

# DS1 – corrigé

## I Rayonnement électro-magnétique par la matière interstellaire – d'après Mines-Ponts PC 2009

### I.1 Énergie de l'électron d'un atome d'hydrogène

1. Par exemple, l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . Comme  $[v] = \mathbf{L.T}^{-1}$ , on a  $[\text{énergie}] = \mathbf{M.L}^2.\mathbf{T}^{-2}$ .

La constante de PLANCK s'exprime en J.s : on multiplie la dimension par  $\mathbf{T}$  :  $[h] = \mathbf{M.L}^2.\mathbf{T}^{-1}$ .

2. D'après l'énoncé,  $[\varepsilon_0] = \mathbf{L}^{-3}.\mathbf{M}^{-1}.\mathbf{T}^4.\mathbf{I}^2$  donc  $[\varepsilon_0 \times h] = \mathbf{L}^{-1}.\mathbf{T}^3.\mathbf{I}^2$ .

D'après la formule proposée :  $\mathbf{M.L}^2.\mathbf{T}^{-2} = [E_1] = \mathbf{M}^a \times (\mathbf{I.T})^b \times (\mathbf{L}^{-1}.\mathbf{T}^3.\mathbf{I}^2)^c = \mathbf{M}^a.\mathbf{L}^{-c}.\mathbf{T}^{b+3c}.\mathbf{I}^{b+2c}$ .

On en déduit le système : 
$$\begin{cases} a = 1 \\ -c = 2 \\ b + 3c = -2 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \\ b = 4 \end{cases} . \text{ La formule est donc } E_1 = K \times \frac{me^4}{(\varepsilon_0 h)^2}.$$

3. Calcul compliqué :  $E_1 = \frac{1}{8} \times \frac{9,1 \times 1,6^4}{8,82 \times 6,62^2} \times \frac{10^{-31} \times 10^{-4 \times 19}}{10^{-12 \times 2} \times 10^{-34 \times 2}} = 2,18.10^{-3} \times 10^{-15} = 2,18.10^{-18} \text{ J.}$



L'énergie la plus basse est  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ . L'énergie la plus élevée est  $E_\infty = 0 \text{ eV}$  (limite).

### I.2 Spectroscopie de l'atome d'hydrogène

5. On a  $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$  puisque  $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ .

6. On utilise la formule proposée :  $E_{nm} = \frac{hc}{\lambda_{nm}} = E_n - E_m = -\frac{E_1}{n^2} + \frac{E_1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_{nm}} = \frac{E_1}{hc} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ .

On identifie la constante de RYDBERG :  $R = \frac{E_1}{hc}$ .

7. La transition d'énergie la plus basse est  $2 \rightarrow 1$ , de longueur d'onde  $\lambda_{21} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = 1,21.10^{-7} \text{ m} = 121 \text{ nm}$ .

Il s'agit d'un rayonnement **ultraviolet**.

8. Par exemple, pour la transition  $3 \rightarrow 2$  :  $\lambda_{32} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 6,54.10^{-7} \text{ m} = 654 \text{ nm}$  qui est du **visible**.

Par contre, pour la transition  $4 \rightarrow 3$  :  $\lambda_{43} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 1,87.10^{-6} \text{ m} = 1870 \text{ nm}$  qui est dans l'**infrarouge**.

9. On vient de calculer la longueur d'onde de la transition  $3 \rightarrow 2$  à 654 nm, ce qui est très proche de la mesure proposée dans l'énoncé : il semble probable que la nébuleuse d'ORION soit largement constitué d'hydrogène.

### I.3 Expansion de l'univers

10. Comme  $\lambda = \frac{c}{f}$ , on obtient  $\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{c}{f} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \lambda \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ .

Si l'émetteur s'éloigne ( $v > 0$ ), alors  $\lambda' > \lambda$  et la longueur d'onde **augmente**.

11. Comme  $\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{v}{c}$ , on a  $Z = \frac{v}{c}$ . Si  $Z$  est positif, cela veut dire que la longueur d'onde  $\lambda'$  augmente et se **déplace donc vers le rouge**, d'où le nom anglais.

