Chapitre Ondes 1 :
Signaux physiques périodiques

Introduction

Les **phénomènes ondulatoires** se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique : en mécanique (propagation d'une perturbation sur une corde tendue), en mécanique des fluides (vaguelettes à la surface d'un liquide, propagation d'un son dans un gaz), en électromagnétisme (ondes radio, lumière visibles, ...) et même en mécanique quantique (dualité onde-corpuscule et fonction d'onde). Dans ce chapitre introductif, nous nous intéresserons essentiellement à la définition et à la description de signaux physiques.

Objectifs du chapitre

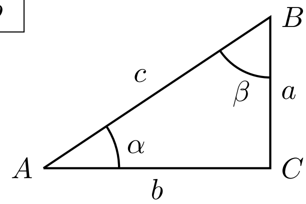
- Décrire les caractéristiques d'un signal sinusoïdal puis étudier le spectre d'un signal périodique.

Capacités exigibles	Validé ?
Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques et électromagnétiques.	
Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustiques et électromagnétiques.	
Sur le spectre d'un signal périodique, identifier la composante continue, le fondamental et les harmoniques.	

Plan du cours

Méthode – Rappels de trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

- $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{a}{c}}$ $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{b}{c}}$ $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \dfrac{a}{b}.}$



- On a donc $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{a^2+b^2}{c^2} = 1}$ d'après le théorème de Pythagore.
On en déduit également que $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

- Dans le triangle ABC rectangle en C, on a $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$ dont on déduit $\boxed{\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha.}$
Ainsi $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{b}{c} = \cos\alpha}$, $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{a}{c} = \sin\alpha}$ et $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\tan\alpha}.}$

I Signal physique

I.1 Définition et exemples

Définition – Signal physique

• Un **signal** physique, que l'on notera $s(t)$, correspond à l'évolution temporelle de la mesure d'une **grandeur physique** s effectuée en un point donné M de l'espace.

Ex : Déplacement transverse $y(t)$ d'un point M d'une corde, déplacement $y(t)$ du niveau de l'eau lors du passage d'une vague, champ électromagnétique $E(t)$ mesuré par une antenne, surpression acoustique $p(t)$ émise par un haut-parleur et mesurée par un microphone, tension $u(t)$, courant $i(t)$ délivrée par un générateur ...

Remarques :

• Si la valeur de la grandeur physique s varie en fonction du point de l'espace M, on peut imaginer être capable de la mesurer en tout point en fonction du temps. On obtient alors un **champ scalaire** $s(M, t)$ qui dépend des trois coordonnées d'espace du point $M(x, y, z)$ et d'un coordonnée temporelle. Les ondes sont un cas particulier de champ scalaire : un signal mesuré sera souvent associé à une onde, mais pas nécessairement.

• L'acquisition, le stockage et la transmission d'un signal nécessite généralement la **conversion** et l'utilisation de signaux de natures physiques différentes, l'objectif étant de restituer un signal final le plus proche possible de l'original.

Exemple ou exercice d'application – *Du musicien à l'oreille*

Combien de conversions et quels types de signaux interviennent entre un musicien qui enregistre un son en studio et un utilisateur qui l'écoute sur son smartphone ?

I.2 Signal sinusoïdal

Expérience ou animation – *Signal sinusoïdal généré par un oscilloscope.*

`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/sinus.php`

Observer l'influence de l'amplitude, de la fréquence et du déphasage.

