CHAPITRE 8

Circuits électriques linéaires du premier ordre

Suite à l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur dans un circuit électrique en régime stationnaire, les **tensions** et **intensités** varient. Il leur faut un certain temps pour atteindre un nouveau régime stationnaire qualifié de **régime permanent**. Dans ce chapitre, nous allons apprendre à caractériser le **régime transitoire** qui précède l'établissement de ce régime permanent.

On classe les régimes transitoires selon deux critères :

▷ les contraintes extérieures : en l'absence de générateur, un circuit est en **régime libre**. Si un générateur de tension continue est allumé brusquement, on considère que le circuit est soumis à un **échelon de tension** ;

▷ l'**ordre** du circuit, un nombre entier naturel que nous apprendrons à déterminer. Il dépend des composants présents dans le circuit et de la façon dont ils sont reliés entre eux. Les circuits de même ordre se comportent tous qualitativement de la même façon.

Dans ce chapitre, nous limiterons notre étude aux circuits du **premier ordre**, en régime libre ou soumis à un échelon de tension.

L'étude se fera dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi-stationnaires**.

1 Condensateurs et bobines

Les **condensateurs** et les **bobines** sont des **dipôles** très courants dans les circuits en régime variable. Les circuits du premier ordre comportent soit l'un, soit l'autre.

1.1 Condensateur

En disposant deux armatures conductrices en face l'une de l'autre, séparées par un milieu diélectrique (isolant), on obtient un dipôle électrique appelé **condensateur**.

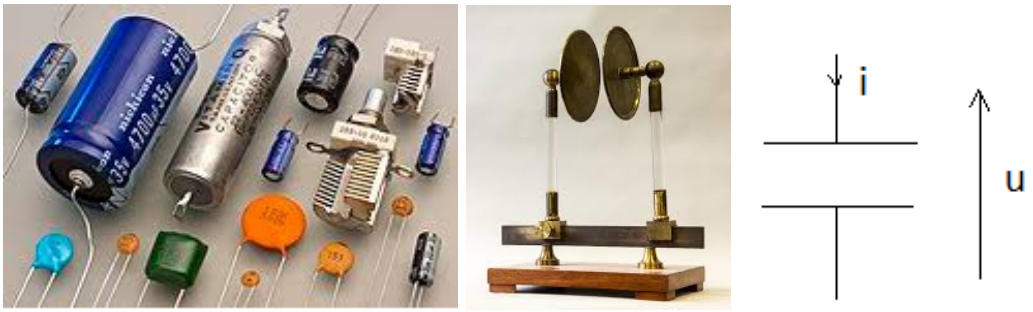


FIGURE 1 – De gauche à droite : photographie de condensateurs ; photographie d'un condensateur d'Aepinus (avec de grandes armatures circulaires) ; symbole d'un condensateur idéal (en convention récepteur ici)

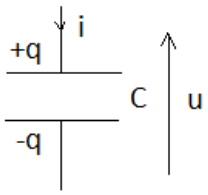
Comme le milieu entre les armatures est isolant, des charges électriques s'accumulent sur l'armature vers laquelle est dirigée le courant électrique. La conservation de la charge électrique totale et l'approximation des régimes quasi-stationnaires impliquent que la charge $+q$ portée par la première armature se trouve en regard d'une

charge $-q$ sur la seconde armature, au sens où on a retiré à cette dernière une charge q par rapport à la situation initiale.

L'expérience montre que la charge q portée par la première armature est proportionnelle à la tension u aux bornes du condensateur :

$$q = \mathrm{C}u$$

en respectant la convention suivante :



La constante de proportionnalité entre la tension u aux bornes du condensateur et la charge q, notée C, est la **capacité** du condensateur. Cette grandeur physique s'exprime en farad, de symbole F, avec $1\mathrm{F} = 1\mathrm{C} \cdot \mathrm{V}^{-1}$ (coulomb par volt).

Les valeurs typiques de la capacité d'un condensateur s'étalent sur de nombreux ordres de grandeur, de quelques picofarads ($1\mathrm{pF} = 10^{-12}\mathrm{F}$) pour des condensateurs millimétriques, à quelques kilofarads pour alimenter des véhicules électriques.

