intensité $i(t)$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{du}{dt} + u = -\mathrm{M}\frac{di}{dt}.$$

2. Déterminer la fonction de transfert du filtre dont la sortie est la tension $u(t)$ et l'entrée l'intensité $i(t)$. En donner les principales caractéristiques en fonction des paramètres du problème.

3. En déduire qualitativement la forme du signal détecté pour différents signaux : $i(t)$ continu, sinusoïdal, échelon. Expliquer alors l'intérêt de ce dispositif.

4. On raisonne dans l'approximation $a \ll R$ (tore de faible section), permettant de considérer le champ magnétique uniforme dans le tore. Déterminer alors l'expression des coefficients d'inductance propre $L$ et mutuelle $M$ :

$$M = \frac{\mu_0 N a^2}{2R},$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2R},$$

Commenter la relation de chacun avec le nombre de spires.

5. Si la bobine a une section carrée de côté $a$, reprendre le calcul de $L$ et $M$ sans faire d'hypothèse concernant les valeurs relatives de $a$ et $R$ et montrer que :

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} a \ln\left(\frac{R + a/2}{R - a/2}\right)$$

et

$$M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} a \ln\left(\frac{R + a/2}{R - a/2}\right).$$

**Exercice 2 : Plaque à induction (CCINP24)**

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés " courants de Foucault ", génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.

Nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.


FIGURE 1 – Plaque à Induction. Source : La physique par les objets quotidiens – Cédric Ray et Jean-Claude Poizat

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon $r_1$ permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et de fréquence $f = 60$ kHz. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$. Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la figure ci-dessous.

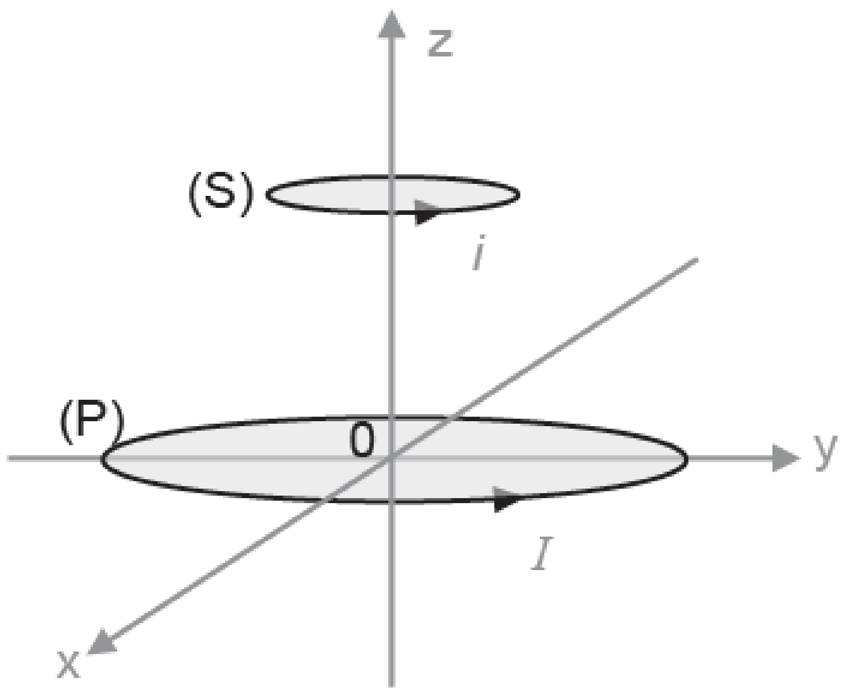



FIGURE 2 – Représentation de la bobine (P) et de la spire (S)

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance $z_0$ de la bobine ;

- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ où $B_0$ est une constante ;

- la spire (S) a une résistance électrique R et son inductance propre est négligée.

1. Déterminer l'expression du flux $\Phi$ du champ magnétique qui traverse la spire (S).
2. En déduire l'expression de la force électromotrice induite $e$ apparaissant dans la spire (S).
3. Déterminer l'expression du courant induit $i(t)$ dans la spire.
4. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $P(t)$ dissipée par effet Joule dans la spire (S).
5. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la puissance moyenne $P_{moy}$ dissipée par effet Joule dans la spire (S) est égale à :

$$P_{moy} = \frac{(\omega B_0 \pi r_2^2)^2}{2R}.$$

6. Par quel phénomène physique l'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule est-elle transmise au contenu de la casserole ?
7. Citer un intérêt d'une plaque à induction par rapport à une plaque de cuisson électrique fonctionnant à l'aide d'une résistance électrique.

