Chapitre introductif : **Analyse dimensionnelle**

Introduction

Le terme **physique** vient du grec $\eta\ \phi\upsilon\sigma\iota\kappa\eta$ (ê physikê) signifiant “connaissance de la nature”. L’objectif de la physique est d’établir des **théories rationnelles**, les plus simples possibles, permettant de décrire et d’interpréter les phénomènes naturels ainsi que de prédire les résultats de futurs expériences, dans un cadre d’hypothèses donné.

Pour cela, elle s’appuie sur un nombre restreint de **lois fondamentales** (ou **principes**) faisant parfois apparaitre des **constantes fondamentales** dont les valeurs sont évaluées expérimentalement.

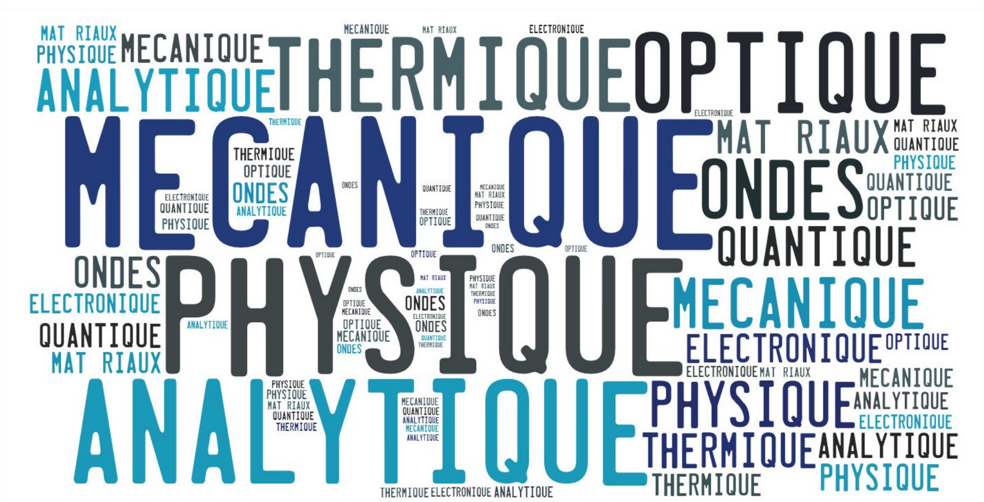
La physique ne se limite pas à la contemplation des phénomènes qui nous entourent. Elle cherche à étudier **quantitativement** la nature en effectuant des **mesures** de grandeurs physiques. L’expérience et la mesure sont au cœur de la physique dont les théories sont par essence **réfutables** : la plupart des avancées importantes ont fait suite à des résultats expérimentaux ne correspondant pas à la théorie admise à l’époque.

Objectifs du chapitre

- Classer les grandeurs en fonction de leurs dimensions (notion d’homogénéité).
- Connaitre les dimensions de base et les unités usuelles du système international.
- Déterminer la dimension d’une grandeur par analyse dimensionnelle.

Capacités exigibles	Validé ?
Dimensions fondamentales et unités S.I. associées	
Déterminer la dimension d’une grandeur d’expression donnée par analyse dimensionnelle	
Résoudre un système linéaire n équations à n inconnues	
Effectuer une application numérique en notation scientifique	

Plan du cours



I Dimensions et unités des grandeurs physiques

I.1 Définitions

Définition – Grandeurs physiques et dimensions

- Une **grandeur physique** est une propriété de la nature pouvant être **mesurée ou calculée**, les valeurs qu'elle peut prendre s'exprimant à l'aide d'un nombre, réel ou complexe.

  En physique, on utilise un **symbole**, généralement une lettre, pour désigner chaque grandeur.

  Ex : longueur L d'une porte, surface S d'une pièce, énergie cinétique E_c d'un objet, ...
- Lorsque des grandeurs physiques peuvent être comparées $(<,>,=)$, sommées $(+)$ ou soustraites $(-)$ entre-elles, on dit qu'elles sont **homogènes**. À chaque ensemble de grandeurs homogènes, on associe une **dimension**.