La **loi de comportement** (ou **relation constitutive**) d'un condensateur idéal en convention récepteur découle de la relation précédente, dérivée par rapport au temps :

$$i = \mathrm{C}\frac{du}{dt}.$$

Lorsque le condensateur est déchargé ($q = 0$), la tension à ses bornes est nulle, et quand il se charge ($i > 0$ en convention récepteur), la tension $u(t)$ entre ses bornes augmente. C'est une fonction continue de la variable temps, car la charge l'est également à l'échelle macroscopique.

L'**énergie électrostatique stockée** par accumulation de charges sur la première armature suite à la **charge** d'un condensateur vaut

$$\mathrm{E}_e = \frac{1}{2}\mathrm{C}u^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\mathrm{C}}.$$

Le condensateur peut transmettre cette énergie aux autres dipôles en libérant des charges dans le fil au-dessus de l'armature positive lors d'une phase de **décharge**, ce qui délivre un courant électrique. Le condensateur se comporte alors comme un générateur de tension ou une pile ($i < 0$ en convention récepteur), à ceci près que la tension à ses bornes diminue progressivement.

Exercice d'application 1 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Utiliser la relation entre l'intensité et la tension.
Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur.
Interpréter la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

1. En travaux pratiques, un condensateur de capacité $\mathrm{C} = 1{,}0\ \mu\mathrm{F}$ a une tension $u = 12{,}0\ \mathrm{V}$ entre ses bornes. Calculer la charge électrique stockée sur sa première armature et en déduire le nombre d'électrons qu'il peut restituer lors de sa décharge. On rappelle la valeur de la charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

2. Rappeler l'expression de la puissance électrique p reçue par un dipôle en convention récepteur, en fonction de la tension u et de l'intensité i. Justifier alors que pour un condensateur cette puissance a pour expression $p = \mathrm{C}u\frac{du}{dt}$. Justifier que l'on peut mettre cette expression sous la forme d'une dérivée : $p = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}u^2\right)$.

3. Si un condensateur reçoit de la puissance électrique, il stocke de l'énergie électrostatique. Cette dernière vérifie la relation $\frac{d\mathrm{E}_e}{dt} = p$. En déduire l'expression de l'énergie E_e stockée dans un condensateur, en prenant pour convention $\mathrm{E}_e = 0$ lorsque le condensateur est déchargé. Calculer l'énergie électrique stockée dans le condensateur considéré dans la question 1.

4. Justifier que l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur est une fonction continue de la variable temps, et que la tension à ses bornes l'est également.

5. Dans un condensateur réel, l'isolant entre les armatures n'est pas parfait. Proposer un modèle électrocinétique pour un condensateur réel.

1.2 Bobine

Un enroulement de fil conducteur permet d'obtenir un dipôle appelé **bobine**. Il est souvent en forme de cylindre, on le qualifie alors de **solénoïde**.

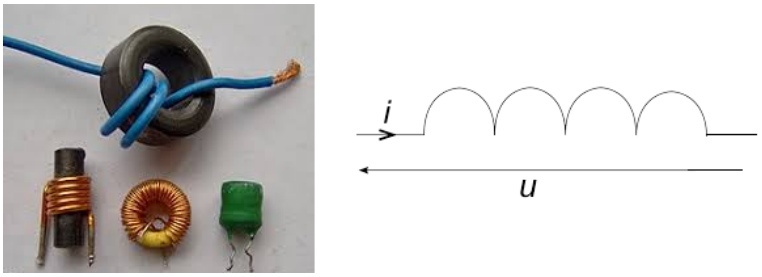


FIGURE 2 – Gauche : photographie de bobines ; droite : symbole d'une bobine idéale (en convention récepteur ici)

La loi de comportement d'une bobine idéale en convention récepteur est

$$u = \mathrm{L}\frac{di}{dt}.$$

La constante de proportionnalité entre la dérivée temporelle $\frac{di}{dt}$ de l'intensité du courant qui traverse la bobine et la tension u à ses bornes est l'**inductance (propre) de la bobine**, notée L. Cette grandeur physique s'exprime en henry, de symbole H, avec $1\mathrm{H} = 1\mathrm{V}\cdot s\cdot\mathrm{A}^{-1}$.