8. Déterminer l'ordre de grandeur des longueurs que $r_1$, $r_2$ et $z_0$ ne doivent pas dépasser pour permettre de considérer que l'approximation des régimes quasi-stationnaires est justifiée. Commenter.

**Exercice 3 : Transformateur torique (CCINP18)**

On étudie un modèle simplifié de transformateur schématisé sur la figure ci-dessous. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R. On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r;\vec{e}_\theta;\vec{e}_z)$ illustrée pour un point M quelconque sur le schéma.

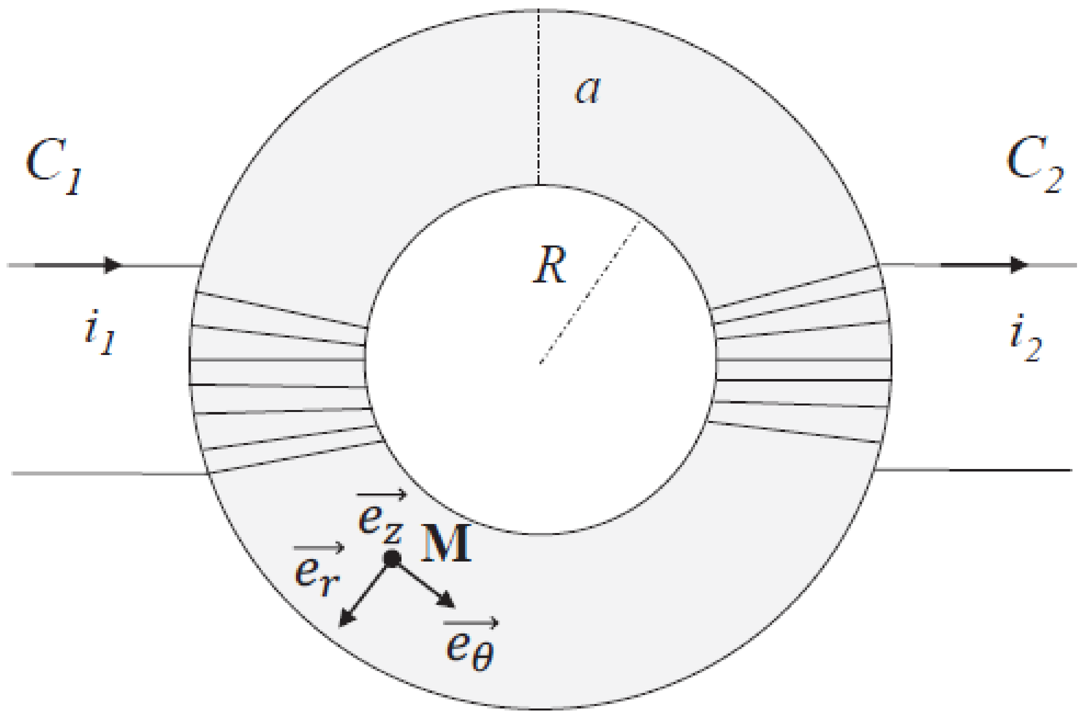



FIGURE 3 – Vue du dessus du transformateur

Le bobinage dit primaire noté $C_1$ est enroulé en $N_1$ spires autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité $i_1$. Le bobinage dit secondaire noté $C_2$ est, de la même manière, enroulé en $N_2$ spires autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité $i_2$. On notera $\mu_0$ la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$.

Le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le circuit $C_1$ en tout point à l'intérieur du tore est donné par :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r}\vec{e}_\theta.$$

1. Établir l'expression du flux magnétique $\phi$ du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers une spire du circuit $C_1$.
2. En déduire le flux total $\Phi$ au travers des $N_1$ spires du circuit $C_1$.
3. Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance).
4. En déduire que l'inductance propre $L_1$ du circuit $C_1$ est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

5. Quelle est alors l'expression de l'inductance propre $L_2$ du circuit $C_2$ ?

6. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M.

7. Démontrer que ce coefficient M est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

8. La résistance des bobinages étant négligée, exprimer la tension $u_1$ aux bornes du primaire en fonction des dérivées par rapport au temps de $i_1$ et $i_2$ et des coefficients $L_1$ et M.

9. Faire de même pour la tension $u_2$ aux bornes du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de $i_1$ et $i_2$ et des coefficients $L_2$ et M.