Définition – Signal périodique sinusoïdal

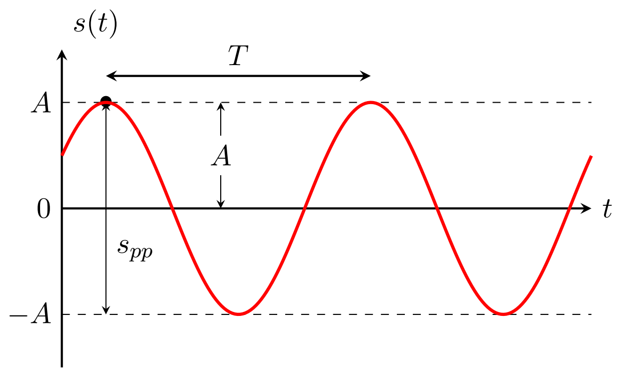
• Un **signal sinusoïdal** s'écrit sous la forme

$$\boxed{s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

où A est son **amplitude** (positive, de même dimension que s), ω sa **pulsation** (en $\mathrm{rad.s^{-1}}$) et φ sa **phase à l'origine** (en rad).

• L'argument du cosinus, i.e. $\boxed{\phi = \omega t + \varphi}$ est appelé **phase instantanée** à l'instant t.

• Période : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}.}$ Fréquence $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.}$



Remarques : — On peut également écrire $s(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi)$

— Comme $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on a l'égalité $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \psi)$ où $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

Propriété – Signaux sinusoïdaux

Mathématiquement : $\boxed{s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow s(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}$

avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan\varphi = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow a = A\cos\varphi$ et $b = -A\sin\varphi$.

Remarque : un signal **constant** $s(t) = A$ est un cas particulier à **fréquence nulle** (pour lequel $\omega = 0$) et dont la phase à l'origine vaut $\varphi = 0$ (si $A > 0$) ou $\varphi = \pi$ (si $A < 0$).

II Signal périodique et analyse spectrale

II.1 Définition et ordres de grandeur

Définition – Signal périodique

• Un signal $s(t)$ est dit **périodique de période** T si il existe une durée minimale T telle que $s(t+T) = s(t)\ \forall t$.

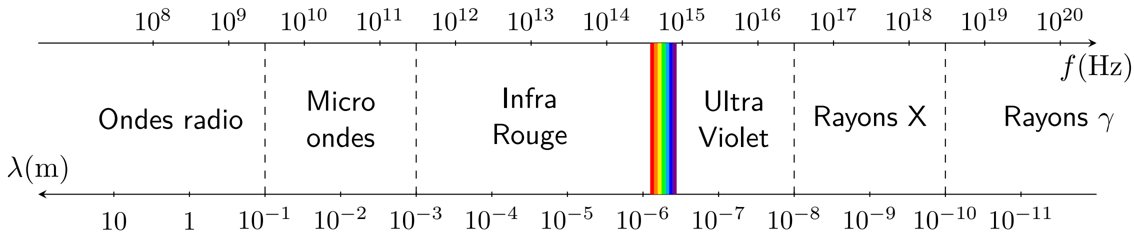
• Sa **fréquence** vaut donc $\boxed{f = \dfrac{1}{T}}$.

Odg :

— acoustique audible : $f \in [20\mathrm{Hz}, 20\mathrm{kHz}]$,

— électricité en TP : $f \in [10\mathrm{Hz}, 10\mathrm{MHz}]$,

— ondes électro-magnétiques : voir ci-dessous, dont visible $f \in [4.10^{14}\mathrm{Hz}, 8.10^{14}\mathrm{Hz}]$.



Remarque : le signal sinusoïdal est évidemment un signal périodique !
On utilisera également beaucoup le **signal créneau** ainsi que le **signal triangle** .

II.2 Théorie de Fourier et analyse spectrale

La majorité des signaux périodiques ne sont pas simplement sinusoïdaux. Joseph Fourier, physicien français du XIX^e siècle, élabora une théorie permettant de décrire tout signal périodique comme une somme de sinusoïdes.