Des valeurs typiques d'inductance d'une bobine sont de l'ordre de $1\mu\mathrm{H}$ à $1\mathrm{H}$.

De l'énergie (magnétique) est stockée dans une bobine par **établissement du courant** dans cette dernière :

$$\mathrm{E}_m = \frac{1}{2}\mathrm{L}i^2.$$

Lors de la restitution de cette énergie, une bobine idéale peut se comporter comme un générateur de courant idéal ($i < 0$ en convention récepteur), à ceci près que l'intensité du courant délivré diminue progressivement.

L'intensité du courant qui traverse la bobine est une fonction continue de la variable temps.

Exercice d'application 2 :

CAPACITÉS TRAVAILLÉES :

Utiliser la relation entre l'intensité et la tension.

Exprimer l'énergie stockée dans une bobine.

Interpréter la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine.

1. Rappeler l'expression de la puissance électrique p reçue par un dipôle en convention récepteur. Montrer que pour une bobine idéale $p = \mathrm{L}i\frac{di}{dt}$.

2. En déduire l'expression de l'énergie E_m stockée dans une bobine, en prenant pour convention $\mathrm{E}_m = 0$ lorsque la bobine n'est pas parcourue par un courant. Une bobine d'inductance $\mathrm{L} = 1{,}0$ mH est parcourue par un courant d'intensité $\mathrm{I} = 500$ mA. Calculer l'énergie stockée dans cette bobine.

3. Expliquer pourquoi l'énergie stockée dans une bobine est une fonction continue de la variable temps, et en déduire que l'intensité du courant qui la traverse est également une fonction continue de la variable temps.

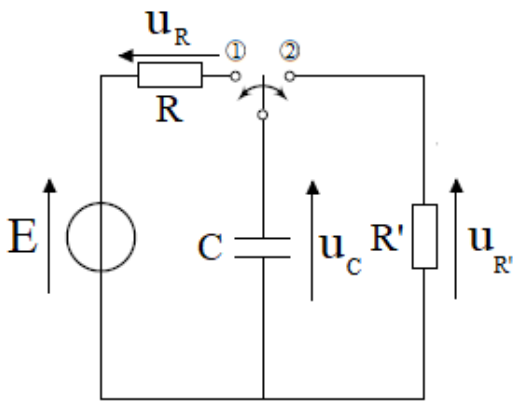
4. Identifier un phénomène physique qui a lieu dans la bobine et n'est pas pris en compte dans le modèle de la bobine idéale. Proposer alors un modèle électrocinétique pour une bobine réelle.

2 Circuit RC

Le circuit RC et le circuit RL sont au programme. Ce cours présente en détail le circuit RC, l'étude du circuit RL peut se faire par analogie en utilisant les résultats de la partie précédente concernant la bobine.

2.1 Cadre de l'étude

Pour se familiariser avec le condensateur, on étudie le circuit schématisé ci-dessous.

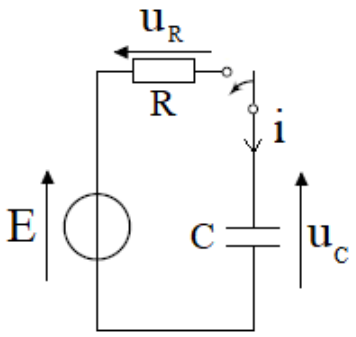


Le condensateur est initialement déchargé, l'interrupteur est ouvert.

2.2 Charge du condensateur

À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 1, ce qui ferme la maille de gauche du circuit. Cela revient à brancher soudainement le générateur. On considère pour simplifier que sa tension passe de 0 à E instantanément à l'instant $t = 0$: le circuit RC est soumis à un **échelon de tension**.