  La dimension d'une grandeur se note **entre crochets** : $\boxed{[A] = \text{“dimension de } A''.}$

  Ex : On peut comparer la hauteur d'une porte et la longueur d'une table mais on ne peut pas comparer la durée du jour et la surface d'une pièce.

Remarque : ⚠ en physique, le **symbole** d'un grandeur correspond à **deux informations** : sa dimension et sa valeur numérique. Dans une succession de calculs, il ne faut **jamais** remplacer les symboles des grandeurs par leur valeur numérique car on perdrait l'information sur la dimension.

Les deux propriétés (comparabilité et mesurabilité) mènent naturellement à l'introduction d'**échelles** de comparaison ou d'**étalons** de mesure pour des grandeurs ayant la même dimension.

Définition – Unités de mesure

- Le choix d'un étalon de mesure donné définit une **unité** physique. La valeur numérique de la mesure d'une grandeur sera alors un multiple de celle de l'étalon d'une unité donnée.
- Pour une dimension donnée, le nombre d'unités possible est infini. Les scientifiques ont donc choisi des étalons standards définissant les unités dites du **système international** (S.I.) pour la plupart des dimensions physiques.

Remarques :

— Pour une dimension donnée, on peut considérer toutes les sous unités du S.I. (ex : dm, cm, mm, $\mu\mathrm{m}$, nm ...) ou encore les unités adaptées à certains problèmes (année, distance Terre-Soleil = 1 unité astronomique, année lumière, degré Celsius, ...). On évitera les unités impériales (mile, pied, pouce, gallon, livre, Farenheit, ...)

— On demande avant tout à un étalon d'être précis (ne varie “pas trop” au cours du temps), reproductible (possibilité de fabriquer plusieurs étalons) et universel.

I.2 Les sept dimensions fondamentales et les unités associées

La plupart des grandeurs en physique s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, la question est de savoir combien de dimensions au minimum sont nécessaires pour parvenir à décrire toutes les grandeurs physiques. La solution retenue est de considérer sept dimensions de bases, indépendantes les unes des autres.

Définition – Les sept dimensions fondamentales

1. Le **temps**, noté $\mathbf{T}$, dont l'unité S.I. est la **seconde** $(1\ \mathrm{s})$. En pratique, la mesure d'un temps s'effectue par comparaison à un phénomène périodique via un chronomètre.

   Historiquement, c'est la rotation de la Terre sur elle même qui servait à définir la seconde : $1\mathrm{s} = 1/(24\times3600)$ de jour. Aujourd'hui, on utilise les propriétés quantiques de la matière : la seconde est la durée de 9 192 631 770 oscillations de la transition entre deux niveaux hyperfins de l'atome de Césium.
2. La **longueur**, notée $\mathbf{L}$, dont l'unité S.I. est le **mètre** $(1\ \mathrm{m})$. En pratique, la mesure d'une distance s'effectue à l'aide d'une règle graduée.

   De 1889 à 1983, le mètre correspondait à la longueur d'un étalon de platine iridié, conservé au bureau international des poids et mesures (BIPM). Aujourd'hui, le mètre correspond à la distance parcourue par la lumière en $1/299\ 793\ 458^e$ de seconde. Il est sous entendu que la vitesse de la lumière est une constante fondamentale : $c = 299\ 793\ 458\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Définition – Les sept dimensions fondamentales

3. La **masse**, notée $\mathbf{M}$, dont l'unité S.I. est le **kilogramme** ($1\ \mathrm{kg}$). En pratique, on mesure une masse à l'aide d'une balance.

   De 1879 à 2019, le kilogramme correspondait à la masse d'un étalon de platine iridié, dont plusieurs copies étaient réparties sur le globe. Depuis 2019, le kilogramme est réalisé à l'aide d'une balance de KIBLE à partir de la seconde s, du mètre m et de la constante de PLANCK : $h = 6,626\ 070\ 15.10^{-34}\ \mathrm{J.s}$.
4. L'**intensité du courant électrique**, noté $\mathbf{I}$, dont l'unité S.I. est l'**ampère** ($1\ \mathrm{A}$). En pratique, on mesure l'intensité d'un courant électrique à l'aide d'un ampèremètre.

