DS1 – Analyse dimensionnelle et optique géométrique

- Ce devoir est composé de deux problèmes **indépendants**.
- **Aérer** la présentation (marge, espace entre les problèmes).
- Ne pas oublier de **numéroter** vos copies ni d'indiquer votre nom sur chacune d'entre elle.
- L'argumentation des réponses devra être précise, concise et rigoureuse.
- Toute application numérique non suivie d'une **unité correcte** entrainera une suppression de points.
- Les résultats littéraux seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$ et les applications numériques **soulignées**.
- Ne perdez pas trop de temps sur une question : si vous bloquez vraiment, passez.
  Au sein d'un problème, de nombreuses questions sont indépendantes.

I Rayonnement électro-magnétique par la matière interstellaire

L'hydrogène est l'élément chimique le plus léger, de numéro atomique $Z = 1$ et de symbole H. Il est le principal constituant de la plupart des étoiles, dont l'énergie provient de la fusion thermonucléaire de cet hydrogène, et de la matière interstellaire. La simplicité de sa structure, un noyau contenant un unique proton entouré d'un unique électron, permet une étude théorique et expérimentale approfondie de ses propriétés.

I.1 Énergie de l'électron d'un atome d'hydrogène

La mécanique quantique permet d'établir que l'énergie de l'électron d'un atome d'hydrogène ne peut prendre qu'un nombre discret de valeurs, appelés niveaux d'énergie. Ces niveaux d'énergie E_n, quantifiés par un entier $n \geqslant 1$, sont caractérisés par la relation $E_n = -\dfrac{E_1}{n^2}$ où E_1 est appelée énergie d'ionisation de l'atome. Une énergie négative correspond à un état de l'électron lié au noyau tandis qu'une énergie positive correspond à un état ionisé, l'électron quittant alors le noyau.

On donne $m = 9,1.10^{-31}$ kg la masse de l'électron, $e = 1,6.10^{-19}$ C sa charge, $\varepsilon_0 = 8,8.10^{-12}\ \mathrm{m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2}$ la constante électrique et $h = 6,64.10^{-34}$ J.s la constante de Planck.

1. À l'aide d'une formule de votre choix, montrer que la dimension d'un énergie est [énergie] $= \mathbf{M.L^2.T^{-2}}$. En déduire la dimension de la constante de Planck h.

On suppose que l'énergie E_1 s'exprime par une loi d'échelle de la forme $E_1 = K \times m^a \times e^b \times (\varepsilon_0 \times h)^c$ où K est une constante adimensionnée et (a, b, c) sont des entiers relatifs. ⚠ Il s'agit du même entier c pour ε_0 et h.

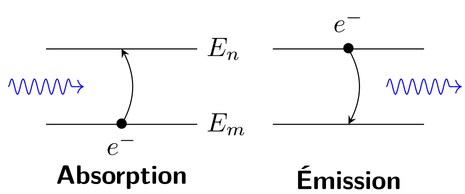
2. Par analyse dimensionnelle, montrer que $a = 1$, $b = 4$ et $c = -2$. On pourra commencer par déterminer la dimension du produit $\varepsilon_0 \times h$. On rappelle que $1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A.s}$ donc [charge] $= \mathbf{I.T}$.
3. La théorie indique que $K = \frac{1}{8}$. Déterminer la valeur numérique, en joules, de l'énergie E_1. On pourra calculer d'une part les exposants des puissances de 10 et d'autre part le prè-facteur numérique.

Pour la suite, on prendra $E_1 = 13,6$ eV où $1\ \mathrm{eV} = 1,6.10^{-19}$ J (l'électron-volt est une unité couramment utilisé pour les énergies atomiques).

4. Calculer les valeurs des premiers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène $(E_1,\ E_2,\ E_3,\ \dots)$ puis les positionner sur un axe d'énergie gradué en eV. Quelle est l'énergie la plus basse que puisse avoir l'électron ? Quelle est l'énergie la plus élevée ?