Qualitativement, le condensateur se **charge** progressivement en accumulant des charges électriques sur ses armatures. Cela revient à étudier le circuit ci-dessous, où l'interrupteur se ferme à l'instant $t = 0$:



La grandeur physique qui nous intéresse ici est la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur. On la visualise sur l'écran d'un oscilloscope.

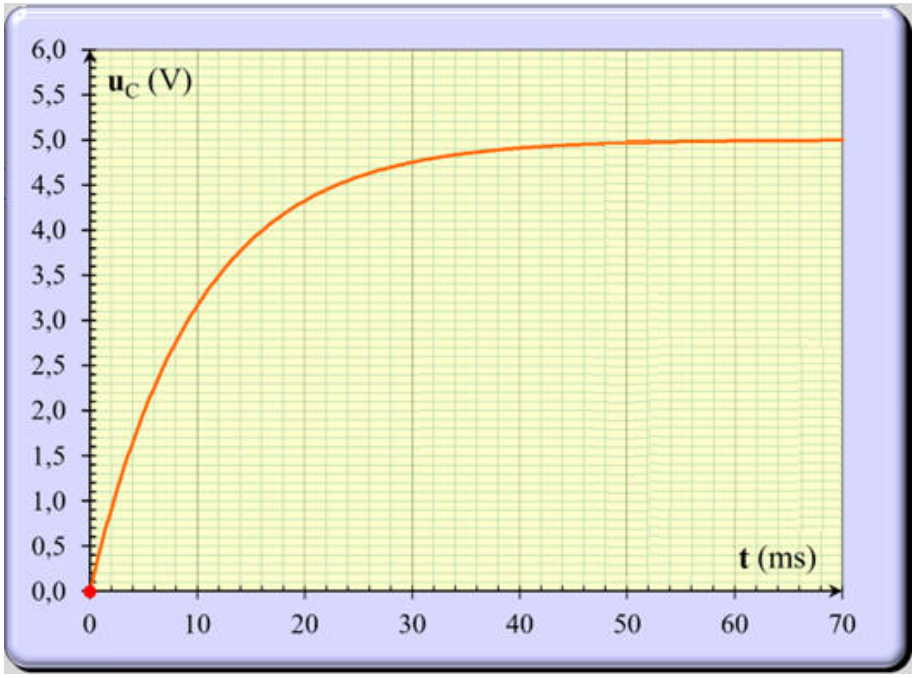


FIGURE 3 – Exemple d'oscillogramme observé sur l'écran de l'oscilloscope pendant la charge du condensateur

2.2.1 Étude qualitative

Exercice d'application 3 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Distinguer sur un relevé expérimental, le régime transitoire et le régime permanent d'un signal à la sortie d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
Utiliser un modèle équivalent aux dipôles pour déterminer les grandeurs électriques en régime permanent.
Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

1. Sur l'oscillogramme de la figure 3, identifier le régime transitoire et le régime permanent.
2. Avant fermeture de l'interrupteur, pour $t < 0$, déterminer les valeurs de u_C, i et u_R.
3. À l'instant $t = 0^+$, autrement dit directement après la fermeture de l'interrupteur, donner en justifiant les valeurs de u_C, u_R et i.
4. En régime permanent, pour $t \to +\infty$, déterminer les valeurs de i et u_R, montrer que $u_C = E$ et déterminer sa valeur. En déduire un modèle électrique équivalent au condensateur en régime permanent.

2.2.2 Étude quantitative

Afin de d'étudier toute la dynamique du circuit RC (et donc de connaître $u_C(t)$ à chaque instant), on met en équation le circuit électrique.

Exercice d'application 4 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une maille.

1. En appliquant la loi des mailles au circuit RC soumis à un échelon de tension, montrer que pendant la charge du condensateur la tension $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}.$$

2. On pose $\tau = RC$. En raisonnant sur l'équation différentielle, justifier que la grandeur physique notée τ est homogène à un temps (autrement dit, que son unité est la seconde).

