

Chapitre 13 – Travail et énergie

À savoir

- ▷ Définition de la puissance $\mathcal{P}(t)$ d'une force à un instant donné et du travail infinitésimal δW .
- ▷ Définition du travail d'une force sur un chemin donné comme l'**énergie** fournie au système pendant le mouvement.
- ▷ Énoncé du théorème de la puissance cinétique (TPC) et de l'énergie cinétique (TEC); définition de l'énergie cinétique.
- ▷ Définition d'une force conservative : force dont le travail entre deux points est indépendant du chemin suivi.
- ▷ Conséquence de la définition : pour une force conservative il existe une fonction appelée **énergie potentielle** telle qu'on peut calculer facilement le travail entre deux points :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \mathcal{E}_p(M(t_1)) - \mathcal{E}_p(M(t_2)) \quad (1)$$

- ▷ Les frottements ne sont pas des forces conservatives (exemple de différence entre un système immobile et le même système parcourant une boucle en aller-retour).
- ▷ Énoncé du théorème de la puissance mécanique (TPM) et de l'énergie mécanique (TEM); définition de l'énergie mécanique.
- ▷ Expression des trois énergies potentielles « usuelles » :
 - ▷ énergie potentielle de pesanteur (axe z vers le haut) $\mathcal{E}_{pp} = m g z + \text{cte}$;
 - ▷ énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$;
 - ▷ énergie potentielle d'interaction gravitationnelle (masses m_1 et m_2 séparées de r) : $\mathcal{E}_{pg} = -\frac{G m_1 m_2}{r} + \text{cte}$.
- ▷ Définition d'un système conservatif; définition de l'intégrale première du mouvement ($\mathcal{E}_m = \text{cte}$).
- ▷ Pour un mouvement conservatif *unidimensionnel* (coordonnée notée x) :
 - ▷ Définition d'une position d'équilibre.
 - ▷ Critère pour trouver la position d'équilibre x_{eq} : dérivée de l'énergie potentielle nulle en ce point $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_{\text{eq}}) = 0$.
 - ▷ La position est stable si c'est un minimum de \mathcal{E}_p , donc si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_{\text{eq}}) > 0$.
 - ▷ Repérer des positions d'équilibre sur un graphe d'énergie potentielle et leur stabilité.
 - ▷ Interprétation sur une courbe d'énergie potentielle du caractère libre (non borné) ou lié (borné) d'un mouvement en fonction des conditions initiales : ces dernières fixent l'énergie mécanique, et donc les positions accessibles au système pendant son mouvement vérifient $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$.

À savoir faire

- ▷ Démontrer le TPC à partir de la 2^e loi de Newton.
- ▷ Calculer le travail du poids entre deux points d'altitudes z_1 et z_2 : $W_{M_1 \rightarrow M_2} = m g (z_1 - z_2)$.
- ▷ Faire un **bilan d'énergie cinétique** entre deux instants pour déterminer par exemple une vitesse finale.
- ▷ Déterminer l'expression de l'énergie potentielle d'une force conservative, en repérant que la puissance correspond à la **dérivée temporelle** d'une fonction; cette fonction est l'opposée de \mathcal{E}_p :

$$\mathcal{P} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \quad (2)$$

- ▷ Démontrer le TPM à partir du TPC : on fait passer $-\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$ de l'autre côté de l'égalité.
- ▷ Faire un **bilan d'énergie mécanique** entre deux instants.
- ▷ Pour un système unidimensionnel (une seule coordonnée pour décrire le mouvement), déterminer la ou les positions d'équilibre (extremum de $\mathcal{E}_p(x)$) ainsi que le caractère stable (minimum de \mathcal{E}_p) ou instable (maximum de \mathcal{E}_p).
- ▷ Savoir obtenir les équations du mouvement en dérivant \mathcal{E}_m par rapport au temps. En étant guidé, savoir linéariser les équations du mouvement autour d'une position d'équilibre.

Chapitre 14 – Oscillateurs amortis

On traite dans ce chapitre à la fois les circuits électriques du deuxième ordre et les oscillateurs amortis en mécanique, en insistant sur les points communs entre les deux systèmes qui répondent aux mêmes équations d'évolution.

À savoir

- ▷ Forme canonique de l'équation différentielle d'ordre 2 avec pulsation propre ω_0 et facteur de qualité Q :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{eq} \quad (3)$$

- ▷ Limite de l'équation quand $Q \rightarrow \infty$: oscillateur harmonique. C'est la dérivée première qui fait perdre de l'énergie pour les deux systèmes.
- ▷ Nom et propriétés des deux régimes possibles :
 - ▷ Pseudo-périodique ou sous-amorti : quand $Q > 1/2$, $X(t)$ tend vers X_{eq} en présentant des oscillations.
 - ▷ Apériodique ou sur-amorti : quand $Q < 1/2$, $X(t)$ tend vers X_{eq} sans osciller.
- ▷ Connaître par cœur ou retrouver rapidement la forme générale des solutions :
 - ▷ $Q > 1/2$, sous-amorti, pseudo-périodique

$$X(t) = [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \exp(-\alpha t) + X_{eq} \quad \text{où} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (4)$$

- ▷ $Q < 1/2$, sur-amorti, apériodique

$$X(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t) + X_{eq} \quad \text{où} \quad \begin{cases} r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \end{cases} \quad (5)$$

- ▷ Le régime critique, non atteignable en pratique, correspond au régime transitoire le plus court.
- ▷ Savoir que Q est un bon ordre de grandeur du nombre d'oscillations visibles au cours d'un régime transitoire pseudo-périodique (la démonstration n'est pas exigible).

À savoir faire

- ▷ Établir l'équation différentielle typique sur les deux situations :
 - ▷ système masse-ressort horizontal, avec frottements fluides ;
 - ▷ circuit RLC série, avec comme grandeur d'intérêt la tension aux bornes du condensateur.
- ▷ Déterminer les expressions de ω_0 , Q et X_{eq} en fonction des grandeurs du problème pour les deux situations.
- ▷ De manière générale, savoir identifier ces coefficients à partir d'une équation d'ordre 2 quelconque donnée.
- ▷ Résoudre cette équation différentielle dans les deux cas (apériodique et pseudo-périodique), avec un second membre nul ou constant ; utiliser les conditions initiales pour déterminer les coefficients A et B .
- ▷ Utiliser la loi des mailles (cas électrique) ou le TPM (cas mécanique) pour faire un bilan de puissance. Interpréter les différentes puissances et énergies.