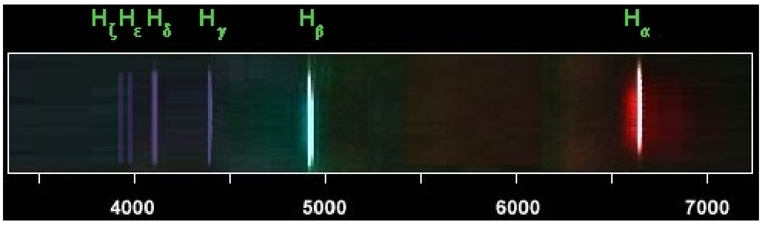
I.2 Spectroscopie de l'atome d'hydrogène

Un électron dans un atome peut absorber ou émettre un photon γ. Lors d'une absorption, il gagne de l'énergie et va passer d'un état m d'énergie E_m vers un état n d'énergie E_n supérieure. Lors d'une émission, l'électron perd de l'énergie en passant d'un état n vers un état m d'énergie inférieure en émettant un photon. L'énergie E_γ du photon absorbé ou émis correspond à la différence d'énergie $\Delta E = E_n - E_m$ entre les niveaux : $E_\gamma = \Delta E$.



5. Rappeler l'expression, faisant intervenir la constante de Planck, de l'énergie E_γ d'un photon de fréquence f. En déduire l'expression de E_γ en fonction de h, de c la vitesse de la lumière et de λ la longueur d'onde dans le vide.
6. Montrez que la longueur d'onde λ_{nm} d'un photon émis par un atome d'hydrogène suite à une transition $n \to m$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{1}{\lambda_{nm}} = R\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ où la constante de Rydberg R s'exprime en fonction de h, c et E_1. Pour la suite, on prendra $R = 1,1.10^7\ \mathrm{m^{-1}}$.
7. Dans quelle gamme spectrale se trouve un photon émis lors d'une transition d'un état $n > 1$ vers l'état $m = 1$? (série spectrographique de Lyman). On pourra calculer la longueur d'onde maximale d'un photon émis, correspondant à la transition de plus basse énergie.

8. Montrer que les seules transitions produisant de la lumière visible sont les transitions vers le niveau $m = 2$. Il s'agit de la série spectrographique de BALMER, représentée ci-contre.



Lorsque l'on observe la nébuleuse d'ORION, on constate qu'elle a une couleur rouge correspondant à une longueur d'onde de 657 nm.

9. Justifier pourquoi on peut penser que le gaz qui compose Orion est de l'hydrogène.

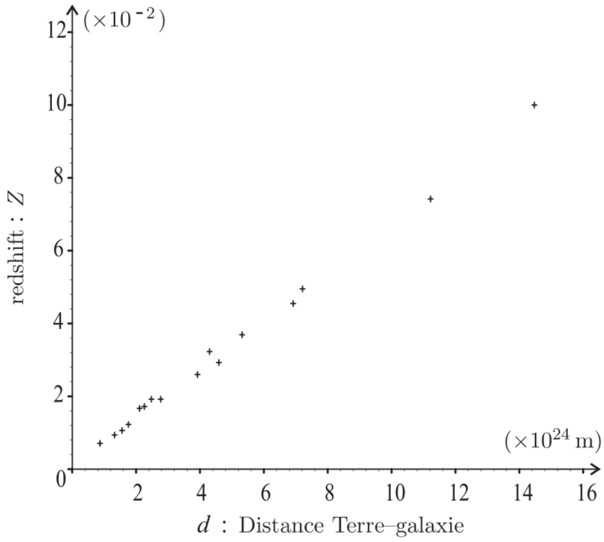
I.3 Expansion de l'univers

L'hydrogène étant présent dans la plupart des structures interstellaires, sa spectroscopie est un outil important pour analyser la dynamique cosmique, notamment au travers de l'effet DOPPLER : lorsqu'un émetteur de rayonnement à la fréquence f se déplace en s'éloignant à un vitesse $v > 0$ par rapport à un récepteur, la fréquence f' de la lumière reçue est modifiée et vérifie la loi $f' = \dfrac{f}{1 + v/c}$.

10. En déduire la relation entre les longueurs d'ondes λ émise et λ' reçue. Dans le cas d'un émetteur qui s'éloigne, la longueur d'onde augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?

11. On appelle *redshift* la grandeur $Z = \dfrac{\lambda'}{\lambda} - 1$. Exprimer Z en fonction de v et c puis commenter son nom anglais (*shift* signifie "déplacement").