On pose à présent $u_\infty = \lim_{t\to+\infty} u_c(t)$. On a alors $u_\infty = E$, de sorte que $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}.$$

Cette situation est très courante : l'application des lois de la physique ne donne pas directement l'évolution temporelle de la grandeur d'intérêt (ici, le signal $u_C(t)$), mais aboutit à une équation où cette grandeur apparaît, ainsi qu'une ou plusieurs de ses dérivées, et dont elle constitue l'inconnue en tant que fonction (ici de la variable temps). Il s'agit d'une **équation différentielle**.
Cette équation différentielle, comme il est d'usage, a été mise sous une **forme canonique**, autrement dit une forme standard dans laquelle les paramètres qui décrivent

la situation physique (ici R, C et E) n'apparaissent plus explicitement. L'intérêt de cette mise sous forme canonique est triple :

▷ elle est plus pratique à utiliser car elle fait intervenir moins de symboles ;

▷ on y voit explicitement à quelle type de grandeur physique les coefficients sont homogènes ;

▷ des systèmes potentiellement très différents et provenant de domaines de la physique très variés sont décrits par la même équation différentielle sous forme canonique, ce qui permet d'appliquer les mêmes méthodes mathématiques pour les traiter et de mettre en évidence des analogies.

Les mathématiciens ont introduit du vocabulaire pour décrire et classifier les équations différentielles. Celle qui nous intéresse ici est :

— **du premier ordre** : la dérivée d'ordre le plus élevée est d'ordre 1 ;
— **linéaire** : la fonction inconnue $u_C(t)$ n'y intervient que sous la forme de ses dérivées successives, elles n'y sont pas composées par d'autres fonctions (carré, racine carrée, cosinus, etc.) ;
— **à coefficients constants** : les coefficients n'y sont pas des fonctions de la variable (temps), mais des constantes ;
— **avec second membre constant** : à droite du signe =, tout ce qui ne dépend ni de la fonction inconnue ni de ses dérivées est indépendant de la variable.

On souhaite à présent résoudre l'équation différentielle

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$$

afin d'obtenir la fonction de la variable temps $u_C(t)$, pour le moment inconnue.

En pratique, on sait résoudre très peu d'équations différentielles de façon exacte. C'est la raison pour laquelle on procède souvent à des résolutions numériques approchées, avec un logiciel ou un langage de programmation.

Ici, la **méthode d'Euler** ou l'utilisation de la **fonction odeint** de la **bibliothèque scipy.integrate** en langage Python s'avèrent très efficaces pour obtenir une représentation graphique de la fonction $u_C(t)$ (voir AP).

On souhaite à présent résoudre explicitement l'équation différentielle afin de trouver l'expression mathématique exacte de $u_C(t)$, ce qui est possible dans le cas présent. Parmi les nombreuses méthodes qui existent pour résoudre une équation différentielle, la plus simple à mettre en œuvre consiste à deviner l'expression mathématique de la solution $u_C(t)$ et à vérifier qu'elle fonctionne.

Exercice d'application 5 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un échelon de tension.
Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire.

1. Vérifier que la fonction

$$u_C(t) = u_\infty + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A une constante appelée **constante d'intégration**, est solution de l'équation dif-

férentielle

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}.$$

Pour ce faire, on calculera $\frac{du_C}{dt}$ puis $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau}$ et on comparera au membre de droite. On rappelle que $\frac{d}{dt}(e^{at}) = ae^{at}$, où a est une constante quelconque.

2. Justifier qu'on peut interpréter cette solution de la façon suivante : c'est la somme d'une solution $u_h(t)$ de l'équation différentielle **homogène** associée à celle qu'on souhaite résoudre (autrement dit, la même mais avec un second membre nul) et d'une solution particulière $u_p(t)$ de l'équation différentielle globale. Vous identifierez explicitement $u_h(t)$ et $u_p(t)$.

Une équation différentielle n'est complètement résolue que lorsqu'on a trouvé la valeur de la constante d'intégration (ici, A). Pour l'obtenir, il suffit de connaître la valeur de $u_C(t)$ à un instant particulier.

3. Déterminer la valeur $u_C(0^-)$ de la fonction u_C à l'instant $t = 0^-$ qui précède directement la fermeture de l'interrupteur.