Propriété – Série de Fourier

• Tout signal périodique $s(t)$ de fréquence f se décompose comme une somme (à priori infinie : on parle de série) de **composantes sinusoïdales** s_n de fréquences multiples entières de f : $\boxed{f_n = n \cdot f,\ n \in \mathbb{N}}$.
• L'ensemble des fréquences "contenues" dans le signal s forment ce que l'on appelle son **spectre fréquentiel**.
• **Décomposition en série de Fourier** : il existe un ensemble d'amplitudes $\{A_n\}$ et de phases à l'origine $\{\varphi_n\}$ telles que $\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)}$

Remarque : Connaissant $s(t)$, on peut trouver les (A_n, φ_n) avec $f_n = n \times f$: on parle de **décomposition en série de Fourier**. Inversement, à partir de la donnée de f et d'un ensemble de (A_n, φ_n), on peut reconstruire le signal $s(t)$: c'est la **synthèse de Fourier**.

Expérience ou animation – *Synthèse de Fourier – manipulation des premières harmoniques d'un signal*

`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/synthese.php`

Définition – Vocabulaire

• La composante A_0 est appelées **composante continue** du signal. Il s'agit de la valeur moyenne de s.
• La composante $A_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)$, de même fréquence que le signal s, est appelée **harmonique fondamentale**.
• Les composantes $A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ pour $n \geqslant 2$ sont appelées **harmoniques de rang** n.
• On trace généralement la représentation des amplitudes A_n en fonction des f_n : c'est le **spectre en amplitude**.
On peut également parfois tracer le **spectre de phase** des φ_n en fonction de f_n.

Remarques : Le spectre d'un signal sinusoïdal ne contient qu'une fréquence fondamentale.

Les premières harmoniques (basses fréquences **BF**) déterminent la **forme générale** du signal. Les harmoniques suivantes (hautes fréquences **HF**) déterminent les **détails** du signal.

⚠ Le spectre d'un signal ne contient pas toujours la composante fondamentale.

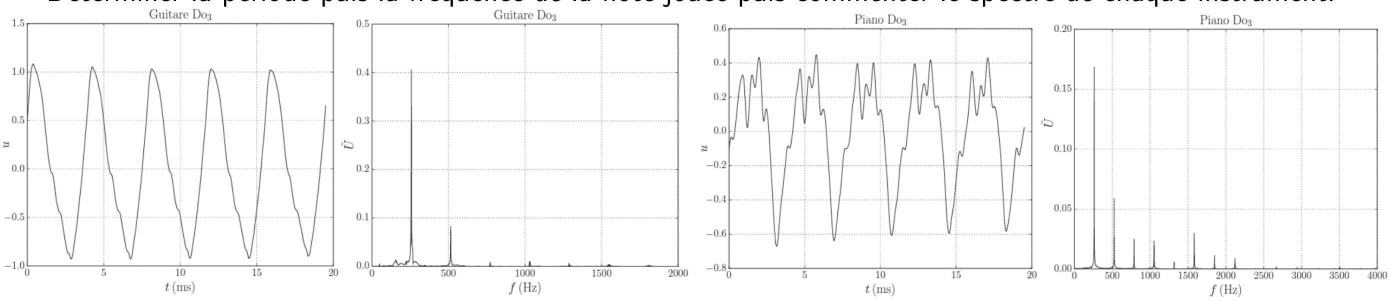
Méthode – Signal périodique ou non ?

Un signal sera **périodique** si il existe une fréquence f telle que toutes les fréquences $\{f_j\}$ qui constituent son spectre sont des **multiples entiers** de f. Contre exemple : $\{f, \sqrt{2}f\}$.

II.3 Quelques exercices

Exemple ou exercice d'application – *La même note ?*

Déterminer la période puis la fréquence de la note jouée puis commenter le spectre de chaque instrument.