En 1929, le physicien Edwin HUBBLE a relevé le spectre de la lumière issue des galaxies dont la distance à la Terre était connue, par analyse optique. En comparant ces spectres à ceux d'éléments chimiques connus, notamment l'hydrogène, il en a déduit le *redshift* Z de ces galaxies. Les points expérimentaux pour plusieurs galaxies sont représentés sur la figure ci-contre. En notant d la distance Terre-galaxie et v la vitesse d'éloignement de la galaxie par rapport à la Terre, les mesures suggèrent une loi linéaire, appelée loi de HUBBLE, du type $v = H \times d$ où H s'appelle la constante de HUBBLE.



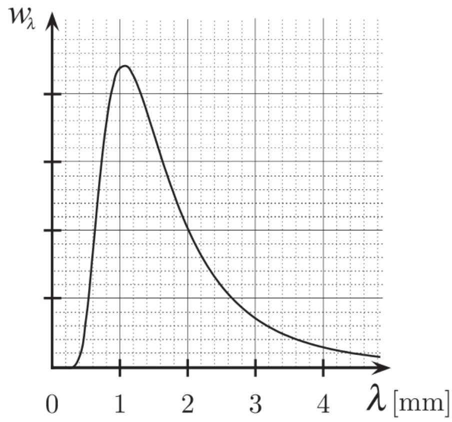
12. Par lecture graphique, déterminer le coefficient directeur a de la droite $Z = a \times d$ et en déduire une estimation numérique de H en unités du système international, puis en $\mathrm{km.s^{-1}.Mal^{-1}}$ où 1 Mal $= 9,46.10^{21}$ m correspond à un million d'années-lumière. Que signifie cette unité ?

La loi de Hubble suggère donc que l'Univers est en expansion. Le modèle du *big-bang* permet de postuler que cette expansion a commencé depuis un temps fini et donc que l'Univers peut se voir attribuer un âge.

13. Avec des arguments qualitatifs simples, expliquer pourquoi l'inverse de la constante de HUBBLE est un bon ordre de grandeur de l'âge de l'Univers. En déduire une estimation numérique de l'âge de l'Univers, en milliards d'années.

I.4 Le rayonnement fossile

Dès 1948, le physicien George GAMOW a prévu que le big-bang a dû laisser une trace dans l'Univers sous forme de rayonnement électromagnétique, appelé rayonnement fossile, émis au moment où l'Univers est devenu suffisamment froid et perméable à la lumière. Ce rayonnement a été mesuré en 1962 par PENZIAS et WILSON (prix Nobel 1978). La densité volumique w_λ d'énergie électromagnétique de ce rayonnement par unité de longueur d'onde λ, en $\mathrm{J.m^{-4}}$, est représentée sur la figure ci-contre.



14. À quelle gamme d'ondes électromagnétiques correspond le rayonnement fossile ? On justifiera la réponse en donnant des ordres de grandeur connus.

La courbe du rayonnement fossile a exactement la même forme que celle correspondant à l'émission d'un corps chauffé (braise chaude, intérieur d'un four, etc).

Pour ce type de rayonnement, la longueur d'onde λ_m au maximum d'émission est liée à la température T du corps chauffé par la loi de WIEN : $\lambda_m \times T = 3.10^{-3}$ m.K. Par abus de langage, T est appelée température du rayonnement.

15. Déterminer graphiquement la longueur d'onde du maximum d'émission et en déduire la température actuelle du rayonnement fossile.

Le rayonnement fossile est le résultat d'un processus physique qui s'est déroulé pendant une phase très brève de l'histoire de l'Univers durant laquelle sa température T valait environ 3000 K.