4. On note $u_C(0^+)$ la valeur de la fonction u_C à l'instant $t = 0^+$ qui suit directement la fermeture de l'interrupteur. Justifier que $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ et en déduire sa valeur.

5. En utilisant la valeur de $u_C(t)$ à l'instant $t = 0$, montrer que l'évolution temporelle de la tension aux bornes d'un condensateur initialement déchargé dans un circuit RC soumis à un échelon de tension est de la forme

$$u_C(t) = \mathrm{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Prenons à présent le temps de vérifier que cette solution est en accord avec l'analyse qualitative effectuée plus haut.

5. En utilisant le **développement limité à l'ordre 1** de la fonction exponentielle au voisinage de 0, $e^x \simeq 1 + x$ pour $x \ll 1$, trouver l'équation de la **tangente à l'origine**, autrement dit de la fonction affine qui modélise le mieux la fonction $u_C(t)$ au voisinage immédiat de l'instant $t = 0$.

6. En utilisant une limite connue de la fonction exponentielle, montrer que $u_C(t) \to \mathrm{E}$ quand $t \to +\infty$. C'est l'équation de l'**asymptote** aux temps longs, autrement dit de la fonction affine qui est la plus proche de la fonction $u_C(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

7. Montrer que la tangente à l'origine et l'asymptote horizontale se croisent en un point d'abscisse $t = \tau$. Déterminer graphiquement la valeur de ce temps caractéristique sur la courbe expérimentale.

8. En déduire un protocole pour mesurer la capacité C d'un condensateur. Calculer la capacité du condensateur utilisé ici, sachant que $\mathrm{R} = 2200\Omega$.

La connaissance de la solution exacte permet d'affiner encore notre compréhension de la constante de temps τ.

9. Calculer $u_C(\tau)$. Commenter.

10. Calculer $u_C(3\tau)$ puis expliquer pourquoi on parle alors de "**temps de montée à** 95%". En déduire un protocole expérimental pour mesurer la constante de temps τ.

11. En physique, on considère souvent que le régime transitoire a une durée de l'ordre de 5τ, et qu'on est ensuite en régime permanent. Par un calcul, justifier pourquoi c'est le cas. Évaluer alors la durée du régime transitoire dans l'étude expérimentale de la charge du condensateur ci-dessus.

On retiendra que pour mesurer la constante de temps τ graphiquement sur la courbe de charge d'un condensateur initialement déchargé dans un circuit RC, on dispose de deux méthodes :

▷ déterminer par une lecture d'antécédant au bout de combien de temps la tension u_C atteint 63% de sa valeur maximale ;

▷ construire la tangente à l'origine et l'asymptote horizontale aux temps longs puis déterminer l'abscisse de leur intersection.

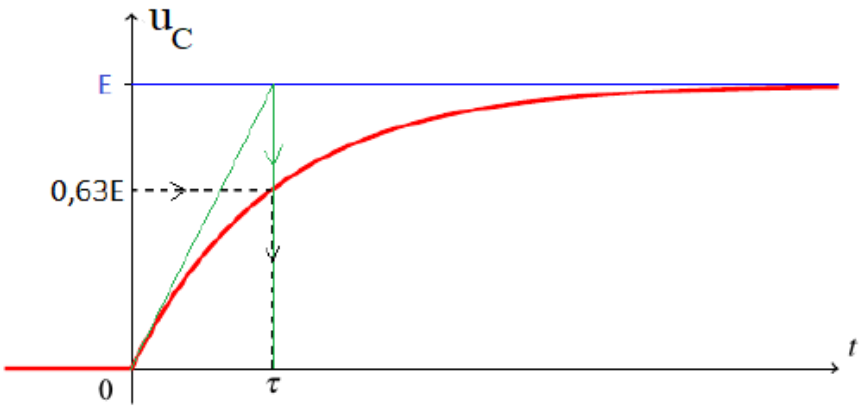


FIGURE 4 – Illustration des deux méthodes pour déterminer graphiquement la constante de temps τ lors de la charge d'un condensateur initialement déchargé dans un circuit RC

Enfin, on s'intéresse à l'évolution temporelle de l'intensité, notée $i(t)$.