   Depuis 2019, l'ampère est défini à partir de la seconde s et de la valeur numérique constante de la charge élémentaire $e = 1,602\ 176\ 634.10^{-19}\ \mathrm{A.s}$, portée par les électrons et les protons.
5. La **température**, notée $\boldsymbol{\theta}$, dont l'unité S.I. est le **kelvin** ($1\ \mathrm{K}$). En pratique, on mesure une température à l'aide d'un thermomètre.

   Jusqu'en 2019, le kelvin correspondait à la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau (coexistence sous forme vapeur, liquide et solide). Depuis 2019, le kelvin est définit à partir de la constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,380\ 649.10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$.
6. L'**intensité lumineuse**, notée $\mathbf{J}$, dont l'unité S.I. est le **candela** ($1\ \mathrm{Cd}$). Il s'agit de l'intensité lumineuse d'une source qui émet, dans une direction données, un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} Hz ($\simeq 555\ \mathrm{nm}$) et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $1/683$ watt par stéradian.
7. La **quantité de matière**, notée $\mathbf{N}$, dont l'unité S.I. est la **mole** ($1\ \mathrm{mol}$). Jusqu'en 2019, il s'agissait du nombre d'atomes de carbone^{12} que l'on trouve dans 12 g de carbone, appelé constante d'AVOGADRO. Depuis 2019, on a fixé sa valeur à $\mathcal{N}_A = 6,022\ 140\ 76.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

Dimension	Symbole	Unité S.I.
temps	$\mathbf{T}$	seconde (s)
longueur	$\mathbf{L}$	mètre (m)
masse	$\mathbf{M}$	kilogramme (kg)
intensité élec.	$\mathbf{I}$	ampère (A)
température	$\boldsymbol{\theta}$	kelvin (K)
intensité lux.	$\mathbf{J}$	candela (Cd)
quantité matière	$\mathbf{N}$	mole (mol)

Propriété – Dimensions et unités composées

- **Toutes les autres dimensions** envisageables s'expriment comme produit et/ou quotient des dimensions fondamentales. On les appelle alors **dimensions composées**.
- À chaque dimension composée correspond, en général, **une unité S.I.** qui s'exprime de la même façon en fonction des unités fondamentales.

I.3 Présentation d'un résultat numérique en physique

• En physique, toute valeur numérique est sous-entendue comme résultat d'une mesure. Toute mesure se faisant à l'aide d'un instrument doté d'une **précision finie**, le résultat numérique doit faire apparaitre cette information : on parle d'**incertitude expérimentale**.
Ex : si l'on mesure la largeur L d'une feuille $\mathrm{A4}$ à l'aide d'une règle millimétrée, le résultat obtenu sera précis au mieux à un millimètre prés. On notera $L = (21,0 \pm 0,1)\,\mathrm{cm}$.

• Généralement, les énoncés donnent des valeurs numériques sans incertitude. Il faut alors interpréter la valeur comme étant **précise au dernier chiffre significatif proposé**.
Ex : si un énoncé donne $T = 3,00\ \mathrm{s}$, cela sous entend une précision à $\pm 0,01\ \mathrm{s}$: $T = 3,00 \pm 0,01 s$.

Cette valeur est bien plus précise que si l'énoncé proposait $T = 3\ \mathrm{s}$, correspondant à une précision à $\pm 1\ \mathrm{s}$.

• On utilisera généralement la **notation scientifique** pour bien faire apparaitre les chiffres significatifs.
Ex : Ne pas écrire $d = 150\ 000\ 000\ \mathrm{km}$ mais $d = 1,5.10^8\ \mathrm{km}$ pour la distance Terre-Soleil.

Méthode – Application numérique

Le résultat d'une **application numérique** doit contenir autant de chiffres significatifs que la **moins précise** des valeurs numériques proposée par l'énoncé.

Définition – Ordre de grandeur

L'**ordre de grandeur** (odg) d'une grandeur physique est la puissance de dix la plus proche de la valeur de cette grandeur dans une unité donnée.

Ex : Odg de la célérité de la lumière $c \simeq 10^8$ m.s^{-1}.