10. En déduire que l'on a la relation suivante :

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}.$$

11. Prouver que cette relation se simplifie pour faire apparaître ce que l'on appelle le rapport de transformation, défini comme le rapport des tensions du secondaire et du primaire :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

12. Expliquer alors comment les transformateurs constituent des éléments centraux de la chaîne de transport de l'électricité.

13. Que peut-on dire du rendement en puissance entre primaire et secondaire ?

14. Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.

15. Quel peut être l'intérêt d'utiliser un transformateur si les circuits primaire et secondaire comportent le même nombre de spires ?

16. Technologiquement, les matériaux magnétiques des transformateurs sont réalisés en accolant des feuillets en acier. Quel type de pertes cherche-t-on ainsi à éviter ?

## Exercice 4 : Un modèle simplifié de génératrice linéaire : les rails de Laplace (CCS22)

Un moteur Stirling fournit de la puissance mécanique sous la forme d'un mouvement linéaire de piston. Pour utiliser cette puissance, on la convertit en électricité. Pour cela, une génératrice linéaire est utilisée. Un modèle très simplifié de cette conversion d'énergie est celui des rails de Laplace.

### A – Présentation du système

On considère le dispositif des rails de Laplace représenté figure A ci-dessous.
Il est constitué de :
- deux rails fixes conducteurs parallèles distants de L ;
- une barre conductrice rectiligne mobile MN de masse $m$, pouvant se déplacer suivant la direction des deux rails fixes. Les frottements sont négligés.

L'ensemble forme un circuit déformable, plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ stationnaire et uniforme.

On considère que le circuit ainsi formé possède une résistance électrique totale R. La tige est initialement immobile.

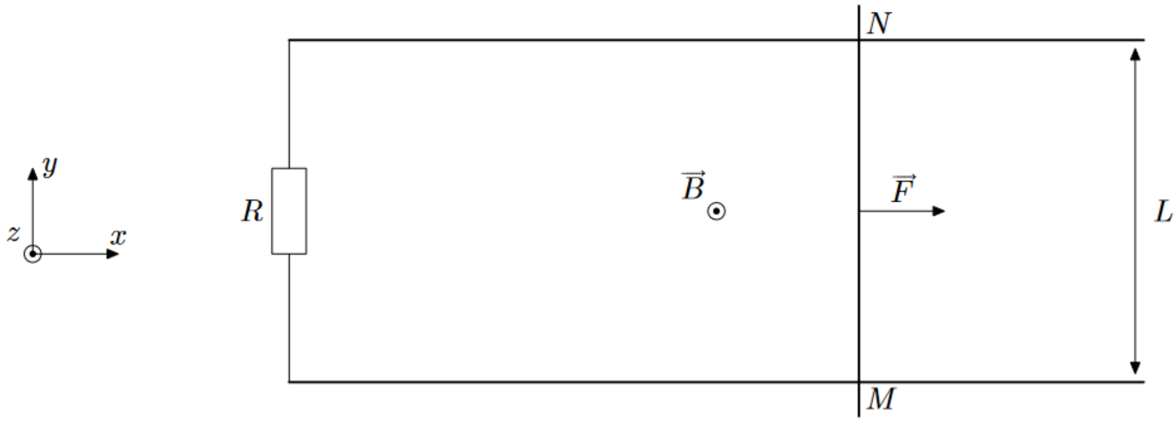



**Figure A** Schéma de l'expérience des rails de Laplace

On néglige tout phénomène d'auto-induction.

À partir de $t = 0$, un opérateur extérieur applique à la barre une force $\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{F}\vec{e}_x$ constante sur la tige initialement immobile. On repère la position de la tige par son abscisse $x$.

1. Prévoir qualitativement l'évolution de la vitesse de la tige.
2. Donner l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur une barre conductrice $\mathrm{MN}$ parcourue par un courant $i$ dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.
3. On suppose la tige en mouvement, compléter le schéma de la figure A en représentant la force électromotrice d'induction $e(t)$, le courant ainsi que la force de Laplace. On ne cherchera pas à donner les valeurs de ces grandeurs pour le moment.

B – Étude temporelle

4. Donner l'expression de la force électromotrice d'induction $e(t)$ en fonction de $v(t)$, $\mathrm{L}$ et $\mathrm{B}$.
5. Donner l'équation électrique du système liant $e(t)$, $i(t)$ et les paramètres du problème.
6. Donner l'équation mécanique du système liant $v(t)$, $\mathrm{F}$, $i(t)$ et les paramètres du problème.
7. Déduire des équations précédentes une équation différentielle sur $v(t)$.
8. En déduire la dimension de $\frac{\mathrm{R}m}{\mathrm{B}^2\mathrm{L}^2}$.
9. Résoudre cette équation différentielle et puis tracer v(t) en fonction du temps. On fera apparaitre sur le graphe le temps caractéristique $\tau$ du problème. Ces résultats sont-ils en accord avec la prédiction de la question 1 ?