12. Rappeler la valeur de $i(0^-)$.

13. En vous appuyant sur ce qui précède et sur la loi de comportement du condensateur, déterminer l'expression mathématique de $i(t)$. Représenter graphiquement $i(t)$ et commenter.

2.3 Stockage et dissipation d'énergie

L'étude dynamique ci-dessus s'appuie sur la loi des mailles. Comme souvent en physique, une **étude énergétique** apporte un nouvel éclairage.

Exercice d'application 6 :
CAPACITÉ TRAVAILLÉE :
Réaliser un bilan énergétique.

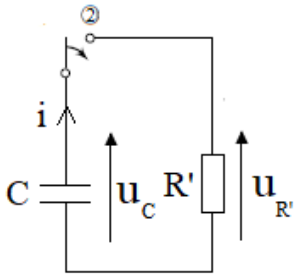
1. Rappeler l'expression qui lie E, $\mathrm{u_C}$ et $\mathrm{u_R}$. La multiplier par i, puis expliquer ce que représente alors chaque terme.

2. Intégrer l'expression obtenue sur toute la durée de la charge (de $t = 0$ à $t \to +\infty$) pour obtenir un bilan énergétique. En déduire que l'énergie fournie par le générateur au circuit durant la charge vaut $\mathrm{E_G} = \mathrm{CE}^2$, que celle reçue par la résistance et dissipée par effet Joule vaut $\mathrm{E_J} = \frac{1}{2}\mathrm{CE}^2$ et que celle reçue par le condensateur et stockée dans ce dernier vaut $\mathrm{E}_e = \frac{1}{2}\mathrm{CE}^2$.

3. Définir le **rendement** η (lettre grecque "êta") de la charge du condensateur et calculer sa valeur.

2.4 Décharge du condensateur

Une fois le régime permanent atteint, on bascule l'interrupteur en position 2. Le circuit considéré est donc équivalent à celui représenté ci-dessous :



Le condensateur, initialement chargé, se décharge peu à peu. On a choisi la **convention générateur** pour le condensateur. La nouvelle origine des temps est l'instant où l'interrupteur bascule en position 2. On considère qu'à l'instant $t = 0^-$, la tension aux bornes du condensateur valait $u_C(t = 0^-) = E$. Comme il n'y a pas de générateur dans le circuit, il est en **régime libre**. On s'intéresse à l'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lors de la phase de **décharge**.

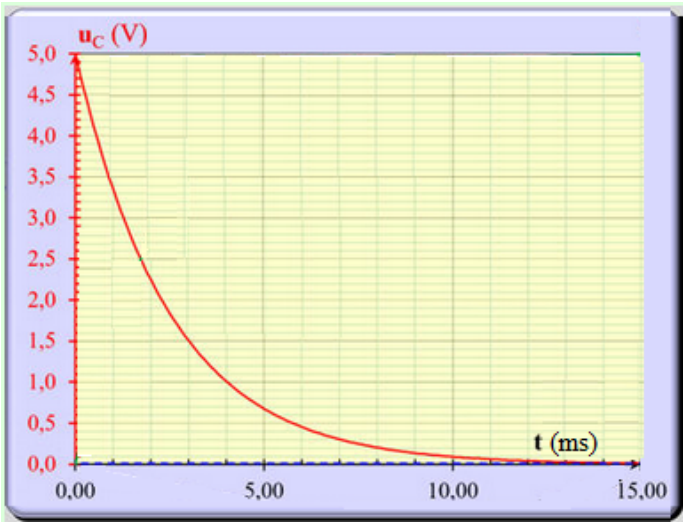


FIGURE 5 – Oscillogramme observé pendant la décharge du condensateur

Exercice d'application 7 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Utiliser un modèle équivalent aux dipôles pour déterminer les grandeurs électriques en régime permanent.
Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur
Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une maille.
Identifier l'ordre d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et la mettre sous forme canonique.