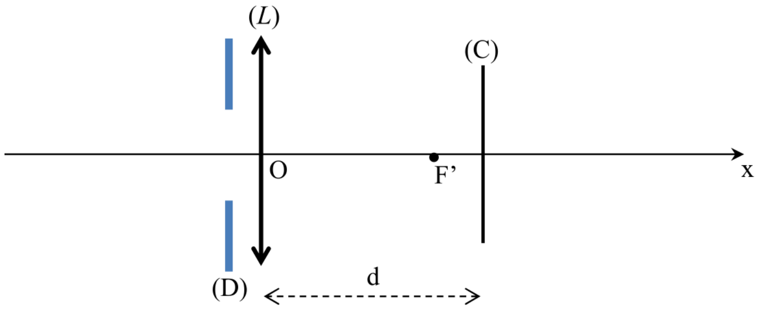
16. En admettant que les longueurs d'onde aient subi la même dilatation que l'Univers, de quel facteur l'Univers s'est-il dilaté entre le moment de l'émission du rayonnement fossile et aujourd'hui ?

II Autour de l'appareil photographique

II.1 Généralités

On modélise un appareil photo par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = OF'$ appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif. Elle est comprise entre $d_{\text{min}} = f'$ et d_{max}. À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance ℓ devant l'objectif.



1. La lentille mince est utilisée dans les "conditions de Gauss". Préciser en quoi elles consistent. Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?
2. Faire un schéma optique soigné de la situation en notant AB l'objet transverse **réél** et $A'B'$ son image sur le capteur (A et A' sur l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer trois rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.
3. Exprimer, en justifiant, le grandissement transverse $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ en fonction des positions $\overline{OA'}$ et $\overline{OA}$.
4. On rappelle la relation de conjugaison de Descarte : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$. En déduire l'expression de $\overline{OA'}$ en fonction de ℓ et f'. ⚠ Attention aux signes !
5. Exprimer alors la taille $A'B'$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f' et ℓ. Effectuer l'A.N. pour $f' = 50 \text{ mm}$, $h = 5 \text{ m}$ et $\ell = 20 \text{ m}$.

On souhaite étudier la mise au point par déplacement du capteur.

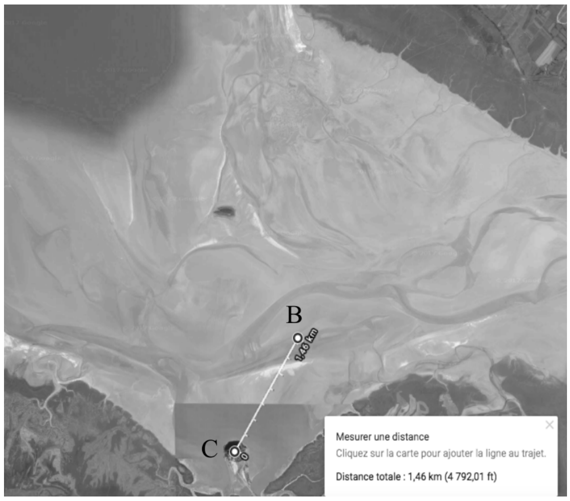
6. Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ? Montrer qu'il existe une distance minimale, notée ℓ_{min}, en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image nette sur le capteur. Exprimer ℓ_{min} en fonction de f' et d_{max}.
7. Calculer ℓ_{min} pour $f' = 50 \text{ mm}$ et $d_{\text{max}} = 55 \text{ mm}$. Peut-on prendre en photo l'arbre précédent avec une tel appareil ?

On souhaite obtenir une image plus grande de l'arbre sur le capteur sans pour autant changer de place (donc en gardant la même valeur pour ℓ). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f'_1 = 100 \text{ mm}$. La distance d est toujours réglable mais les valeurs d_{min} et d_{max} sont différentes des valeurs précédentes.

8. Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ? Si on suppose que le capteur a pour dimensions : $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

II.2 Exploitation d'une photo

Les tailles des capteurs dont sont équipés les appareils numériques actuels sont variables. La photo ci-dessous a été prise avec un capteur "Canon G10" de dimensions $5,7 \text{ mm} \times 7,6 \text{ mm}$, de diagonale $9,5 \text{ mm}$, et un objectif de focale $f' = 18 \text{ mm}$. Il s'agit d'une photo prise dans la baie du Mont Saint-Michel, depuis le point B sur la carte satellite, la distance BC valant $1,46 \text{ km}$.