Exposant	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}
Préfixe	femto	pico	nano	micro	milli	kilo	méga	giga	téra	péta
Symbole	f	p	n	μ	m	k	M	G	T	P

II Analyse dimensionnelle

II.1 Lois physiques et homogénéité

La dimension d'une grandeur physique quelconque s'exprimera toujours comme une combinaison, multiplicative ou fractionnaire, des sept dimensions de base.

Principe ou loi physique – Équations physiques et dimensions

L'écriture des expressions physiques se fait de façon homogène.

$\Leftrightarrow$ On ne peut sommer, soustraire ou égaliser que des grandeurs homogènes.

Remarque : Par contraposée, si une équation n'est pas homogène, alors l'égalité n'a pas de sens physique. Malheureusement, une équation homogène n'est pas forcément juste, mais c'est un bon début !

Ex : Avec une expression du type $x = 1 + R$, on peut en déduire que soit x et R sont sans dimension car comparables à 1, soit on a fait une erreur de calcul pour en arriver là.

II.2 Opérations mathématiques

Propriété – Produit, quotient, puissance, dérivation, intégration

- $[A \times B] = [A] \times [B]$
- $\left[\dfrac{A}{B}\right] = \dfrac{[A]}{[B]}$
- $\left[A^b\right] = [A]^b$ (b sans dim.)
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = [y'(x)] = \dfrac{[y]}{[x]}$
- $\left[\int y(x)\mathrm{d}x\right] = [y] \times [x]$
- $A + B = C \Rightarrow [A] = [B] = [C]$
- Les fonctions mathématiques $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\exp$ et $\ln$ prennent en **argument** des grandeurs **adimensionnées**.

Remarque : ⚠ Certaines quantités physiques sont **sans dimension** ou **adimensionnées**. On note alors la dimension "1". Elles sont obtenues par quotient de deux grandeurs homogènes. Elles s'écrivent sans unités.

C'est notamment le cas pour les **angles** : [angle θ] $= 1$.

II.3 Grandeurs usuelles en mécanique

- **Surface** : $[S] = \mathbf{L}^2$
- **Volume** : $[V] = \mathbf{L}^3$.
- La **vitesse** est la dérivée de la position par rapport au temps : $v = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{[v] = \dfrac{[x]}{[t]} = \mathbf{L}.\mathbf{T}^{-1}}$ en m.s^{-1}.
- L'**accélération** est la dérivée de la vitesse par rapport au temps : $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{[a] = \dfrac{[v]}{[t]} = \mathbf{L}.\mathbf{T}^{-2}}$ en m.s^{-2}.
- Les **forces** interviennent dans le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{F}$: $\boxed{[F] = [m][a] = \mathbf{M}.\mathbf{L}.\mathbf{T}^{-2}}$ qui s'exprime en kg.m.s^{-2}. Unité S.I. : le **newton** ($1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg.m.s}^{-2}$).
- On obtient la dimension de l'**énergie** avec l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donc $\boxed{[E] = [m][v]^2 = \mathbf{M}.\mathbf{L}^2.\mathbf{T}^{-2}}$ qui s'exprime en kg.m^2.s^{-2}. Unité S.I. : le **joule** ($1\mathrm{J} = 1\mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-2} = 1\mathrm{N.m}$).

- La **puissance** correspond à la variation temporelle de l'énergie : $\mathcal{P} = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{[\mathcal{P}] = \dfrac{[E]}{[t]} = \mathbf{M}.\mathbf{L}^2.\mathbf{T}^{-3}}$ qui s'exprime en $\mathrm{kg.m^2.s^{-3}}$. Unité S.I. : le **watt** ($1\mathrm{W} = 1\mathrm{kg.m^2.s^{-3}} = 1\mathrm{J.s^{-1}}$).
- La **pression** est une force rapportée à la surface sur laquelle elle s'applique : $P = F/S$ donc $\boxed{[P] = \dfrac{[F]}{[S]} = \mathbf{M}.\mathbf{L}^{-1}.\mathbf{T}^{-2}}$ qui s'exprime en $\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$. Unité S.I. : le **pascal** ($1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}} = 1\mathrm{N.m^{-2}}$).