12. La loi de HUBBLE est  $v = H \times d$  donc  $Z = \frac{H}{c} \times d$ . Il faut donc mesurer le **coefficient directeur** de la courbe. Avec le taux d'accroissement, on obtient  $\frac{H}{c} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{14 \cdot 10^{24} \text{ m}} = 7,14 \cdot 10^{-27} \text{ m}^{-1}$ . On en déduit  $H = 2,14 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ .  
Calculons  $1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mal}^{-1} = 1,05 \cdot 10^{-19} \text{ s}^{-1}$  donc  $H = 20,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mal}^{-1}$ . On peut interpréter cette unité comme étant une vitesse d'éloignement des galaxies, en  $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ , proportionnellement à la distance qui nous en sépare, en Mal.
13. En supposant que la vitesse  $v$  d'une galaxie est constante (ce qui n'est pas le cas, il faudrait prendre une vitesse moyenne, plutôt de l'ordre de  $v/2$ ), le trajet depuis le big-bang pour parcourir la distance  $d$  qui nous en sépare a nécessité une durée  $\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{1}{H}$ . On en déduit l'âge de l'univers  $\Delta t = 4,7 \cdot 10^{17} \text{ s} = 15$  milliards d'années où 1 milliards d'années =  $10^9 \times 365 \times 25 \times 3600 \text{ s}$ .

## I.4 Le rayonnement fossile

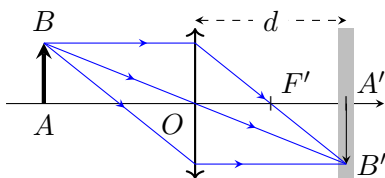
14. Les longueurs d'ondes sont de l'ordre de quelques millimètres. Cela correspond à des fréquences de l'ordre de  $f = 10^{11} \text{ Hz} = 100 \text{ GHz}$ . C'est au-delà des ondes radios et en deçà des infra-rouges : il s'agit de **micro-ondes**.
15. On lit  $\lambda_m = 1,1 \text{ mm}$  donc  $T = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,7 \text{ K}$ . C'est pas chaud !
16. Le rapport des températures est d'environ  $\times 1100$ .

## II Autour de l'appareil photographique – d'après CCP MP 2021

### II.1 Généralités

1. Un système centré est utilisé dans les **conditions de Gauss** si tous les rayons incidents sont paraxiaux. Un rayon incident sur un système centré est dit **paraxial** si :
- il est proche de l'axe optique (par rapport à la taille transverse caractéristique du système),
  - il est peu incliné par rapport à l'axe optique (de sorte que  $\tan \alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha$ ).

Ici, c'est le **diaphragme** qui permet de limiter les rayons incidents.



2. Voir ci-contre.

3. Les triangles  $ABO$  et  $A'B'O$  sont semblables donc  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$ .

4. On applique la relation de conjugaison :  $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{OA} = \frac{OA + f'}{OA \times f'}$  avec  $OA = -\ell$ . Ainsi,  $OA' = \frac{\ell f'}{\ell - f'}$ .

5. On calcule  $A'B' = \left| \frac{OA'}{OA} \times AB \right| = \frac{h f'}{\ell - f'}$  A.N.  $1,25 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,25 \text{ cm}$ .

6. L'image d'un objet à l'infini se forme dans le **plan focal image** de la lentille :  $d_{\min} = f'$ .

Plus on approche l'objet, plus l'image se forme loin. Au maximum,  $OA' = d_{\max}$  et on en déduit la position de l'objet correspondant  $OA = -\ell_{\min}$  avec la relation de conjugaison :  $-\frac{1}{OA} = \frac{d_{\max} - f'}{f' d_{\max}} \Leftrightarrow \ell_{\min} = \frac{f' d_{\max}}{d_{\max} - f'}$ .

7. On calcule  $\ell_{\min} = 5,5 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 55 \text{ cm}$ . Aucun problème donc pour prendre en photo l'arbre qui se trouve à 20 m.
8. On utilise la formule de la question 5 avec la nouvelle focale :  $A'B' = 2,5 \text{ cm}$ . L'image est plus grande que la petite dimension du capteur : il faut prendre un photo en mode portrait.

## II.2 Exploitation d'une photo

9. Commençons pas déterminer la taille de l'image sur le capteur : on remarque que le Mont Saint-Michel occupe environ  $1/3$  de la hauteur de la photo. Étant donné les dimensions du capteur, on en déduit que  $A'B' = \frac{1}{3}5,7 \text{ mm} = 1,9 \text{ mm}$ .

La formule de la question 5 reste valable, il suffit d'adapter les valeurs  $\ell = 1,46 \text{ km}$  et  $f' = 18 \text{ mm}$ . On peut effectuer l'approximation  $\ell \gg f'$  donc  $A'B' \simeq \frac{hf'}{\ell}$ . On isole la taille  $h$  de l'objet :  $h = \frac{\ell \times A'B'}{f'} = 154 \text{ m}$ .