1. Donner les valeurs de $u_C(0^-)$, $i(0^-)$ et $u_{R'}(0^-)$ juste avant la fermeture de l'interrupteur.

2. Donner en justifiant les valeurs de $u_C(0^+)$, $u_{R'}(0^+)$ et $i(0^+)$.

3. En régime permanent, après décharge complète du condensateur, déterminer les valeurs de $i(\infty)$, $u_{R'}(+\infty)$ et $u_C(+\infty)$. On pourra s'appuyer sur un modèle équivalent au condensateur en régime permanent.

4. En appliquant la loi des mailles, montrer que lors de la décharge du condensateur, la tension $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R'C} = 0.$$

5. Identifier l'ordre de cette équation différentielle. Introduire un temps caractéristique τ pour la mettre sous forme canonique.

Lors de la décharge d'un condensateur, l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et **homogène**.

On souhaite à présent résoudre explicitement l'équation différentielle afin de trouver l'expression mathématique exacte de $u_C(t)$.

Exercice d'application 8 :
CAPACITÉS TRAVAILLÉES :
Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre.
Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire.

1. Vérifier que la solution de l'équation différentielle est de la forme $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, où A est une constante.

2. En utilisant la valeur de u_C à l'instant $t = 0$, montrer que :

$$u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

3. Établir l'équation de la tangente à l'origine.

4. Montrer que $u_C(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Donner l'équation de l'asymptote horizontale aux temps longs.

5. Déterminer l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote horizontale aux temps longs. En déduire une méthode pour déterminer la constante de temps τ.

6. Calculer $u_C(\tau)$ et en déduire un protocole expérimental pour mesurer la constante de temps τ. Calculer R' en utilisant l'oscillogramme fourni.

7. Calculer $u_C(3\tau)$ puis expliquer pourquoi on parle de "**temps de descente à** 95%".

8. Évaluer la durée du régime transitoire dans l'étude expérimentale de la décharge du condensateur ci-dessus.

9. Effectuer un bilan énergétique de la décharge du condensateur.

10. Déterminer $i(t)$, la représenter graphiquement et commenter.

3 Circuit RL

On reprend l'étude précédente en remplaçant le condensateur par une bobine : on obtient alors un **circuit RL**. L'étude se calque sur celle qui a été faite pour le circuit RC.

On montre que lors de l'**établissement du courant** dans la bobine, l'intensité du courant qui traverse la bobine en convention récepteur vérifie :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{i_\infty}{\tau},$$

où on a introduit une **constante de temps**

$$\tau = \frac{L}{R}$$

et posé $i_\infty = \frac{E}{R}$.

On se sert de la continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine pour montrer que $i(0^+) = i(0^-) = 0$. La solution de l'équation différentielle qui prend en compte cette condition initiale est :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Un oscilloscope donne accès à la tension aux bornes de la bobine. En utilisant la loi de comportement de la bobine,

$$u_L = L\frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Lors de la disparition du courant, en convention générateur cette fois-ci,

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et

$$u_L(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Il y a discontinuité de la tension aux bornes de la bobine lors du basculement de l'interrupteur, de la même manière qu'il y avait une discontinuité de l'intensité du courant traversant le condensateur dans le circuit RC.

4 Généralisation : les circuits du premier ordre

L'analogie formelle entre le circuit RC et le circuit RL permet de généraliser les résultats obtenus plus haut à toute une classe de circuits, dits **du premier ordre**. On note $x(t)$ la grandeur d'intérêt.

La **réponse à un échelon** de la grandeur $x(t)$ dans un circuit du premier ordre vérifie une équation différentielle du premier ordre qui peut être mise sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_\infty}{\tau}.$$

La solution est de la forme

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x_\infty.$$

La **condition initiale** $x(t = 0) = X_0$ permet de trouver la valeur de la **constante d'intégration** A et de montrer que

$$x(t) = (X_0 - x_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} + x_\infty = x_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

où la seconde égalité correspond au cas $X_0 = 0$.

En **régime libre**, $x(t)$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qui peut être mise sous la forme

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = 0.$$

La solution est de la forme

$$x(t) = \mathrm{A}e^{-\frac{t}{\tau}} = \mathrm{X}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

en tenant compte de la condition initiale.