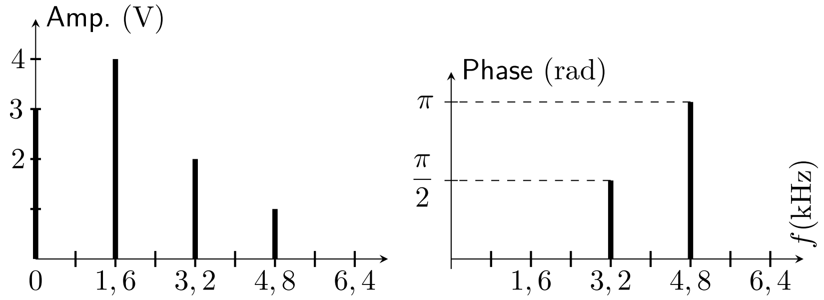


Remarque : la **hauteur** d'un son dépend de sa fréquence fondamentale : **grave** pour les basses fréquences, **aiguë** pour les hautes fréquences. Le **timbre** d'un instrument dépend des différentes harmoniques qu'il procure à une note.
`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/son/synthese_son.php`
`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/son/analyseur.php`

Exemple ou exercice d'application – *Interprétation d'un spectre et synthèse de* FOURIER

On fournit les spectres en amplitude et en phase d'un signal $g(t)$:

1. Déterminer l'expression de $g(t)$.
2. S'agit-il d'un signal périodique ? Si oui quelle est sa fréquence fondamentale ? Sa période ?
3. Préciser sa valeur moyenne $\langle g \rangle$.
4. Bonus : tracer le signal sur une période à l'aide d'un ordinateur.



Exemple ou exercice d'application – *Étude d'un signal sinusoïdal de moyenne non nulle*

Un signal électrique, issu d'un capteur, s'exprime sous la forme $s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = 6,28.10^4$ rad.s^{-1}.

1. Le signal est-il périodique ? Si oui, que valent sa fréquence f et sa période T.
2. Tracer son allure pour $S_0 = 2$ V et $S_m = 1$ V. Quelle est sa valeur moyenne $\langle s \rangle$?

Exemple ou exercice d'application – *Un spectre (pas si) simple (**)*

Tracer le spectre en amplitude et en phase du signal $s(t) = 3\cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos(100\pi t) + 2\sin(60\pi t)$. Quelle est sa fréquence fondamentale ? Préciser le rang des harmoniques présentes.

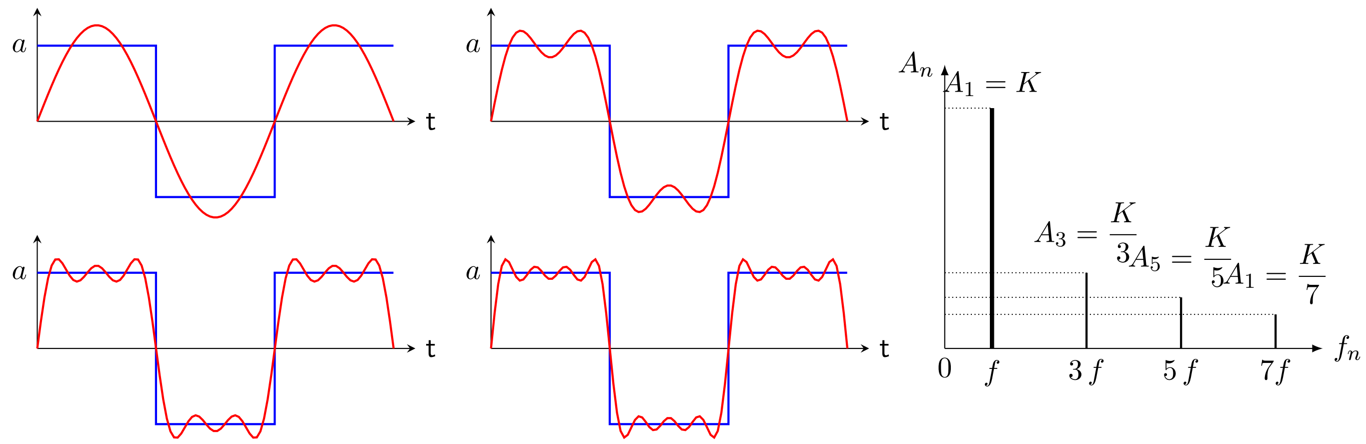
Exemple ou exercice d'application – *Spectre d'un produit de sinusoïdes (***)*

On considère le signal $s(t) = A\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t + \varphi)$ où A et φ sont des constantes.