## II.3 Modélisation de l'objectif

10. À chaque rayon incident correspond un **unique** rayon réfléchi et (généralement) un unique rayon réfracté (transmis).

**1<sup>ère</sup> loi** : les trois rayons appartiennent tous au **plan d'incidence**, formé par le rayon incident et la normale au dioptre en  $I$ .

**2<sup>ème</sup> loi** : l'angle de **réflexion** est l'opposé de l'angle d'incidence :  $r = -i_1$ .

**3<sup>ème</sup> loi** : l'angle de **réfraction**, lorsque le rayon réfracté existe, est relié à l'angle d'incidence par la loi des sinus :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

11. L'angle d'incidence sur la face plane est nul. La loi des sinus donne  $n \sin i_2 = \sin i_1 = 0$  donc  $i_2 = 0$ . La réfraction ne crée pas de déviation.

En  $B$ , on a  $n \sin i = \sin r$ .

12. Comme  $\widehat{BCK} = i$ , on a  $\cos i = \frac{CK}{CB} \Leftrightarrow CK = R \cos i$ . On décompose  $OK = OS - CS + CK = e - R + R \cos i$ .

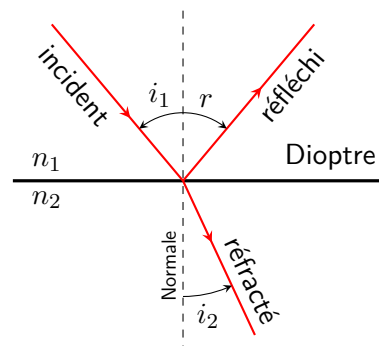
13. On a  $\widehat{KBC} = \frac{\pi}{2} - i$  et  $\widehat{KBC} + \widehat{KBF'} + r = \pi$  donc  $\widehat{KBF'} = \frac{\pi}{2} + i - r$ . Ainsi,  $\widehat{KF'B} = \frac{\pi}{2} = \widehat{KBF'} = r - i$ .

On a  $\tan(r - i) = \frac{BK}{KF'}$ . En remarquant que  $BK = R \sin i$ , on obtient  $KF' = \frac{R \sin i}{\tan(r - i)}$ .

Finalement,  $OF' = OK + KF' = e - R + R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(r - i)}$ .

14. La loi de DESCARTES simplifiée donne  $ni = r$ . Avec l'approximation,  $\cos i = 1$ ,  $\sin i = i$  et  $\tan(r - i) = r - i = (n - 1)i$ .

En remplaçant, on obtient  $OF' = e - R + R + \frac{Ri}{(n - 1)i} = e + \frac{R}{n - 1} \stackrel{A.N.}{=} 40,5 \text{ cm}$ .



## II.4 Téléobjectif

15. Voir ci-contre.

16. Avec la première lentille, on obtient  $\overline{O_1A_i} = f'_1$ . Puis on décompose :  $\overline{O_2A_i} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_i} = -e + f'_1$ .

17. Pour que l'image par la lentille divergente soit réelle ( $\overline{O_2A'} > 0$ ), il faut que l'objet intermédiaire se situe entre le centre  $O_2$  et le foyer objet  $F_2$ .  $\triangle O_2F_2 = -f'_2$ .

Il faut donc que  $0 < \overline{O_2A_i} < -f'_2 \Leftrightarrow 0 < f'_1 - e < -f'_2 \Leftrightarrow -f'_1 < -e < -f'_2 - f'_1 \Leftrightarrow f'_1 > e > f'_2 + f'_1$ .

On vérifie  $f'_1 + f'_2 = 5 \text{ cm} < e = 8 \text{ cm} < f'_1 = 10 \text{ cm}$ .

18. Appliquons la relation de conjugaison :  $\overline{O_2A'} = \frac{f'_2 \times \overline{O_2A_i}}{f'_2 + \overline{O_2A_i}} = \frac{f'_2(f'_1 - e)}{f'_2 + f'_1 - e} = 3,33 \text{ cm}$ .

Pour la taille,  $\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \gamma_1 \times \gamma_2 = h \times \frac{f'_1}{\ell} \times \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = -4,2 \text{ cm}$ . L'image finale est de taille supérieure à celle créée par l'unique lentille ( $L_1$ ). L'objet intermédiaire est virtuel pour la lentille.