***Exemple ou exercice d'application** – Constante des gaz parfaits (GP)*

Retrouver la dimension et l'unité S.I. de la constante des GP R intervenant dans la loi des GP : $PV = nRT$.

II.4 Grandeurs usuelles en électricité

- Le courant est électrique est un débit de **charges électriques** q à travers une surface donnée : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{[q] = [i][t] = \mathbf{I}.\mathbf{T}}$ qui s'exprime en $\mathrm{A.s}$. Unité S.I. : le **coulomb** ($1\mathrm{C} = 1\mathrm{A.s}$).
- La puissance électrique est le produit des deux grandeurs électriques courant i et **tension** u : $\mathcal{P} = u \times i$ donc $\boxed{[u] = \dfrac{[\mathcal{P}]}{[i]} = \mathbf{M}.\mathbf{L}^2.\mathbf{T}^{-3}.\mathbf{I}^{-1}}$ qui s'exprime en $\mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}}$. Unité S.I. : le **volt** ($1\mathrm{V} = 1\mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}}$).
- La résistance électrique intervient dans la loi d'Ohm : $u = Ri$ donc $\boxed{[R] = \dfrac{[u]}{[i]} = \mathbf{M}.\mathbf{L}^2.\mathbf{T}^{-3}.\mathbf{I}^{-2}}$ qui s'exprime en $\mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}}$. Unité S.I. : l'**ohm** ($1\Omega = 1\mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}}$).

II.5 Vecteurs et scalaires

Subtilité en physique : nous manipulerons couramment des vecteurs, entités appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et des scalaire (ou nombres), appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$ (voire $\mathbb{C}$).

Propriété – Vecteurs et scalaires

Les grandeurs vectorielles et scalaires ne "vivent" pas dans le même espace et ne peuvent donc pas être comparées, et cela même si leur dimensions physiques sont effectivement compatibles. $\overrightarrow{\text{vecteur}} \neq \text{scalaire}$

III Recherche d'une loi physique par analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est un outil puissant qui permet non seulement de vérifier rapidement si les calculs que l'on vient d'effectuer ne sont pas manifestement faux mais qui peut également permettre de trouver simplement les expressions de certaines grandeurs en fonctions de paramètres connus du système sous forme de **lois d'échelles** (expressions reliant des grandeurs uniquement à l'aide de produits, quotients et exposants). Par exemple, $E = \frac{1}{2}mv^2$ est une loi d'échelle où E évolue comme v au carré et proportionnellement à la masse (m "puissance 1").

Position du problème : on suppose qu'un grandeur physique X de dimension connue s'exprime en fonction de deux autres grandeurs physiques A et B dont on connait les dimensions. On souhaite savoir comment X évolue si l'on fait varier A ou B : $X(A, B)$. On peut supposer l'existence d'une **loi d'échelle** de la forme $\boxed{X = K \times A^a B^b}$ où k, a et b sont des constantes sans dimension que l'on cherche à déterminer.

Méthode – Loi d'échelle

- En **décomposant** sur les sept dimensions de base et en considérant les **exposants** de chaque dimension, on obtient un **système** d'au maximum sept équations dont a et b sont solutions : on en déduit la loi d'échelle.
- Si l'on connait la valeur X_0 que prend X pour (A_0, B_0), on trouve la valeur numérique de $K = \dfrac{X_0}{A_0^a B_0^b}$.
- En représentation logarithmique, $\ln X = \ln K + a \ln A + b \ln B$ évolue de façon affine par rapport à $\ln A$ et $\ln B$. Si l'on dispose de données, on peut mesurer simplement les paramètres a et b en traçant des droites.

Remarques : Cette méthode se généralise à des cas à trois ou plus paramètres (mais moins que 7).

Si les paramètres retenus par le physicien sont pertinents, il n'est pas rare que la constante K d'une loi d'échelle soit proche de 1.

Exemple ou exercice d'application – *Énergie potentielle de pesanteur – oscillations d'un ressort*

Voir exercices 2 et 3 du TD