C – Bilan de puissance

10. Exprimer la puissance de la force de Laplace $\mathrm{P_L}$.
11. Donner l'expression de la puissance dissipée par effet Joule $\mathrm{P_J}$ en fonction de $i(t)$, $\mathrm{L}$, $\mathrm{B}$ et $v(t)$, puis en fonction de la puissance de la force de Laplace $\mathrm{P_L}$. Interpréter cette relation.
12. Donner l'expression de la puissance fournie par l'opérateur extérieur $\mathrm{P_{op}}$ en fonction de $\mathrm{F}$ et $v(t)$.
13. À partir de l'équation mécanique, effectuer un bilan de puissance global et interpréter chacun des termes.

**Exercice 5 : Inductance propre et inductance mutuelle entre deux circuits (CCS25)**

On cherche à établir quelques résultats utiles en considérant deux solénoïdes cylindriques coaxiaux $S_a$ et $S_b$, de même longueur $l$, de rayons respectifs $r_a$ et $r_b$, comportant respectivement $N_a$ et $N_b$ spires. $S_a$ et $S_b$ sont parcourus par des courants notés respectivement $i_a$ et $i_b$ et orientés comme indiqué sur la figure ci-dessous. On admet que les effets de bord sont négligeables, ce qui revient à considérer que $S_a$ et $S_b$ se comportent comme des solénoïdes infinis. L'ensemble baigne dans l'air assimilé à du vide de perméabilité magnétique $\mu_0$.

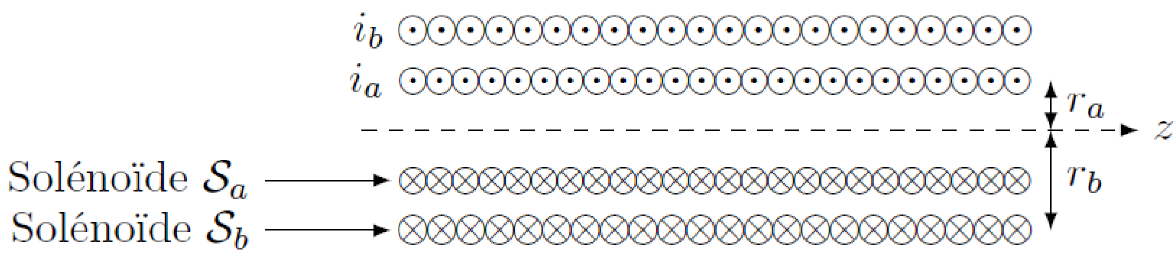



FIGURE 4 – Schéma en coupe des solénoïdes coaxiaux

On admet que le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant $i$ s'écrit $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ avec $n$ le nombre de spires par unité de longueur, et que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

1. Rappeler la définition générale de l'inductance propre $L$ d'un circuit et de l'inductance mutuelle $M$ entre deux circuits.
2. Établir l'expression des inductances propres $L_a$ et $L_b$ des solénoïdes $S_a$ et $S_b$ en fonction de $N_a$, $N_b$, $r_a$, $r_b$, $\mu_0$ et $l$.
3. En admettant qu'il n'y a aucune forme de perte magnétique, établir l'expression de l'inductance mutuelle $M$ entre les solénoïdes $S_a$ et $S_b$.
4. Montrer que l'on a $M = k\sqrt{L_a L_b}$ en donnant l'expression de $k$ en fonction de $r_a$ et $r_b$.

On considère pour la suite le cas où $r_a = r_b$ pour lequel $k = 1$.

5. Montrer que

$$\frac{L_a}{N_a^2} = \frac{L_b}{N_b^2}.$$

Les deux solénoïdes $S_a$ et $S_b$ forment le primaire et le secondaire d'un transformateur. On note $u_a(t)$ la tension aux bornes du primaire et $u_b(t)$ la tension aux bornes du secondaire. Les deux tensions sont orientées en convention récepteur.

6. En écrivant les équations électriques pour le primaire et le secondaire, montrer que

$$\frac{u_a(t)}{N_a} = \frac{u_b(t)}{N_b}.$$