1. En utilisant la formule trigonométrique adaptée, déterminer les fréquences contenues dans $s(t)$.
2. Représenter son spectre en amplitude et en phase. Examiner le cas où $f_1 = f_2$.

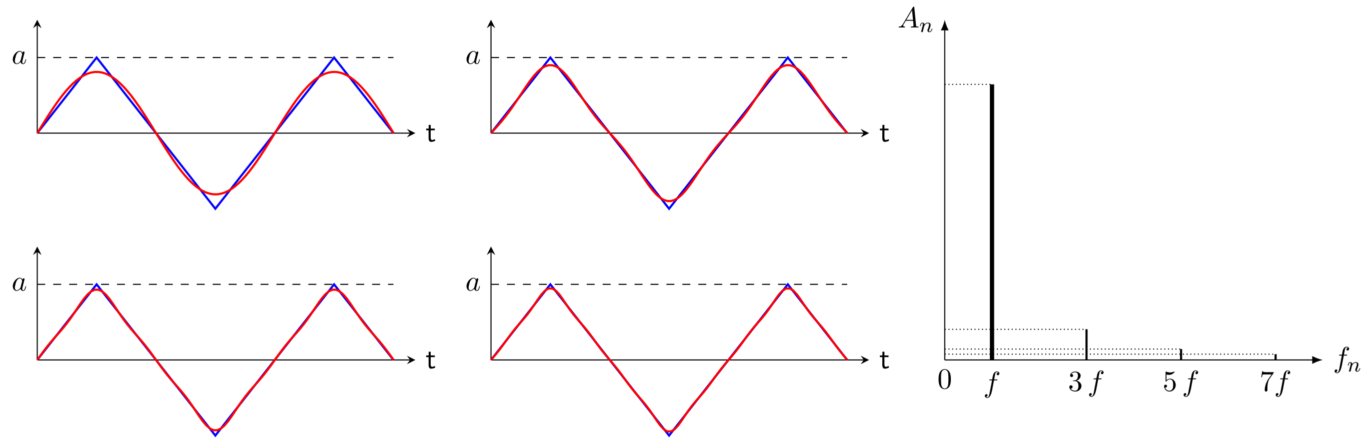
II.4 Exemples de décompositions et synthèses de Fourier

• On considère tout d'abord un signal créneau symétrique et impair, de période T, variant entre $+a$ et $-a$. On montre (HP) que sa décomposition en série de FOURIER se met sous la forme $s(t) = \underbrace{\frac{4a}{\pi}}_{K} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi(2n+1)ft)}{2n+1}$



Sur la première courbe, seule la première harmonique est représentée (en rouge). Sur la seconde courbe, on a sommé les harmoniques 1 et 2,... Plus on rajoute d'harmoniques, plus la courbe obtenue ressemble à la fonction créneau. L'amplitude des harmoniques du créneau décroit comme $1/(2n+1)$, ce qui est particulièrement peu rapide : il faudra considérer beaucoup d'harmoniques pour reconstruire "correctement" le signal initial.

• Pour un signal triangle symétrique et impair, de fréquence f, variant entre $+a$ et $-a$, on obtient la décomposition $s_{\text{tri}}(t) = \underbrace{\frac{8a}{\pi^2}}_{K'} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(2\pi(2n+1)ft)}{(2n+1)^2}$



L'amplitude des harmonique décroit beaucoup plus vite, comme $1/(2n+1)^2$: le signal est beaucoup plus rapidement reconstitué fidèlement. ⚠ : le terme $(-1)^n$ ne change pas le signe des amplitudes, qui sont toujours positives, il se manifestera dans les phases. En effet, multiplier un sinus par (-1) revient à ajouter une phase de π.