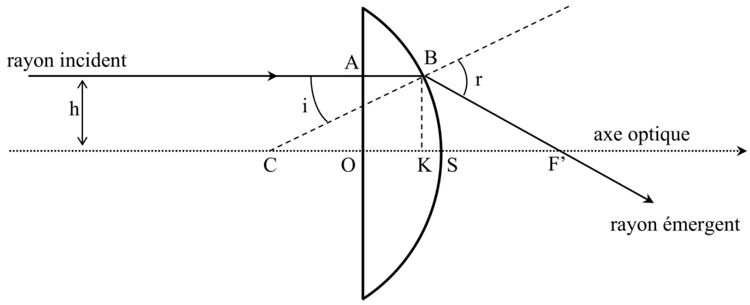


9. À partir de la photo obtenue et des données, déterminer la hauteur du Mont Saint-Michel (flèche comprise) en indiquant les hypothèses posées, la modélisation du problème (par exemple par un schéma légendé) et les calculs effectués.

II.3 Modélisation de l'objectif

Les propriétés optiques des lentilles proviennent de leur forme géométrique. Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe constituée d'un verre d'indice n, l'indice de l'air ambiant étant égal à 1.

La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre C et de rayon $R = CB$. L'épaisseur de la lentille au centre est $e = OS$. On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance h de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en A et est réfracté en B. On note i et r les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale (CB). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en F'. On note K le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.



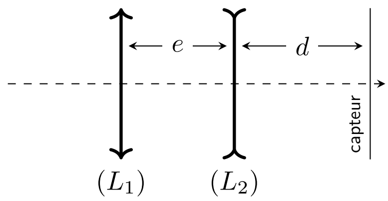
10. En vous appuyant sur un schéma, rappeler les trois lois de DESCARTES pour la réfraction et la réflexion.
11. Justifier pourquoi le rayon n'est pas réfracté en A. En B, donner la relation entre n, r et i.
12. En considérant le triangle CKB, déterminer l'expression de CK en fonction de R et i puis montrer que $OK = e - R + R\cos i$.
13. Montrer que l'angle $\widehat{KF'B} = r - i$ puis, en considérant le triangle BKF', montrer que $KF' = \dfrac{R\sin i}{\tan(r-i)}$.

    En déduire l'expression de la distance focale OF' en fonction de e, R, i et r.

De façons générale, cette distance va dépendre de l'angle d'incidence i, donc de la distance h : la lentille n'est pas stigmatique. Cependant, pour des rayons paraxiaux, les angles $\theta = i$ ou r sont faibles et on pourra supposer que $\cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$.

14. En déduire la relation de DESCARTES simplifiée entre i, r et n. Monter que la distance focale s'exprime alors $f' = e + \dfrac{R}{n-1}$. Effectuer l'A.N. pour $e = 0,5\ \mathrm{cm}$, $R = 20\ \mathrm{cm}$ et $n = 1,5$.

II.4 Téléobjectif



On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente et une lentille (L_2) divergente, séparées par une distance e. La distance ℓ entre (L_1) et l'arbre n'est pas modifiée. La lentille (L_1), de focale f_1', donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_iB_i qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2), de focale f_2', qui en donne une image finale $A'B'$: $AB \xrightarrow{L_1} A_iB_i \xrightarrow{L_2} A'B'$

15. Question préliminaire : réaliser un schéma optique soigné de l'image $A'B'$ d'un objet **virtuel** AB situé entre le centre optique O et le foyer objet F d'une lentille **divergente**. Positionner les foyers principaux et tracer trois rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.
16. En supposant que l'objet est à l'infini, exprimer la distance $\overline{O_2A_i}$ en fonction de f_1' et e. L'objet intermédiaire est-il réel ou virtuel pour la lentille (L_2) ?
17. L'image $A'B'$ doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise : $f_1' + f_2' < e < f_1'$. Vérifier que cette condition est réalisée avec $f_1' = 10\ \mathrm{cm}$, $f_2' = -5\ \mathrm{cm}$ et $e = 8\ \mathrm{cm}$.
18. Calculer alors la distance d, la taille $A'B'$ de l'image de l'arbre sur le capteur et indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif grande focale de la question 8. Pour des lentilles successives, les grandissements se multiplient : $\gamma_{\text{tot}} = \gamma_2 \times \gamma_1$.
19. Réaliser un schéma optique de la situation.